

绿卡图书——走向成功的通行证

高中数学
万能解题模板

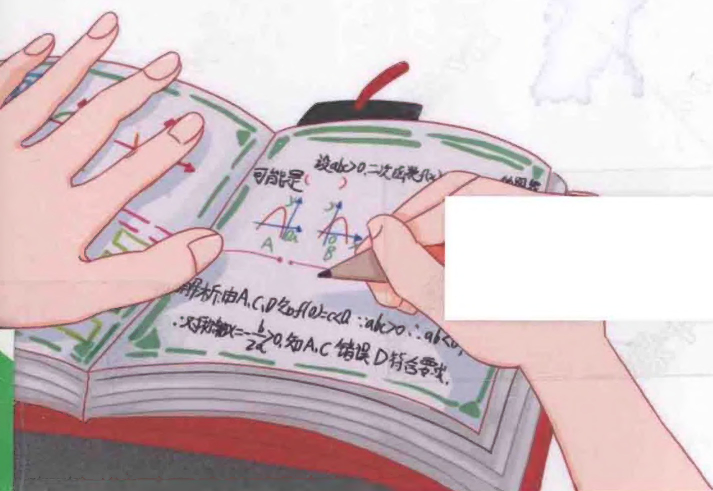
每天用得到，天天都可学



课本不会天天翻，补习班不会天天去，
每天用万能解题模板辅助做题，
才能天天学数学！

总主编：牛胜玉





用万能解题模板 **明确高考考什么，怎么考。**
用万能解题模板 **抓住解题关键，学会破题技巧。**
用万能解题模板 **规范解题步骤，掌握得分法则。**
用万能解题模板 **让你审题有思路，解题有速度，答题有准度，轻松得高分！**

模板探究　模板攻略　知识要点　模板演练

176个解题模板+141个知识要点+782道高考真题，只要一本万能解题模板就能搞定高中数学！

湖南师范大学出版社



绿卡图书——走向成功的通行证

高中数学
万能解题模板

每天用得到，天天都可学



课本不会天天翻，补习班不会天天去，
每天用万能解题模板辅助做题，
才能天天学数学！

总 主 编：牛胜玉
本册主编：亢喜岱　侯培培
陈　静　刘　丽
徐光莹　吕艳君

湖南师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高中数学万能解题模板 / 牛胜玉编. —长沙：湖南师范大学出版社，2014.4

ISBN 978-7-5648-1614-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①牛… Ⅲ.①中学数学课－高中－题解 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第063021号

高中数学万能解题模板

◇总 主 编：牛胜玉

◇责任编辑：张 宇 颜李朝

◇责任校对：刘 丽

◇出版发行：湖南师范大学出版社

地址/长沙市岳麓山

邮编/410081

电话/0731.88853867 88872751

传真/0731.88872636

网址/http://press.hunnu.edu.cn

◇经销：全国新华书店

山东绿卡凯尔文化传媒有限公司

◇印刷：肥城新华印刷有限公司

◇开本：720mm × 1092mm 1/16

◇印张：30

◇字数：640千字

◇版次：2014年4月第1版 2015年4月第2次印刷

◇书号：ISBN 978-7-5648-1614-8

◇定价：42.80元

前言

Preface

作为高中课程学习的常备工具书，本书以最新考试大纲和课程标准为依据，参照新课标各版本教材编写而成，包括新课标各版本教材必修和选修的高考常考题目，并根据题目的解题过程整理成一个个方便掌握的解题模板，以最新高考真题诠释对模板的运用，从而将高考常考的题目类型进行梳理和归纳，并浓缩成易于规范解题的综合性工具书，本书既适合学生高一、高二同步使用，又适合高三总复习使用，同时可供有关教师教学参考。

在初学阶段使用该书，可以系统掌握每一章知识所涉及的考试常考题目类型和特点，通过典型例题学会用模板解决问题的具体步骤及解题方法技巧。

在复习阶段使用该书，模板的重要程度和考查频率一目了然，可以准确把握考试内容和要求，将有限的时间用在突破高考核心考点上。

在高考冲刺阶段使用该书，能让学生明确高考考什么，破解高考怎么考，掌握考题怎么解。

本书具有以下特色：

1. 模板内容全面、系统：本书根据国家教育部最新考试大纲和课程标准编写，融入我国现行所有高中新课标教材所规定的全部必修和选修内容。

2. 按步骤解题更规范、更快捷：按照解题模板步骤解题能让你在最短的时间内学会破题技巧，规范解题步骤，掌握得分法则，轻松考得高分。

3. 标注考频：精心研究最近五年高考真题，针对模板所涉及的题目类型，标注了模板的考查频率，让学生更清晰地了解题目的考查方式及模板的重要程度。

4. 精选高考真题：本书精选实用性和针对性强的高考真题，对模板解决步骤进行强化与巩固，帮助学生加深对模板的运用，更好地掌握模板，同时方便学生提前感知高考。

5. 答案指引、方便查找：针对模板演练中的典型练习题，相应地给出了答案所在的页码，让学生在练习完后更方便快捷地查阅答案。

6. 附录内容丰富：针对高考所涉及的四种思想方法进行全面解读，让学生掌握如何运用思想方法解题，进一步体会思想方法的妙用。

栏目介绍

模板探究

给出模板解决的问题类型，以母题的形式呈现此类型的一个例题，并写出相应的解题步骤，以此来引出“模板攻略”中的解决此类问题的一个通用步骤——模板解决步骤。

模板探究

母题呈现	模板引入
(辽宁高考)若函数$y=(x+1)(x-a)$为偶函数，则$a=$(　　). A. −2　B. −1　C. 1　D. 2	本模板解决的是“已知含参数的函数$f(x)$是奇(或偶)函数，求其中参数的值”的问题.
解析：$\because f(x)=(x+1)(x-a)$为偶函数， $\therefore f(-x)=(-x+1)(-x-a)=f(x)$恒成立， 即$x^2+(a-1)x-a=x^2-(a-1)x-a$恒成立. $\therefore a-1=0,\therefore a=1$. **答案**：C	第一步　将解析式代入$f(-x)=f(x)$. 第二步　得到关于a的方程. 第三步　解出a的值.

模板攻略

先给出解决此类问题的思路，再给出解决此类问题的通用步骤，最后给出1~2道典型例题，并将“模板解决步骤”应用到例题中，让你掌握最快、最规范的解题方法技巧。

模板攻略

1. 模板解决思路

求有限集合M的元素个数，一般是先将M求出，然后数出元素个数.

2. 模板解决步骤

①第一步　采用树状图列出所有组合.

②第二步　计算M生成规则下每一组组合的值.

③第三步　写出集合M，并检验.

④第四步　数出M中元素的个数.

3. 典型例题

典例1　(山东高考)已知集合$A=\{0,1,2\}$，则集合$B=\{x-y\mid x\in A,y\in A\}$中元素的个数是(　　).

A. 1　B. 3　C. 5　D. 9

解析：列树状图并计算：

0—0→0，0—1→−1，0—2→−2；1—0→1，1—1→0，1—2→−1；2—0→2，2—1→1，2—2→0　①~②

由集合的互异性知$B=\{-2,-1,0,1,2\}$.　③

即B中有5个元素.　④

答案：C

知识要点

把本模板所涉及的重要知识点进行归纳整理，让你在用模板解决问题的同时，加深对知识的理解，并进一步体会知识在解决问题时的作用。

知识要点

1. 集合的含义

一般地，我们把研究对象统称为元素，把一些元素组成的总体叫作集合(简称为集).

2. 集合中元素的特征

(1)确定性：给定的集合，它的元素必须是确定的. 这就是说，给定一个集合，那么任何一个元素在不在这个集合中就确定了. 如“高一(1)班的高个子同学”就不能构成一个集合，因为组成它的元素是不确定的.

(2)互异性：一个给定集合中的元素是互不相同的(或说是互异的). 也就是说，集合中的元素是不重复出现的.

(3)无序性：组成集合的元素不考虑顺序. 如$\{1,2,3\}$与$\{3,2,1\}$表示同一个集合. 只要构成两个集合的元素是一样的，我们就称这两个集合是相等的.

3. 元素与集合的关系

给定一个集合A，任何一个对象a是不是这个集合的元素就确定了. 若a是集合A的元素，就说a属于集合A，记作$a\in A$；若a不是集合A中的元素，就说a不属于集合A，记作$a\notin A$.

模板演练

精选出适合本模板的高考真题及典型习题，让你更熟练地运用“模板解决步骤”练习解题，以此来检测对模板的掌握程度。

模板演练　→答案详见P375

1. (广东高考)设集合$S=\{x\mid x^2+2x=0,x\in\mathbf{R}\}$，$T=\{x\mid x^2-2x=0,x\in\mathbf{R}\}$，则$S\cap T=$(　　).
   A. $\{0\}$　B. $\{0,2\}$
   C. $\{-2,0\}$　D. $\{-2,0,2\}$
2. (北京高考)已知集合$A=\{x\in\mathbf{R}\mid 3x+2>0\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}\mid (x+1)(x-3)>0\}$，则$A\cap B=$(　　).
   A. $(-\infty,-1)$　B. $(-1,-\frac{2}{3})$
   C. $(-\frac{2}{3},3)$　D. $(3,+\infty)$
3. (福建高考)已知集合$M=\{1,2,3,4\}$，$N=\{-2,2\}$，下列结论成立的是(　　).
   A. $N\subseteq M$　B. $M\cup N=M$
   C. $M\cap N=N$　D. $M\cap N=\{2\}$
4. (辽宁高考)已知全集$U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，集合$A=\{0,1,3,5,8\}$，集合$B=\{2,4,5,6,8\}$，则$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=$(　　).
   A. $\{5,8\}$　B. $\{7,9\}$
   C. $\{0,1,3\}$　D. $\{2,4,6\}$
5. (四川高考)设全集$U=\{a,b,c,d\}$，集合$A=\{a,b\}$，$B=\{b,c,d\}$，则$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=$________.
6. (上海高考)若集合$A=\{x\mid 2x+1>0\}$，$B=\{x\mid |x-1|<2\}$，则$A\cap B=$________.

特色“特”说

1 考频分析

标注每个模板在近五年高考中的考查频率，让你清晰把握高考重难点。

模板 1　求集合中元素的个数 [5年12考]

模板 2　求特定子集的个数 [5年6考]

2 误区警示

对解题过程中易出现的错误，加以分析和点拨，让你远离误区，轻松得高分。

误区警示

在使用判定定理和性质定理进行推理论证时要使条件完备，即要有充足的条件保证得出的结论准确，特别是面面平行的判定定理，其中有五个条件，在使用时要把这五个条件都列出.

3 特别提示

通过不同的角度对重要知识点剖析讲解，提醒易错点，点拨疑难点，深化对知识的理解，拓展思维，拓宽思路，让求知的道路更宽阔。

特别提示

(1)分段函数是一个函数，而不是几个函数.

(2)分段函数的定义域是各段自变量的取值集合的并集，分段函数的值域是各段函数的取值集合的并集.

4 答案指引

每个模板演练都对其下方的题目标注了所对应的答案页码，查找方便快捷。

模板演练 → 答案详见 P375

模板演练 → 答案详见 P382

5 凯尔微博

生活中多姿多彩的趣味数学知识让你拓宽视野，在紧张的学习之余放松心情。

数学笑话——减法　数学课上，教师对一位学生说：“你怎么连减法都不会？例如：你家里有 10 个苹果，被你吃了 4 个，结果是多少呢？”这个学生沮丧地说道：“结果是挨了10下打！”

磨练的人生，更懂得珍惜

在美国，有这样一个年轻人：他是个大学生，每逢学校过礼拜或放假，他都得到他父亲开设的工厂去上班。他用打工的工资来偿还父母为他垫付的学费和生活费。

当他终于熬到大学毕业，认为自己可以接管父亲的公司时，父亲不但不让他接管公司，反而对他更加苛刻。他想不如去外面另谋生路。

他用打工积累的一点资金开了家小店，小店生意不错，他又开了家小公司，小公司慢慢地变成了大公司。但令他万分痛心的是，公司因为经营管理不善倒闭了。他认真地思索了他的过去，思索自己为什么在打工和经商中屡遭惨败，他总结了自己的失败教训，他没有灰心丧气，决心咬紧牙关挺起胸膛从头再来。就在他振作精神准备再干一番的时候，他父亲找到了他，并决定让他来接管自己的公司。对于父亲的决定他非常不解，他说："我现在是个一无所有甚至是个失败的人，你为什么还要我接管你的公司？"父亲说："不，孩子，你虽然跟几年前一样依然没有钱，但你有了一段可贵的经历，这段经历对你来说是一场艰苦的磨练，然而它却是可贵的。现在你拥有了这段经历，你会珍惜它，而且会把公司管理好，还会不断地让它发展壮大。孩子，无论干什么事情，不经受一番磨练是干不好的。"

果然，他不负父亲的期望，将规模不大的公司发展成了一家令全球瞩目的大公司。他就是伯克希尔公司总裁，有着"美国股神"称号的沃伦·巴菲特。他的资产仅次于比尔·盖茨。

从沃伦·巴菲特的故事我们可以看出，历经苦难、磨练对一个人来说是多么重要。不是说不经历苦难、不经历磨练就不能成功成材，而是经历了苦难、经历了磨练至少使人积累了经验，增强了毅力，从而使人更懂得珍惜自己的事业和生活，也更懂得如何做人与处世。

目录



Contents

必修 1

第一章 集合与函数概念

第二章 基本初等函数(Ⅰ)

第三章 函数的应用

必修 2

第一章 空间几何体

第二章 点、直线、平面之间的位置关系

第三章 直线与方程

第四章　圆与方程

必修3

第一章　算法初步

第二章　统　计

第三章　概　率

必修4

第一章　三角函数

第二章　平面向量

第三章　三角恒等变换

必修 5

第一章　解三角形

第二章　数 列

第三章　不等式

选修 2-1

第一章　常用逻辑用语

第二章　圆锥曲线与方程

第三章　空间向量与立体几何

选修 2-2

第一章　导数及其应用

第二章　推理与证明

第三章　数系的扩充与复数的引入

选修 2-3

第一章　计数原理

第二章　随机变量及其分布

第三章　统计案例

附录　思想方法篇

第一章　集合与函数概念

模板 1　求集合中元素的个数【5年12考】

模板探究

母题呈现	模板引入
（江西高考）若集合 $A=\{-1,1\}$，$B=\{0,2\}$，则集合 $\{z\mid z=x+y,x\in A,y\in B\}$ 中的元素的个数为（　　）． A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2	本模板解决的是"已知集合 A，B，且 M 是由 A，B 按某种规则生成的集合，求 M 中元素的个数"的问题．
解析：列树状图并计算： -1 ＜ $0\to-1$，$2\to1$　　1 ＜ $0\to1$，$2\to3$ 显然 $\{z\mid z=x+y,x\in A,y\in B\}=\{-1,1,3\}$． 即有3个元素． **答案**：C	第一步　将 A，B 按树状图的形式写出所有组合． 第二步　按规则计算每一组组合的结果． 第三步　检查互异性，得到生成集合． 第四步　数出元素个数．

模板攻略

1. 模板解决思路

求有限集合 M 的元素个数，一般是先将 M 求出，然后数出元素个数．而求集合 M，一般是采用列举法结合 M 的生成规则，一一写出 M 中的元素，然后检验其中的有效个数．而列举法一般选用树状图．

2. 模板解决步骤

1 第一步　采用树状图列出所有组合．

2 第二步　计算 M 生成规则下每一组组合的值．

3 第三步　写出集合 M，并检验．

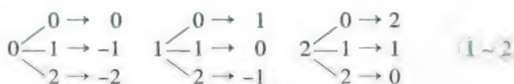
4 第四步　数出 M 中元素的个数．

3. 典型例题

典例 1　（山东高考）已知集合 $A=\{0,1,2\}$，则集合 $B=\{x-y\mid x\in A,y\in A\}$ 中元素的个数是（　　）．

A. 1　　B. 3　　C. 5　　D. 9

解析：列树状图并计算：



由集合的互异性知 $B=\{-2,-1,0,1,2\}$．　　3

即 B 中有5个元素．　　4

答案：C

典例 2　定义集合运算：$A*B=\{z\mid z=xy,x\in A,y\in B\}$，设 $A=\{1,2\}$，$B=\{0,2\}$，则集合 $A*B$ 中元素个数为______．

解析：列树状图并计算：



由集合的互异性知 $A*B=\{0,2,4\}$．　　3

即 $A*B$ 中有 3 个元素．　　4

答案：3

数学神童维纳的年龄（一）　20世纪著名的数学家诺伯特·维纳，从小就智力超常，三岁时就能读写，十四岁时就大学毕业了．几年后，他又通过了博士论文答辩，成为美国哈佛大学的科学博士．在博士学位的授予仪式上，执行主席看到一脸稚气的维纳，颇为惊讶，于是就当面询问起他的年龄来．维纳不愧为数学神童，他的回答十分巧妙．

知识要点

1. 集合的含义

一般地，我们把研究对象统称为元素，把一些元素组成的总体叫作集合(简称为集).

2. 集合中元素的特征

(1)确定性：给定的集合，它的元素必须是确定的. 这就是说，给定一个集合，那么任何一个元素在不在这个集合中就确定了. 如"高一(1)班的高个子同学"就不能构成一个集合，因为组成它的元素是不确定的.

(2)互异性：一个给定集合中的元素是互不相同的(或说是互异的). 也就是说，集合中的元素是不重复出现的.

(3)无序性：组成集合的元素不考虑顺序. 如$\{1,2,3\}$与$\{3,2,1\}$表示同一个集合. 只要构成两个集合的元素是一样的，我们就称这两个集合是相等的.

3. 元素与集合的关系

给定一个集合A，任何一个对象a是不是这个集合的元素就确定了. 若a是集合A的元素，就说a属于集合A，记作$a\in A$；若a不是集合A中的元素，就说a不属于集合A，记作$a\notin A$.

特别提示

符号"$\in$"和"$\notin$"表示的是元素与集合间的关系，元素与集合间只有"$\in$"和"$\notin$"两种关系.

4. 集合的表示方法

(1)列举法

把集合的元素一一列举出来，并用花括号"$\{\}$"括起来表示集合的方法叫作列举法.

(2)描述法

用集合所含元素的共同特征表示集合的方法称为描述法. 具体方法是：在花括号内先写上表示这个集合元素的一般符号及取值(或变化)范围，再画一条竖线，在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征.

(3)Venn 图

用平面上封闭曲线的内部代表集合，这种图称为 Venn 图.

特别提示

(1)用列举法表示集合时，注意：①元素间用逗号","隔开；②元素排列无固定顺序；③列举法也可以表示有明显规律的元素组成的无限集. (2)用描述法表示集合时，①在不致发生误解时，元素的取值集合可以不写.例如，在实数集$\mathbf{R}$中取值，"$\in\mathbf{R}$"常常省略不写. ②"$\{\}$"本身已经暗含"所有"的意思，故在表示集合时，条件中不必再写"所有"二字. (3)Venn图必须是封闭曲线，常用椭圆、圆、矩形、正方形等表示. 用Venn图表示的集合通常元素个数较少且为有限个，如果元素个数无限，如$\{x|x>1\}$常借助于数轴表示.

模板演练

➡ 答案详见 P375

1. (新课标全国高考)已知集合$A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{(x,y)|x\in A,y\in A,x-y\in A\}$，则$B$中所含元素的个数为(　　).

A. 3　　B. 6　　C. 8　　D. 10

2. 设P,Q为两个非空实数集合，定义集合$P+Q=\{a+b|a\in P,b\in Q\}$，若$P=\{0,2,5\}$，$Q=\{1,2,6\}$，则$P+Q$中元素的个数是(　　).

A. 9　　B. 8　　C. 7　　D. 6

3. (宁夏高考)设集合$P=\{3,4,5\}$，$Q=\{4,5,6,7\}$，若定义新集合$P*Q=\{(a,b)|a\in P,b\in Q\}$，则集合$P*Q$中元素的个数为(　　).

A. 3　　B. 4　　C. 7　　D. 12

4. (全国高考)设集合$A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5\}$，$M=\{x|x=a+b,a\in A,b\in B\}$，则$M$中元素的个数为(　　).

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

凯尔微博



数学神童维纳的年龄(二)　他说："我今年岁数的立方是个四位数，岁数的四次方是个六位数，这两个数，刚好把十个数字0,1,2,3,4,5,6,7,8,9全都用上了，不重不漏. 这意味着全体数字都向我俯首称臣，预祝我将来在数学领域里一定能干出一番惊天动地的大事业."维纳此言一出，四座皆惊，大家都被他的这道妙题深深地吸引住了，整个会场上的人都在议论他的年龄问题.

模板 2　求特定子集的个数【5年6考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(湖北高考)已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid 0<x<5,x\in\mathbf{N}\}$，则满足条件 $A\subseteq C\subseteq B$ 的集合 C 的个数为(　　). A. 1　B. 2　C. 3　D. 4	本模板解决的是"已知集合 A，求其满足特定条件 p 的子集个数"的问题.
解析：集合 $B=\{1,2,3,4\}$，有4个元素， 集合 $A=\{1,2\}$， 则集合 C 的个数问题可转化为 $\{3,4\}$ 的子集个数问题，即 $2^2=4$. **答案**：D	第一步　先将集合 B 表示出来，确定 C 最多包含元素个数. 第二步　将集合 A 表示出来，确定 C 必须包含元素. 第三步　从 B 中去掉 A 的元素，转化为无限制条件的集合的子集个数问题. 第四步　求出子集个数.

模板攻略

1. 模板解决思路

求子集个数的关键是确定其中元素的个数，因此，要将所给条件 p 转化为必须包含或不能包含的元素的条件，然后问题可转化为无限制条件的集合的子集问题.

2. 模板解决步骤

1 第一步　求出子集被包含集合的元素，确定元素个数.

2 第二步　将子集应满足条件 p 转化为必须包含的元素.

3 第三步　在被包含集合中去掉子集必须包含的元素，将问题转化为一个集合无限制条件的子集个数问题.

4 第四步　求出子集个数.

3. 典型例题

典例 1　(新课标全国高考)已知集合 $M=\{0,1,2,3,4\}$，$N=\{1,3,5\}$，$P=M\cap N$，则 P 的子集共有(　　).

A. 2个　B. 4个　C. 6个　D. 8个

解析：由题意 $M\cap N=\{1,3\}$，　①~②

即 $P=\{1,3\}$，共有2个元素.　③

所以 P 的子集个数为 $2^2=4$(个).　④

答案：B

典例 2　(安徽高考)设集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，$B=\{4,5,6,7,8\}$，则满足 $S\subseteq A$ 且 $S\cap B\neq\varnothing$ 的集合 S 的个数为(　　).

A. 57　B. 56　C. 49　D. 8

思路分析：令 $C=\{4,5,6\}$. 则 $S\subseteq A$ 且 $S\cap B\neq\varnothing$ 与 $S\subseteq A$ 且 $S\cap C\neq\varnothing$ 等价，而 $S\cap C=\varnothing$ 可用模板方法求之.

解析：令 $C=B\cap A=\{4,5,6\}$，

而 A 共有子集 $2^6=64$(个)，　①

$S\subseteq A$ 且 $S\cap C=\varnothing$，等价于 $S\subseteq\{1,2,3\}$.　②

即这样的 S 有 $2^3=8$(个)，　③

所以 $S\subseteq A$ 且 $S\cap C\neq\varnothing$ 的集合个数为 $64-8=56$(个)，

即 $S\subseteq A$ 且 $S\cap B\neq\varnothing$ 的集合个数为 56.　④

答案：B

数学神童维纳的年龄(三)　其实这个问题不难解答，但是需要一点数字"灵感"，不难发现，21 的立方是四位数，而 22 的立方已经是五位数了，所以维纳的年龄最多是 21 岁；同样道理，18 的四次方是六位数，而 17 的四次方则是五位数了，所以维纳的年龄至少是 18 岁. 这样，维纳的年龄只可能是 18,19,20,21 这四个数字中的一个. 剩下的工作就"一一筛选"了.

凯尔微博


必修1

知识要点

1. 子集

一般地，对于两个集合 A,B，如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素(若 $a\in A$，则 $a\in B$)，那么集合 A 称为集合 B 的子集，记为 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$.

根据子集的定义，我们知道 $A\subseteq A$. 也就是说，任何一个集合是它本身的子集. 对于空集$\varnothing$，我们规定$\varnothing\subseteq A$，即空集是任何集合的子集.

2. 真子集

如果 $A\subseteq B$，但存在元素 $x\in B$，且 $x\notin A$，那么集合 A 称为集合 B 的真子集，记为 $A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$.

特别提示

(1)空集是任何非空集合的真子集.

(2)若 $A\subseteq B$，则 $A=B$ 或 $A\subsetneqq B$.

(3)若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

(4)含有 $n(n\geqslant 1)$个元素的集合有2^n 个子集，有2^n-1个真子集，有 2^n-2 个非空真子集.

模板演练

➡ 答案详见 P375

1. 集合$\left\{x\in \mathbf{N}^*\mid \dfrac{12}{x}\in \mathbf{Z}\right\}$的子集个数为(　　).

A. 4　　B. 6　　C. 16　　D. 64

2. (山东高考)满足 $M\subseteq\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，且 $M\cap\{a_1,a_2,a_3\}=\{a_1,a_2\}$的集合 M 的子集的个数是(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x=2a,a\in A\}$，则集合$\complement_U(A\cup B)$的子集个数为______.

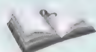
4. 数集 A 满足条件：若 $a\in A$，则 $\dfrac{1-a}{1+a}\in A(a\neq 1)$. 若$\dfrac{1}{3}\in A$，则集合 A 至少有 ______ 个子集.

模板 3　集合的运算问题 [5 年 75 考]

模板探究

母 题 呈 现	模 板 引 入
(浙江高考)设集合 $A=\{x\mid 1<x<4\}$，集合 $B=\{x\mid x^2-2x-3\leqslant 0\}$，则 $A\cap(\complement_R B)=$(　　). A. (1,4)　　B. (3,4) C. (1,3)　　D. (1,2)∪(3,4)	本模板解决的是“已知集合 A,B，求 A,B 经过交、并、补等相关运算后的集合”的问题.
解析：由题意知，$B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 3\}$. 将$A,B$表示在数轴上如图： （数轴图：B 从 −1 到 3，A 从 1 到 4；刻度 −1 0 1 2 3 4 x） 显然，$\complement_R B=\{x\mid x<-1$或$x>3\}$. $A\cap(\complement_R B)=\{x\mid 3<x<4\}=(3,4)$. 答案：B	第一步　将集合 B 也表示成最简形式. 第二步　将集合 A,B 在数轴上表示出来. 第三步　从数轴上运算出$\complement_R B$和$A\cap(\complement_R B)$. 第四步　将数轴上的运算结果用集合或区间表示出来.

凯乐微博



数学神童维纳的年龄(四)　20 的立方是 8 000，有三个重复数字 0，不合题意. 同理，19 的四次方等于 130 321，21 的四次方等于 194 481，都不合题意. 最后只剩下一个 18，是不是正确答案呢？18 的立方是等于 5 832，四次方等于 104 976，恰好“不重不漏”地用完了十个阿拉伯数字！这个年仅 18 岁的少年博士，后来果然成就了一番大事业：他成为信息论的前驱和控制论的奠基人.

模板攻略

1. 模板解决思路

解决本模板问题首先要将 A,B 表示成最简形式，然后按照 A,B 的几何意义，将对应的图形画出来，然后在图形上进行相关运算，最后，将运算的结果再转化为集合或区间形式.

2. 模板解决步骤

①第一步　将集合化成最简形式.

②第二步　确定集合表示的几何意义，将对应的图形表示出来.

③第三步　利用图形进行运算，求出运算结果.

④第四步　将运算结果表示成集合或区间形式.

3. 典型例题

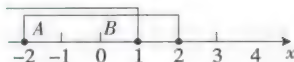
典例1　(天津高考)已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}||x|\leqslant 2\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}|x\leqslant 1\}$，则 $A\cap B=($　　$)$.

A. $(-\infty,2]$　　B. $[1,2]$

C. $[-2,2]$　　D. $[-2,1]$

解析：$A=\{x\in\mathbf{R}|-2\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}|x\leqslant 1\}$，　①

在数轴上表示如下



②

则 $A\cap B=\{x\in\mathbf{R}|-2\leqslant x\leqslant 1\}$，故选 D.　③~④

答案：D

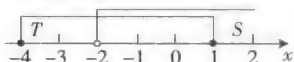
典例2　(浙江高考)设集合 $S=\{x|x>-2\}$，$T=\{x|-4\leqslant x\leqslant 1\}$，则 $S\cap T=($　　$)$.

A. $[-4,+\infty)$　　B. $(-2,+\infty)$

C. $[-4,1]$　　D. $(-2,1]$

解析：$S=\{x|x>-2\}$，$T=\{x|-4\leqslant x\leqslant 1\}$，　①

在数轴上表示如下



②

所以 $S\cap T=\{x|-2<x\leqslant 1\}$.　③~④

答案：D

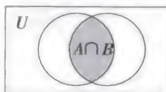
误区警示

在数轴上表示集合时，要注意实心点和空心圈的区别：实心点表示包含这个点，空心圈表示不包含这个点.

知识要点

1. 交集

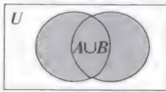
一般地，由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素构成的集合，称为 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$(读作"A 交 B")，即 $A\cap B=\{x\mid x\in A,且\ x\in B\}$.



$A\cap B$ 可用图中的阴影部分来表示.

2. 并集

一般地，由所有属于集合 A 或者属于集合 B 的元素构成的集合，称为 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$(读作"A 并 B")，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A,或\ x\in B\}$.

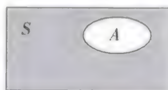


$A\cup B$ 可用图中的阴影部分来表示.

3. 补集、全集

设 $A\subseteq S$，由 S 中不属于 A 的所有元素组成的集合称为 S 的子集 A 的补集，记为 $\complement_S A$(读作"A 在 S 中的补集")，即 $\complement_S A=\{x\mid x\in S,且\ x\notin A\}$. $\complement_S A$ 可用图中的阴影部分表示.

如果集合 S 包含我们所要研究的各个集合，这时 S 可以看作一个全集，全集通常记作 U.



特别提示

对任意的集合 A,B，有

(1) $A\cap B=B\cap A$，$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$，$A\cap A=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$.

(2) $A\cup B=B\cup A$，$A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$，$A\cup A=A$，$A\cup\varnothing=A$.

(3) $\complement_U(\complement_U A)=A$，$\complement_U U=\varnothing$，$\complement_U\varnothing=U$，$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$，$A\cup(\complement_U A)=U$.

(4) $\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B$，$\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$.

数学家卡当(一)　卡当1501年出生于意大利的帕维亚，在文艺复兴时期是一位举足轻重的数学家，也是一位典型的人文主义者，除了数学他也专注于组织、研究、评论希腊和罗马的成果. 卡当有个不幸的童年，在40岁之前，他穷得一无所有，个性孤僻，自负、缺乏幽默感、不能自我反省，并且往往在言谈中表现得冷漠无情.



模板演练 ➡ 答案详见 P375

1. (广东高考)设集合 $S=\{x|x^2+2x=0,x\in\mathbf{R}\}$,$T=\{x|x^2-2x=0,x\in\mathbf{R}\}$,则 $S\cap T=($　　$)$.

A. $\{0\}$　　B. $\{0,2\}$

C. $\{-2,0\}$　　D. $\{-2,0,2\}$

2. (北京高考)已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}|3x+2>0\}$,$B=\{x\in\mathbf{R}|(x+1)(x-3)>0\}$,则 $A\cap B=($　　$)$.

A. $(-\infty,-1)$　　B. $(-1,-\frac{2}{3})$

C. $(-\frac{2}{3},3)$　　D. $(3,+\infty)$

3. (福建高考)已知集合 $M=\{1,2,3,4\}$,$N=\{-2,2\}$,下列结论成立的是(　　).

A. $N\subseteq M$　　B. $M\cup N=M$

C. $M\cap N=N$　　D. $M\cap N=\{2\}$

4. (辽宁高考)已知全集 $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,集合 $A=\{0,1,3,5,8\}$,集合 $B=\{2,4,5,6,8\}$,则 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=($　　$)$.

A. $\{5,8\}$　　B. $\{7,9\}$

C. $\{0,1,3\}$　　D. $\{2,4,6\}$

5. (四川高考)设全集 $U=\{a,b,c,d\}$,集合 $A=\{a,b\}$,$B=\{b,c,d\}$,则 $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=$________.

6. (上海高考)若集合 $A=\{x|2x+1>0\}$,$B=\{x||x-1|<2\}$,则 $A\cap B=$________.

模板 4　求运算后的集合的元素个数 [5 年 10 考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(广东高考)已知集合 $A=\{(x,y)\mid x,y$ 为实数,且 $x^2+y^2=1\}$,$B=\{(x,y)\mid x,y$ 为实数,且 $y=x\}$,则 $A\cap B$ 的元素个数为(　　). A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3	本模板解决的是"已知两个集合 A,B,M 是 A,B 经运算后得到的集合,求 M 中元素的个数"的问题.
解析:由题意,集合 A 表示一个圆,集合 B 表示一条直线,如图所示. (图: $x^2+y^2=1$, $y=x$, 1, −1, O, x, y) 显然,圆与直线有两个交点, 即 $A\cap B$ 的元素个数为2. **答案:**C	第一步　确定两个集合的几何意义,A 表示圆,B 表示直线. 第二步　将直线和圆在同一坐标系中表示出来. 第三步　观察图形,有两个交点. 第四步　交点个数即 $A\cap B$ 的元素个数.

凯尔微博


数学家卡当(二)　他为了逃避穷困、病痛、诽谤和不公平的待遇,曾每天玩骰子,并天天玩棋达40年之久. 青年时代,他也受聘在意大利的多所大学. 1570 年,因丢掷耶稣的天宫图,被视为异教徒而被捕入狱. 不过,令人称奇的是,主教随即以占星术士来聘用他. 卡当的著作涵盖了数学、天文学、占星学、物理学、医学以及关于道德方面的语录.

模板攻略

1. 模板解决思路

求运算后的集合的元素个数,若能直接求出集合,则数出即可. 而此类问题往往直接求的话,求不出来或计算非常麻烦,因此,一般考虑集合的几何意义,采用数形结合的方法来解决.

2. 模板解决步骤

1 第一步　确定集合的几何意义.

2 第二步　根据几何意义,画出图形.

3 第三步　根据图形,得出结论.

4 第四步　将图形得出结论转化为元素个数.

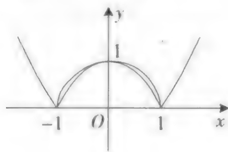
3. 典型例题

典例 1　已知 $A=\{(x,y)|y=|x^2-1|\}$,$B=\{(x,y)|y=\sqrt{1-x^2}\}$,则 $A\cap B$ 的元素个数为(　　).

A. 0　　B. 2　　C. 3　　D. 4

思路分析:$A=\left\{(x,y)\middle|y=\begin{cases}x^2-1,x\leqslant-1\text{ 或 }x\geqslant1,\\1-x^2,-1<x<1.\end{cases}\right\}$,即 A 表示和抛物线相关的一个图形,$B=\{(x,y)|x^2+y^2=1,y\geqslant0\}$,即 B 表示一个半圆. 画出图形通过观察可得结论.

解析:由题意,A,B 对应图象如图所示.



1~2

显然,两个图象有 3 个交点.　3

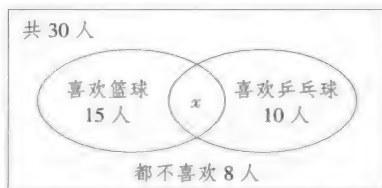
即 $A\cap B$ 中有 3 个元素.　4

答案:C

典例 2　(湖南高考)某班共 30 人,其中 15 人喜欢篮球运动,10 人喜欢乒乓球运动,8 人对两项运动都不喜欢,则喜欢篮球运动但不喜欢乒乓球运动的人数为 ________.

思路分析:将全班视为一个全集U,喜欢篮球,喜欢乒乓球的人分别视作集合A,B. 则问题转化为求$A\cap\complement_UB$的元素个数问题,画出Venn图则易求之.

解析:由题意,作出Venn图如图所示.



1~2

设两者都喜欢的人数为 x,则只喜欢篮球的有$(15-x)$人,只喜欢乒乓球的有$(10-x)$人,都不喜欢的有 8 人,

由此可得$(15-x)+(10-x)+x+8=30$,解得 $x=3$,　3

所以 $15-x=12$,即所求人数为 12.　4

答案:12

模板演练

➡ 答案详见 P376

1. 设集合 $M=\{(x,y)|x^2+y^2=1,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,$N=\{(x,y)|x^2-y=0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,则集合 $M\cap N$ 中元素的个数为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 设集合 $A=\left\{(x,y)\middle|y=\frac{1}{x},x>0,y\in\mathbf{R}\right\}$,$B=\{(x,y)|y=-x+2,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$,则集合 $A\cap B$ 中元素的个数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

3. 若集合 $M=\{0,1,2\}$,$N=\{(x,y)|x-2y+1\geqslant0$且$x-2y-1\leqslant0,x,y\in M\}$,则 N 中元素的个数为(　　).

A. 9　　B. 6　　C. 4　　D. 2

4. (江西高考)已知全集 $U=A\cup B$ 中有 m 个元素,$(\complement_UA)\cup(\complement_UB)$中有 n 个元素,若 $A\cap B$ 非空,则 $A\cap B$ 的元素个数为(　　).

A. m　　B. n　　C. $m+m$　　D. $m-n$

数学家卡当(三)　借着辛勤的耕耘,他将古世纪、中世纪以及当代所能搜集到的数学知识,编成百科全书的形式,他更将自己珍爱、偏好的数论和代数理论结合在一起. 1545 年,他出版的著作《大术》在代数学上具有相当重要之地位. 书中首次出现使用符号的雏形,他对三次及四次方程式提出了系统性的解法,这是一个非常重要的成就.



模板5 求集合中参数的值【5年15考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(江苏高考)设集合 $A=\{-1,1,3\}$,$B=\{a+2,a^2+4\}$,$A\cap B=\{3\}$,则实数 a 的值为 ______.	本模板解决的是“已知含参数集合 A,B,且 A,B满足条件 p,求参数的值”的问题.
解析:由 $A=\{-1,1,3\}$,$B=\{a+2,a^2+4\}$,$A\cap B=\{3\}$, 知 $3\in B$,即 $a+2=3$ 或 $a^2+4=3$,解得 $a=1$. 代入检验知 $a=1$ 符合题意. **答案:**1	第一步　明确集合 A,B 的元素. 第二步　由 $A\cap B=\{3\}$,知 $3\in B$. 第三步　根据元素与集合的关系,得关于 a 的方程. 第四步　解方程,求得 a 的值,并检验.

模板攻略

1. 模板解决思路

求参数的值一般都是利用条件得到方程或方程组,然后解方程或方程组求出参数的值. 本模板中显然应利用条件 p 得到方程或方程组,而利用集合列方程或方程组则要用到元素与集合的关系. 因此,对于含参数的集合 A,B,至少要将其中一个表示成具体元素的形式(可用参数表示). 求解完后记得要检验.

2. 模板解决步骤

1 第一步　将集合 A 或 B 表示成具体元素的形式.

2 第二步　利用条件 p,分类讨论具体元素与另一个集合的关系.

3 第三步　列出方程或方程组.

4 第四步　求出参数的值,并检验.

3. 典型例题

典例1　已知 $M=\{2,a,b\}$,$N=\{2a,2,b^2\}$,且 $M=N$,求 a,b 的值.

解:由于 $M=\{2,a,b\}$,$N=\{2a,2,b^2\}$, ①

又 $M=N$,因此 M,N 中的元素对应相等, ②

得 $\begin{cases}a=2a,\\b=b^2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=b^2,\\b=2a,\end{cases}$ ③

解得 $\begin{cases}a=0,\\b=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=0,\\b=0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{1}{4},\\b=\frac{1}{2}.\end{cases}$

由集合中元素的互异性,得 $\begin{cases}a=0,\\b=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{1}{4},\\b=\frac{1}{2}.\end{cases}$ ④

典例2　设集合 $A=\{x^2,2x-1,-4\}$,$B=\{x-5,1-x,9\}$,若 $A\cap B=\{9\}$,求 x 的值.

解:由 $A\cap B=\{9\}$得$9\in A$, ①~②

因此 $x^2=9$ 或 $2x-1=9$, ③

若 $x^2=9$,则 $x=\pm3$,当 $x=3$时,$B=\{-2,-2,9\}$,不合题意,舍去.

若 $2x-1=9$,则 $x=5$,此时$A=\{25,9,-4\}$,$B=\{0,-4,9\}$,$A\cap B=\{-4,9\}$,不合题意,舍去.

$\therefore x=-3$. ④

误区警示

本题在求得x的值后,代入检验时,不仅要检验元素的互异性,还要检验$A\cap B=\{9\}$是否成立,因为$9\in A\cap B$ 只能得到$\{9\}\subseteq A\cap B$,而不是$\{9\}=A\cap B$.

凯尔微博



数学家卡当(四)　卡当在代数学上的另一个贡献是引入了虚数,并接受虚数是方程式的根. 虚数的出现,是数学史上一件大事. 虚数和原来的实数统称为复数系. 根据代数基本定理,在复数系里任何多项式必有根,而且 n 次多项式恰有 n 个根,这就解决了根的存在性问题. 要解出方程式的根,在复数系中,便可迎刃而解了.

知识要点

集合相等

(1)如果两个集合所含的元素完全相同(即 A 中的元素都是 B 的元素，B 中的元素也都是 A 的元素)，那么称这两个集合相等，记为 $A=B$.

(2)对于集合 A,B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，那么 $A=B$. 这是因为：由 $A\subseteq B$ 可知，集合 A 中的元素都是集合 B 的元素；又由 $B\subseteq A$ 知，集合 B 中的元素也都是集合 A 的元素. 这就是说，集合 A 和集合 B 的元素是完全相同的，因而说集合 A 与集合 B 相等.

(3)关于两集合相等的问题，若两个集合中元素较少时，可以从元素一样的角度来求解问题；若集合中元素个数较多，元素呈现一定的规律性或集合为无限集时，可从子集角度说明 $A\subseteq B$ 同时 $B\subseteq A$ 来求解问题.

模板演练

➜ 答案详见 P376

1. 设 $a,b\in\mathbf{R}$，集合 $\{1,a+b,a\}=\left\{0,\frac{b}{a},b\right\}$，则 $b-a$ 等于(　　).

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

2. (全国高考)已知集合 $A=\{1,3,\sqrt{m}\}$，$B=\{1,m\}$，$A\cup B=A$，则 $m=$(　　).

A. 0 或 $\sqrt{3}$　　B. 0 或 3

C. 1 或 $\sqrt{3}$　　D. 1 或 3

3. 已知集合 $A=\{x\mid |x-a|=4\}$，集合 $B=\{1,2,b\}$，若 $A\subseteq B$ 成立，则对应的实数对 (a,b) 有(　　)

A. 1 对　　B. 2 对　　C. 3 对　　D. 4 对

4. 已知集合 $A=\{a-2,2a^2+5a,-5\}$，且 $3\in A$. 则 $a=$______.

5. (重庆高考)设 $U=\{0,1,2,3\}$，$A=\{x\in U\mid x^2+mx=0\}$，若 $\complement_U A=\{1,2\}$，则实数 $m=$______.

6. (天津高考)已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid |x+2|<3\}$，集合 $B=\{x\in\mathbf{R}\mid (x-m)(x-2)<0\}$，且 $A\cap B=(-1,n)$，则 $m=$______，$n=$______.

模板 6　求集合中参数的取值范围【5 年 8 考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(天津高考)设集合 $A=\{x\mid \|x-a\|<1,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid 1<x<5,x\in\mathbf{R}\}$. 若 $A\cap B=\varnothing$，则实数 a 的取值范围是(　　). A. $\{a\mid 0\leqslant a\leqslant 6\}$　　B. $\{a\mid a\leqslant 2$，或 $a\geqslant 4\}$ C. $\{a\mid a\leqslant 0$，或 $a\geqslant 6\}$　　D. $\{a\mid 2\leqslant a\leqslant 4\}$	本模板解决的是“已知含参数的集合 A,B，若 A,B 满足条件 p，求参数的取值范围”的问题.
解析：由 $\|x-a\|<1$ 得 $-1<x-a<1$，即 $a-1<x<a+1$. 又 $A\cap B=\varnothing$，如图， （数轴：$a-1$　$a+1$　1　5　$a-1$　$a+1$　x） 由图可知 $a+1\leqslant 1$ 或 $a-1\geqslant 5$， 所以 $a\leqslant 0$ 或 $a\geqslant 6$. **答案**：C	第一步　将集合 A,B 化成最简形式. 第二步　结合数轴，讨论两集合的关系. 第三步　得出关于 a 的不等式组. 第四步　解出 a 的取值范围.

为什么油桶、热水瓶等都是圆柱形的?(一)　油桶、热水瓶等都是装液体的容器，不知平时你注意过没有，装液体的容器往往都是圆柱形的，这有没有数学方面的道理呢？有. 在平面几何里，我们学过计算圆面积和一些正多边形的面积或周长的方法. 譬如：一个面积为 100 cm^2 的正方形的周长是 40 cm；同样面积的正三角形的周长约等于 45.6 cm；而同样面积的圆的周长只有 35.4 cm.

凯尔微博



必修1

模板攻略

1. 模板解决思路

求参数的取值范围，一般是通过解关于参数的不等式(组)得到. 本模板可以先整理化简集合A，B，得到A，B的最简形式，然后利用A，B满足条件p得到关于参数的不等式，解之可得.

2. 模板解决步骤

1 第一步　将集合A或B化成最简形式.

2 第二步　利用条件p，讨论具体元素与另一集合的关系.

3 第三步　列出不等式或不等式组.

4 第四步　求出参数的取值范围.

3. 典型例题

典例1　设集合$A=\{x|x^2+4x=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0,x\in\mathbf{R}\}$. 若$B\subseteq A$，求实数$a$的取值范围.

思路分析:按照模板方法，集合A可以求出具体元素来，又$B\subseteq A$，则B的元素都在A中，代入求出a的值即可. 注意$B\subseteq A$，B既可以等于A，又可以是A的真子集，还不要忘记B也可以是空集.

解:$A=\{x|x^2+4x=0,x\in\mathbf{R}\}=\{-4,0\}$. 1

$\because B\subseteq A$，$\therefore B=A$或$B\subsetneqq A$. 2

(1)当$A=B$，即$B=\{-4,0\}$时，

则-4和0是方程$x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$的两根，

代入解得$a=1$. 3

(2)当$B\subsetneqq A$时，分两种情况：

若$B=\varnothing$，

则$\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$，解得$a<-1$；

若$B\neq\varnothing$，

则方程$x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$有两个相等的实数根.

$\therefore\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)=0$，解得$a=-1$，此时$B=\{0\}$，满足条件. 3

综上所述，所求实数a的取值范围为$\{a|a=1$或$a\leqslant-1\}$. 4

误区警示

不要忘记当$B=\varnothing$时，$B\subseteq A$也成立，空集是任何集合的子集.

典例2　若三个关于x的方程$x^2+4ax-4a+3=0$，$x^2+(a-1)x+a^2=0$，$x^2+2ax-2a=0$中至少有一个方程有实数根，求实数a的取值范围.

思路分析:三个方程中至少有一个方程中有实根，即三个解集的并集不为空集，按模板方法进行即可，也可以先考虑其否命题：三个方程都无实根，即三个解集的交集为空集.

解:方法一：若方程$x^2+4ax-4a+3=0$有实根，

则$\Delta=16a^2-4(3-4a)\geqslant0$.

解得$A=\left\{a\middle|a\geqslant\frac{1}{2}\text{或}a\leqslant-\frac{3}{2}\right\}$. 1

若$x^2+(a-1)x+a^2=0$有实根，

则$\Delta=(a-1)^2-4a^2\geqslant0$.

解得$B=\left\{a\middle|-1\leqslant a\leqslant\frac{1}{3}\right\}$. 1

若$x^2+2ax-2a=0$有实根，

则$\Delta=4a^2+8a\geqslant0$.

解得$C=\{a|a\geqslant0\text{或}a\leqslant-2\}$. 1

综上所述知，满足题意的a的取值范围是

$A\cup B\cup C=\left\{a\middle|a\leqslant-\frac{3}{2}\text{或}a\geqslant-1\right\}$. 2~4

方法二：设已知三个方程都无实根，a的取值范围为集合D. 2

则$\begin{cases}16a^2-4(3-4a)<0,\\(a-1)^2-4a^2<0,\\4a^2+8a<0,\end{cases}$

解得$-\frac{3}{2}<a<-1$. 3~4

$\therefore D=\left\{a\middle|-\frac{3}{2}<a<-1\right\}$.

$\therefore$三个方程至少有一个实根的a的取值范围为D的补集，即$\left\{a\middle|a\leqslant-\frac{3}{2}\text{或}a\geqslant-1\right\}$.

凯尔微博



为什么油桶、热水瓶等都是圆柱形的?(二)　这就是说，面积相同时，在圆、正方形与正三角形等图形中，正三角形的周长最大，正方形的周长较小，圆的周长最小. 所以，装同样体积的液体的容器中，如果容器的高度一样，那么，侧面所需的材料就以圆柱形的容器最省. 因此，油桶、热水瓶等盛液体的容器，大都是圆柱形的.

模板演练

答案详见 P377

1. (北京高考)已知集合 $P=\{x|x^2\leq1\}$,$M=\{a\}$. 若 $P\cup M=P$,则 a 的取值范围是(　　).

A. $(-\infty,-1]$　　B. $[1,+\infty)$

C. $[-1,1]$　　D. $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

2. (天津高考)设集合 $A=\{x\mid |x-a|<1,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x\mid |x-b|>2,x\in\mathbf{R}\}$. 若 $A\subseteq B$,则实数 a,b 必满足(　　).

A. $|a+b|\leq3$　　B. $|a+b|\geq3$

C. $|a-b|\leq3$　　D. $|a-b|\geq3$

3. (天津高考)设集合 $S=\{x\mid |x-2|>3\}$,$T=\{x\mid a<x<a+8\}$,$S\cup T=\mathbf{R}$,则 a 的取值范围是(　　).

A. $-3<a<-1$　　B. $-3\leq a\leq-1$

C. $a\leq-3$ 或 $a\geq1$　　D. $a<-3$ 或 $a>1$

4. (上海高考)已知集合 $A=\{x\mid |x|\leq2,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x\mid x\geq a\}$,且 $A\subseteq B$,则实数 a 的取值范围是______.

5. (上海高考)已知集合 $A=\{x\mid x\leq1\}$,$B=\{x\mid x\geq a\}$,且 $A\cup B=\mathbf{R}$,则实数 a 的取值范围是______.

6. 设 $A=\{x\mid x^2+4x=0\}$,$B=\{x\mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$.

(1)若 $A\cap B=B$,求 a 的取值范围.

(2)若 $A\cup B=B$,求 a 的值.

模板7　求函数的定义域 [5年21考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(江西高考)若函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,2]$,则函数 $g(x)=\dfrac{f(2x)}{x-1}$ 的定义域是(　　). A. $[0,1]$　　B. $[0,1)$ C. $[0,1)\cup(1,4]$　　D. $(0,1)$	本模板解决的是"已知复合函数 $y=f[g(x)]$(可以是抽象函数,也可以是具体函数)满足条件 p,求 $y=f(x)$ 的定义域"的问题.
解析:因为 $f(x)$ 的定义域为 $[0,2]$, 则 $0\leq2x\leq2$,即 $0\leq x\leq1$, 又 $x-1\neq0$,即 $x\neq1$, $\therefore g(x)$ 的定义域为 $[0,1)$. **答案**:B	第一步　利用 $y=f(x)$ 的定义域,得到 $f(2x)$ 中 x 的范围. 第二步　确定 $g(x)$ 各组成部分满足的条件. 第三步　取各组成部分满足的条件的公共部分,写成集合或区间的形式,即得 $g(x)$ 的定义域.

为什么油桶、热水瓶等都是圆柱形的?(三) 有没有比圆柱更为省料的形状呢?有. 根据数学原理,在同样材料做的一些容器中,球形容器的容积要比圆柱形的大,但球形容器很容易滚动,它的盖子也不易做,所以不实用. 放固体的容器,如盒子、箱子等,为什么不做成圆柱形的呢? 因为虽然做成圆柱形容器比较省料,但是用来装固体东西却不经济,所以通常把它们做成长方体.

必修1

模板攻略

1. 模板解决思路

求复合函数$f(\varphi(x))$的定义域，应当首先得到$f(x)$的定义域，然后令$\varphi(x)$满足$f(x)$的定义域，得到关于x的不等式(组)，然后解不等式(组)可得．而$f(x)$的定义域，则应通过条件p化简得到．

2. 模板解决步骤

①第一步　通过条件p得到$f(x)$的定义域D．

②第二步　令$\varphi(x)\in D$，得到关于x的不等式(组)．

③第三步　解不等式(组)得到关于x的取值范围，即为$f(\varphi(x))$的定义域．

3. 典型例题

典例1　(广东高考)函数$y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$的定义域为______．

思路分析：$y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$可以看作分式函数与根式函数的复合函数．

解析：分式函数要求分母不为0，根式函数(偶次)要求被开方数大于等于0，因此　①

$\begin{cases}x\neq 0,\\ x+1\geqslant 0,\end{cases}$　②

解得$\begin{cases}x\neq 0,\\ x\geqslant -1,\end{cases}$

即其定义域为$\{x\mid x\geqslant -1，且x\neq 0\}$．　③

答案：$\{x\mid x\geqslant -1，且x\neq 0\}$

典例2　已知$y=f(x+1)$的定义域为$[1,2]$，求$f(x^2)$的定义域．

思路分析：按照模板方法，先利用$y=f(x+1)$的定义域求出$f(x)$的定义域D，再令x^2满足D得到$f(x^2)$的定义域．

解：由$f(x+1)$的定义域为$[1,2]$，即$1\leqslant x\leqslant 2$，则$2\leqslant x+1\leqslant 3$，即$f(x)$的定义域为$[2,3]$，　①

令$2\leqslant x^2\leqslant 3$，　②

则$\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$或$-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -\sqrt{2}$，

即$f(x)$的定义域为$[-\sqrt{3},-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},\sqrt{3}]$．　③

误区警示

由$y=f(x+1)$的定义域为$[1,2]$，求$f(x^2)$的定义域时，千万不要想当然地令$1\leqslant x^2\leqslant 2$，求出$x$的取值范围即为所求定义域．

知识要点

1. 函数的定义域

函数的定义域就是使得这个函数关系式有意义的实数的全体构成的集合．

2. 求函数的定义域注意问题

(1)如果$f(x)$是整式，那么函数的定义域是**R**；

(2)如果$f(x)$是分式，那么函数的定义域是使分母不等于0的实数x的集合；

(3)如果$f(x)$是偶次根式，那么函数的定义域是使被开方数大于等于0的实数x的集合；

(4)如果$f(x)$是对数函数，那么函数的定义域是使真数大于0的实数x的集合；

(5)如果$f(x)$是由几个数学式子构成的，那么函数的定义域是使各式子都有意义的实数x的集合；

(6)如果$f(x)$是从实际问题中得出的函数，要结合实际考虑函数的定义域．

3. 复合函数定义域的求法

(1)已知$y=f(x)$的定义域是A，求$y=f[g(x)]$的定义域，可通过解关于$g(x)\in A$的不等式，求出x的范围．

(2)已知$y=f[g(x)]$的定义域是A，求$y=f(x)$的定义域，可由$x\in A$，求$g(x)$的范围(即$y=g(x)$的值域)．

凯尔微博

数学与战争——巧妙对付日机轰炸(一)　在作战中运用数学方法设计行动方案虽不多见，一旦运用，效果却十分明显．“二战”期间的几则战例给了我们诸多启示．“二战”太平洋战争初期，美军舰船屡遭日机攻击，损失率高达62%，美军急调大批数学专家对477个战例进行量化分析，最终得出两个结论．

模板演练

➡ 答案详见 P377

1.（江西高考）函数 $y=\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{-x^2-3x+4}}$ 的定义域为(　　).

A. $(-4,-1)$　B. $(-4,1)$　C. $(-1,1)$　D. $(-1,1]$

2.（新课标全国高考）函数 $y=\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x}$ 的定义域为(　　).

A. $\{x\mid x\geqslant 0\}$　B. $\{x\mid x\geqslant 1\}$

C. $\{x\mid x\geqslant 1\}\cup\{0\}$　D. $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$

3. 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，则函数 $f(x+a)+f(2x+a)(0<a<1)$ 的定义域为(　　).

A. $\left[-\frac{a}{2},\frac{1-a}{2}\right]$　B. $\left[-\frac{a}{2},1-a\right]$

C. $[-a,1-a]$　D. $\left[-a,\frac{1-a}{2}\right]$

4. 已知 $f(x)=\frac{1}{x+1}$，则 $f(f(x))$ 的定义域为(　　).

A. $\{x|x\neq-2\}$　B. $\{x|x\neq-1\}$

C. $\{x|x\neq-1$ 且 $x\neq-2\}$　D. $\{x|x\neq 0$ 且 $x\neq-1\}$

5.（湖北高考）函数 $f(x)=\frac{1}{x}\ln(\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{-x^2-3x+4})$ 的定义域为(　　).

A. $(-\infty,-4]\cup[2,+\infty)$　B. $(-4,0]\cup[0,1)$

C. $[-4,0)\cup(0,1]$　D. $[-4,0)\cup(0,1)$

模板 8　求分段函数的函数值 【5年6考】

模板探究

母题呈现	模板引入
（江西高考）若函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\leqslant 1,\\ \frac{2}{x}, & x>1.\end{cases}$ 则 $f(f(3))=$(　　). A. $\frac{1}{5}$　B. 3　C. $\frac{2}{3}$　D. $\frac{13}{9}$	本模板解决的是“已知分段函数的解析式，求 $f(f(x_0))$ 的值”的问题.
解析：因为3>1，代入得 $f(3)=\frac{2}{3}$. 又 $\frac{2}{3}\leqslant 1$，所以 $f(f(3))=f\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2+1=\frac{13}{9}$. **答案**：D	第一步　由 $3>1$，知应代入 $f(x)=\frac{2}{x}$ 中. 第二步　求出 $f(3)=\frac{2}{3}$. 第三步　由 $\frac{2}{3}\leqslant 1$，知应代入 $f(x)=x^2+1$ 中. 第四步　求出 $f(f(3))$.

模板攻略

1. 模板解决思路

已知分段函数 $f(x)$，求 $f(x_0)$ 的关键是判断 x_0 属于哪一段. 而求 $f(f(x_0))$，一般采用由内及外的方法，先求出 $f(x_0)$，然后根据 $f(x_0)$ 属于哪一段，代入求出 $f(f(x_0))$.

2. 模板解决步骤

1 第一步　明确函数各段及对应解析式，判断 x_0 所属对应段.

2 第二步　代入，求出 $f(x_0)$.

3 第三步　判断 $f(x_0)$ 所属对应段.

数学与战争——巧妙对付日机轰炸(二)　一是当日军飞机采取高空俯冲轰炸时，美舰船采取急速摆动规避战术的损失率为 20%，采取缓慢摆动的损失率为 100%；二是当日军飞机采取低空俯冲轰炸时，美军舰船采取急速和缓慢摆动的损失率均为 57%. 美军根据对策论原理，找到了最佳方法：当敌机来袭时，采取急速摆动规避战术. 据估算这一决策至少使舰船损失率从 62%下降到 27%.



凯尔微博

4 第四步　代入,求出$f(f(x_0))$.

3. 典型例题

典例 1　(山东高考)设函数$f(x)=\begin{cases}1-x^2,x\leqslant 1,\\x^2+x-2,x>1.\end{cases}$则$f\left(\frac{1}{f(2)}\right)$的值为(　　).

A. $\frac{15}{16}$　　B. $-\frac{27}{16}$　　C. $\frac{8}{9}$　　D. 18

解析:由题意,2≥1,所以　①

$f(2)=2^2+2-2=4$,　②

又$\frac{1}{f(2)}=\frac{1}{4}\leqslant 1$,　③

所以$f\left(\frac{1}{f(2)}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)=1-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{15}{16}$.　④

答案:A

典例 2　(陕西高考)设函数$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x},\ x\geqslant 0,\\\left(\frac{1}{2}\right)^x,\ x<0,\end{cases}$则$f(f(-4))=$________.

解析:因为$-4<0$,　①

所以$f(-4)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}=16$.　②

因为$16>0$,　③

所以$f(f(-4))=f(16)=\sqrt{16}=4$.　④

答案:4

知识要点

分段函数

在函数$y=f(x)$的定义域中,对于自变量x的不同取值范围,有着不同的对应关系,这样的函数通常称为分段函数. 如函数$y=f(x)=\begin{cases}2x,x\geqslant 0,\\1,x<0\end{cases}$就是分段函数.

特别提示

(1)分段函数是一个函数,而不是几个函数.

(2)分段函数的定义域是各段自变量的取值集合的并集,分段函数的值域是各段函数的取值集合的并集.

模板演练

➡ 答案详见 P377

1. (福建高考)设$f(x)=\begin{cases}1,x>0,\\0,x=0,\\-1,x<0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}1,x\text{ 为有理数},\\0,x\text{ 为无理数},\end{cases}$则$f(g(\pi))$的值为(　　).

A. 1　　B. 0　　C. -1　　D. π

2. 设$f(x)=\begin{cases}|x-1|-2,|x|\leqslant 1,\\\frac{1}{1+x^2},|x|>1.\end{cases}$则$f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=$(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{4}{13}$　　C. $-\frac{9}{5}$　　D. $\frac{25}{41}$

3. 设函数$f(x)=\begin{cases}x^2(x<1),\\x-1(x\geqslant 1),\end{cases}$则$f(f(-4))$的值为(　　).

A. 15　　B. 16　　C. -5　　D. -15

4. 已知函数$f(n)=\begin{cases}n-3,n\geqslant 10,\\f(f(n+5)),n<10,\end{cases}$其中$n\in\mathbf{N}^*$,则$f(6)$的值为(　　).

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

5. 设函数$g(x)=x^2-2(x\in\mathbf{R})$,$f(x)=\begin{cases}g(x)+x+4,x<g(x),\\g(x)-x,x\geqslant g(x).\end{cases}$求$f(f(0))$的值.



数学与战争——理智避开德国潜艇(一)　1943 年以前,在大西洋上英美运输船队常常受到德国潜艇的袭击,当时,英美两国实力受限,又无力增派更多的护航舰艇,一时间,德军的"潜艇战"搞得英美盟军焦头烂额,为此,一位美国海军将领专门去请教了几位数学家,数学家们运用概率论分析后发现,舰队与敌潜艇相遇是一个随机事件.

模板 9　求分段函数中参数的值【5年10考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(江苏高考)已知实数 $a\neq0$,函数 $f(x)=\begin{cases}2x+a,x<1,\\-x-2a,x\geq1,\end{cases}$ 若 $f(1-a)=f(1+a)$,则 a 的值为______.	本模板解决的是"已知分段函数 $f(x)$ 的解析式(含参数),且满足条件 p,求参数的值"的问题.
解析:显然,$1-a$ 与 $1+a$ 中一个大于 1,一个小于 1,当 $a>0$ 时,$1-a<1,1+a>1$;由 $f(1-a)=f(1+a)$ 得 $2-2a+a=-1-a-2a$,解得 $a=-\frac{3}{2}$,不符合; 当 $a<0$ 时,$1-a>1,1+a<1$;由 $f(1-a)=f(1+a)$ 得 $-1+a-2a=2+2a+a$,解得 $a=-\frac{3}{4}$. **答案**:$-\frac{3}{4}$	第一步　确定 $1-a$ 与 $1+a$ 的范围,根据 $a>0$ 与 $a<0$ 讨论. 第二步　在 $a>0$ 或 $a<0$ 时,代入解析式,得方程. 第三步　解方程,求出 a 的值. 第四步　检验,去掉不合题意的值.

模板攻略

1. 模板解决思路

解决此类题目的关键是如何利用好条件 p. 一般地,条件 p 是关于参数的函数值的,因此,要代入解析式需要分类讨论,代入解析式后得到关于参数的方程,解出后不要忘记检验.

2. 模板解决步骤

1 第一步　整理条件 p,确定是否需要分类讨论及讨论标准.

2 第二步　将条件 p 代入解析式,得到关于参数的方程.

3 第三步　解方程,求出参数的值.

4 第四步　检验,去掉不合题意的解.

3. 典型例题

典例 1　(陕西高考)已知函数 $f(x)=\begin{cases}3x+2,x<1,\\x^2+ax,x\geq1.\end{cases}$ 若 $f(f(0))=4a$,则实数 $a=$______.

解析:由题意,$0<1$,

所以 $f(0)=2$,

又 $2>1$,

所以 $f(f(0))=f(2)=2^2+2a=4+2a$,　1~2

又 $f(f(0))=4a$,则 $4+2a=4a$,解得 $a=2$.　3~4

答案:2

典例 2　已知 $f(x)=\begin{cases}x^2+1,x\geq0,\\x+a,x<0,\end{cases}$ 若 $f(a)=2$,则 $a=$______.

解析:对 a 分 $a\geq0$ 和 $a<0$ 进行讨论.　①

当 $a\geq0$ 时,$f(a)=a^2+1=2$,　②

解得 $a=-1$ 或 $a=1$.　③

显然 $a=-1$ 不合题意应舍去.　④

当 $a<0$ 时,$f(a)=a+a=2$,　②

解得 $a=1$ 不合题意,舍去.　3~4

综上,$a=1$.

答案:1

数学与战争——理智避开德国潜艇(二)　从数学角度来看这一问题,它具有一定的规律:一定数量的船编队规模越小,编次就越多;编次越多,与敌人相遇的概率就越大. 美国海军将领接受了数学家的建议,命令舰队在指挥海域集合,再集体通过危险海域,然后各自驶向预定港口,结果英美盟军舰队遭袭被击沉的概率由原来的25%下降为1%,大大减少了损失.



模板演练

答案详见 P378

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-4x+6, x\geqslant 0,\\ a+6, x<0.\end{cases}$ 且 $f(a)-f(1)=0(a\neq 1)$，则 $a=$(　　).

A. 3　　B. -3

C. 3 或 -3　　D. 3 或 -1

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-4x, x\geqslant 0,\\ 3x-a^2, x<0.\end{cases}$ 且 $f(a)=-4$，则 $a=$(　　).

A. -2 或 -1　　B. -2 或 1

C. 2 或 -1　　D. 2 或 1

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x-1, x\geqslant 0,\\ \frac{1}{a}, x<0.\end{cases}$ 若 $f(a)=a$，则 $a=$______.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x, x\geqslant 1,\\ ax-1, x<1.\end{cases}$ 若 $f(1)=f(-2)$，则 $a=$______.

5. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2+ax, x\geqslant 0,\\ x+a+5, x<0.\end{cases}$ 若 $f(f(1))=1$，求 a 的值.

模板 10　求函数的值域 (5年13考)

模板探究

母题呈现	模板引入
已知 $a\leqslant\frac{1}{2}$，$x\in(-\infty, a]$，则函数 $f(x)=x^2-x+a+1$ 的值域是(　　). A. $\left[a+\frac{3}{4}, +\infty\right)$　B. $[a^2+1, +\infty)$ C. $[1, +\infty)$　D. $\left[\frac{5}{4}, +\infty\right)$	本模板解决的是"已知函数 $y=f(x)$，$x\in D$，求函数 $y=f(x)$的值域"的问题.
解析：函数 $f(x)=x^2-x+a+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+a+\frac{3}{4}$，因为 $a\leqslant\frac{1}{2}$，所以函数 $f(x)=x^2-x+a+1$ 在 $(-\infty, a]$上单调递减. 所以函数 $f(x)$在 $(-\infty, a]$上的最小值为 $f(a)=a^2+1$. 故函数 $f(x)=x^2-x+a+1$ 的值域是 $[a^2+1, +\infty)$. **答案**：B	第一步　将二次函数配方. 第二步　根据 $a\leqslant\frac{1}{2}$ 并结合二次函数图象及增减性确定函数 $f(x)$在 $(-\infty, a]$上的最小值. 第三步　确定值域.

模板攻略

1. 模板解决思路

对于常见的函数，我们是通过其单调性和最值来确定其值域，如果其不单调，则将其分成若干个单调区间，然后讨论得到值域. 而对于较复杂的

凯尔微博

数学与战争——准确估计日舰开进路线(一)　"二战"新几内亚作战期间，美军得到了日军将从拉包尔港派出大型护航舰队驶往新几内亚的情报，日军舰队可能走两条航线，航程都是三天，其中北面航线云多雾大，能见度差，不便于观察，南面航线能见度好，便于观察，美军也有两种行动方案，即分别在南北航线上集中航空兵主力进行侦察、轰炸，若日军选择走北线，美军也选择北线.

函数，则要先转化成常见的函数.

2. 模板解决步骤

1 第一步　将函数表示成复合函数 $f(\varphi(x))$ 的形式，其中 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 都是常见的函数（如幂函数、对数函数、指数函数、三角函数等）.

2 第二步　先讨论 $\varphi(x)$ 的值域.

3 第三步　结合 $f(x)$ 的单调性将定义域分成若干区间.

4 第四步　合并每个区间上的结果确定函数的值域.

3. 典型例题

典例 1　求下列函数的值域.

(1) $y=\frac{5x-1}{4x+2}$；　(2) $y=\frac{x^2-4x+3}{2x^2-x-1}$；　(3) $y=x+\sqrt{2x-1}$.

解：(1)借助反比例函数的特征求值域.

$$y=\frac{5x-1}{4x+2}=\frac{\frac{5}{4}(4x+2)-1-\frac{10}{4}}{4x+2}=\frac{5}{4}-\frac{7}{2(4x+2)}.$$ ①

$\because \frac{7}{2(4x+2)}\neq 0$，$\therefore y\neq\frac{5}{4}$. ②~③

$\therefore$ 函数的值域为 $\left\{y\,\middle|\,y\in\mathbf{R}\text{ 且 }y\neq\frac{5}{4}\right\}$. ④

(2) $\because y=\frac{x^2-4x+3}{2x^2-x-1}=\frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(2x+1)}=\frac{x-3}{2x+1}\ (x\neq1)$，

又 $\because \frac{x-3}{2x+1}=\frac{\frac{1}{2}(2x+1)-\frac{7}{2}}{2x+1}=\frac{1}{2}-\frac{7}{2(2x+1)}$， ①

当 $x=1$ 时，原式 $y=\frac{1-3}{2\times1+1}=-\frac{2}{3}$. ②~③

$\therefore$ 函数的值域为 $\left\{y\,\middle|\,y\in\mathbf{R}\text{ 且 }y\neq\frac{1}{2}\text{，且 }y\neq-\frac{2}{3}\right\}$. ④

(3)设 $u=\sqrt{2x-1}\left(x\geqslant\frac{1}{2}\right)$，则 $x=\frac{1+u^2}{2}(u\geqslant0)$，

$\therefore y=\frac{1+u^2}{2}+u=\frac{(u+1)^2}{2}(u\geqslant0)$. ①

由 $u\geqslant0$ 知 $(u+1)^2\geqslant1$，$\therefore y\geqslant\frac{1}{2}$， ②~③

$\therefore$ 函数 $y=x+\sqrt{2x-1}$ 的值域为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. ④

典例 2　设函数 $g(x)=x^2-2(x\in\mathbf{R})$，

$f(x)=\begin{cases}g(x)+x+4, & x<g(x),\\ g(x)-x, & x\geqslant g(x),\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的值域是（　　）.

A. $\left[-\frac{9}{4},0\right]\cup(1,+\infty)$　　B. $[0,+\infty)$

C. $\left[\frac{9}{4},+\infty\right)$　　D. $\left[-\frac{9}{4},0\right]\cup(2,+\infty)$

解析：解 $x<g(x)=x^2-2$，得 $x^2-x-2>0$，则 $x<-1$ 或 $x>2$. 同理 $x\geqslant g(x)=x^2-2$ 的解为 $-1\leqslant x\leqslant2$.

于是 $f(x)=\begin{cases}x^2+x+2, & x<-1\text{ 或 }x>2,\\ x^2-x-2, & -1\leqslant x\leqslant2,\end{cases}$ ①

当 $x<-1$ 或 $x>2$ 时，$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$，则 $f(x)>2$.

当 $-1\leqslant x\leqslant2$ 时，$x^2-x-2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$，则 $f(x)\geqslant-\frac{9}{4}$，

又当 $x=-1$ 或 $x=2$ 时，$x^2-x-2=0$，所以 $-\frac{9}{4}\leqslant f(x)\leqslant0$， ②~③

由以上，可得 $f(x)>2$ 或 $-\frac{9}{4}\leqslant f(x)\leqslant0$，因此 $f(x)$ 的值域是 $\left[-\frac{9}{4},0\right]\cup(2,+\infty)$. 故选 D. ④

答案：D

知识要点

求函数值域的常用方法

(1)图象法：当函数的图象给出时，图象在 y 轴上的投影所覆盖的实数 y 的集合即为函数的值域.

(2)直接法：从自变量 x 的范围入手，逐步推出 $y=f(x)$ 的取值范围. 基本初等函数的值域都是由此方法得出的.

(3)配方法：对于二次函数（或可看成二次函数的函数），常常根据求解问题的要求，采用配方的方法来求值域.

(4)换元法：运用代数或三角代换，将所给函数化成值域容易确定的另一函数，从而求得原函数

数学与战争——准确估计日舰开进路线（二）　由于天气影响，只能有两天的轰炸时间，美军若选南线，则由于在南线侦察耽搁一天，到北线侦察延误一天，只能争取一天的轰炸时间，因此，日军选择北线，被轰炸天数为一至两天；同理若日军选择南线，则被轰炸天数为二至三天，美军由此断定日军必走北线，真实情况果真如此，日军舰队起航一天后，在北线被美军发现并被轰炸两天，损失惨重.



的值域. 如求函数 $y=\sqrt{x-2}+x$ 的值域,可令 $\sqrt{x-2}=t,t\geqslant 0$,转化为求 $y=t+(t^2+2),t\geqslant 0$ 的值域.

(5)分离常数法:适用于解析式为分式形式的函数. 如求 $y=\frac{x+2}{x-3}$ 的值域,则可分离常数为 $y=\frac{x-3+5}{x-3}=1+\frac{5}{x-3}$,进而求其值域.

(6)判别式法:运用方程思想,依据一元二次方程有实根,求出 y 的取值范围.

(7)反解法:通过反解,用 y 来表示 x,再由 x 的取值范围,通过解不等式,得出 y 的取值范围.

模板演练

答案详见 P378

1. 下表表示 y 是 x 的函数,则函数的值域是(　　).

x	$0<x<5$	$5\leqslant x<10$	$10\leqslant x<15$	$15\leqslant x\leqslant 20$
y	2	3	4	5

A. $[2,5]$　　B. $\mathbf{N}$

C. $(0,20]$　　D. $\{2,3,4,5\}$

2. 函数 $y=\frac{8}{x^2-4x+5}$ 的值域是(　　).

A. $(-\infty,8]$　B. $(0,+\infty)$　C. $[8,+\infty)$　D. $(0,8]$

3. 已知定义在 $[1,8]$ 上的函数 $f(x)=\begin{cases}4-8\left|x-\frac{3}{2}\right|,1\leqslant x\leqslant 2,\\ \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right),2<x\leqslant 8,\end{cases}$ 则该函数的值域是 ______.

4. 求下列函数的值域:

(1)函数 $y=x^2+4x-2,x\in\mathbf{R}$ 的值域为 ______;

(2)函数 $y=x-\sqrt{1-2x}$ 的值域为 ______;

(3)已知 $x\in\mathbf{R}$,且 $x\neq 0$,则函数 $y=x^2+\frac{1}{x^2}-x-\frac{1}{x}$ 的值域为 ______;

(4)函数 $y=\frac{x+1}{x+2}$ 的值域为 ______;

(5)函数 $y=\frac{2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+3}$ 的值域为 ______.

模板 11　求函数的解析式

模板探究

母 题 呈 现	模 板 引 入
已知 $2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=x(x\neq 0)$,求 $f(x)$.	本模板解决的是“已知关于 $f(x)$ 的条件 p,求 $f(x)$ 的解析式”的问题.
解: 令 $\frac{1}{x}$ 代替 x 得 $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{1}{x}$, 联立得方程组 $\begin{cases}2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=x,\\ f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{1}{x},\end{cases}$ 解得 $f(x)=\frac{2}{3x}-\frac{x}{3}\ (x\neq 0)$.	第一步　令 $\frac{1}{x}$ 代替 x,得另一等式. 第二步　联立方程组. 第三步　解方程组,求出 $f(x)$,并注明定义域.

凯尔微博



数学与战争——飞机止损护英伦(一)　“二战”期间,当德国对法国等几个国家发动攻势时,英国首相丘吉尔应法国的请求,动用了十几个防空中队的飞机和德国作战,这些飞机中队必须由大陆上的机场来维护和操作,空战中英军飞机损失惨重,与此同时,法国总理要求继续增派十个中队的飞机,丘吉尔决定同意这一请求.

模板攻略

1. 模板解决思路

求出$f(x)$的解析式，一般是从条件p的等式中，把$f(x)$看作未知数，然后从方程(组)中解出来，若条件p只含$f(x)$，解出即可. 若含的是$f(\varphi(x))$，则令$\varphi(x)=t$，解出$f(t)$即得$f(x)$. 若含有两个不同的$f(x)$与$f(y)$，则替换构造出另一个等式，通过方程组解出$f(x)$.

2. 模板解决步骤

1 第一步　观察已知条件的构成形式.

2 第二步　选择合适的方法(如拼凑法、换元法、方程组法、特值法等)整理成解方程(组).

3 第三步　解得$f(x)$的解析式，并注明定义域.

3. 典型例题

典例 1　求下列函数的解析式.

(1)已知$f(x+1)=x^2-3x+2$，求$f(x)$；

(2)已知$f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$，求$f(x)$.

解：(1)$\because f(x+1)=x^2-3x+2=(x+1)^2-5x+1=(x+1)^2-5(x+1)+6$，　1~2

$\therefore f(x)=x^2-5x+6(x\in\mathbf{R})$.　3

(2)令$\sqrt{x}+1=t$，则$t\geqslant1$，　1

即$\sqrt{x}=t-1$，$x=(t-1)^2$.

则$f(t)=(t-1)^2+2(t-1)=t^2-1$，　2

$\therefore f(x)=x^2-1(x\geqslant1)$.　3

典例 2　设$f(x)$是$\mathbf{R}$上的函数，且满足$f(0)=1$，并且对任意x,y有$f(x-y)=f(x)-y(2x-y+1)$，求$f(x)$的解析式.

思路分析：若想利用$f(0)=1$这一条件，应在解析式条件中出现$f(0)$，因此，可令$x=y$或$x=0$.

解：令$x=y$，得$f(0)=f(x)-x(2x-x+1)$，　1

又$f(0)=1$，代入得$1=f(x)-x(x+1)$，　2

即$f(x)=1+x(x+1)=x^2+x+1$.　3

知识要点

常见的一般函数的解析式的求法

(1)代入法，例如，已知$f(x)=x^2-1$，求$f(x+x^2)$时，有$f(x+x^2)=(x^2+x)^2-1$.

(2)待定系数法：已知$f(x)$的函数类型，要求$f(x)$的解析式时，可根据类型设其解析式，从而确定其系数即可.

(3)拼凑法：已知$f[g(x)]$的解析式，要求$f(x)$时，可从$f[g(x)]$的解析式中拼凑出“$g(x)$”，即用$g(x)$来表示，再将解析式的两边的$g(x)$用x代替即可.

(4)换元法：令$t=g(x)$，求出$f(t)$的解析式，然后用x代替$f[g(x)]=F(t)$的两边所有的t即可.注意换元前后的定义域的变化.

(5)方程组法：已知$f(x)$与$f[g(x)]$满足的关系式，要求$f(x)$时，可用$\varphi(x)$代替两边的所有x，得到关于$f(x)$及$f[\varphi(x)]$的方程组，解之即可得出$f(x)$.

模板演练

➡ 答案详见 P379

1. 已知$f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$，则$f(x)$的解析式为(　　).

A. $\frac{x}{1+x^2}$　　B. $-\frac{2x}{1+x^2}$

C. $\frac{2x}{1+x^2}$　　D. $-\frac{x}{1+x^2}$

2. 若$f(x+1)=2x^2+1$，则$f(x)=$______.

3. 已知$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^3+\frac{1}{x^3}$，则函数$f(x)$的解析式为______.

4. 已知$3f(x)+5f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x}+1$，则函数$f(x)$的解析式为______.

5. 已知函数$f(2x+1)=3x+2$，且$f(a)=4$，则$a=$______.

数学与战争——飞机止损护英伦(二)　内阁知道此事后，找来数学家进行分析预测，并根据出动飞机与战损飞机的统计数据建立了回归预测模型，经过快速研究发现，如果补充率和损失率不变，飞机数量的下降是非常快的，用一句话概括就是“以现在的损失率损失2周，英国在法国的飓风式战斗机便一架也不存在了”.



模板 12　函数的单调性问题 [5 年 25 考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(湖南高考)已知函数$f(x)=\frac{\sqrt{3-ax}}{a-1}(a\neq 1)$. (1)若$a>0$,则$f(x)$的定义域是______; (2)若$f(x)$在区间$(0,1]$上是减函数,则实数$a$的取值范围是______.	本模板解决的是“判断函数的单调性”或“已知含参数的函数的单调性,求参数的取值范围”的问题.
解析:(1)当$a>0$且$a\neq 1$时,由$3-ax\geq 0$得$x\leq\frac{3}{a}$,即此时函数$f(x)$的定义域是$\left(-\infty,\frac{3}{a}\right]$. (2)当$a-1>0$,即$a>1$时,要使$f(x)$在$(0,1]$上是减函数,则需$3-a\times 1\geq 0$,此时$1<a\leq 3$. 当$a-1<0$,即$a<1$时,要使$f(x)$在$(0,1]$上是减函数,则需$-a>0$,此时$a<0$. 综上所述,所求实数$a$的取值范围是$(-\infty,0)\cup(1,3]$. **答案**:(1)$\left(-\infty,\frac{3}{a}\right]$　(2)$(-\infty,0)\cup(1,3]$	第一步　确定$f(x)$的定义域. 第二步　函数单调性由$a-1$的正负和$y=3-ax$的单调性决定. 第三步　分类讨论$a-1$的符号不同时的单调性. 第四步　确定a的取值范围.

模板攻略

1. 模板解决思路

常见函数的单调性和单调区间是函数的一种性质,复杂函数的单调性一般是利用复合函数的单调性进行处理. 而利用单调性求参数,则是先带参数讨论单调性,然后对比条件,确定参数的范围.

2. 模板解决步骤

1 第一步　确定函数的定义域.

2 第二步　若是复合函数,将函数分成若干个函数的复合函数. 若不是,跳过此步.

3 第三步　根据复合函数的单调性或直接利用函数单调性的证明步骤讨论单调性.

4 第四步　确定参数的取值范围.

3. 典型例题

典例 1　已知函数$f(x)=8+2x-x^2$,$g(x)=f(2-x^2)$,试求$g(x)$的单调区间.

解:令$u(x)=2-x^2$,则$u(x)$在$(-\infty,0]$上为增函数,在$[0,+\infty)$上为减函数,且$u(0)=2$.　1~2

$f(x)=8+2x-x^2=-(x-1)^2+9$在$(-\infty,1]$上为增函数,在$[1,+\infty)$上为减函数,令$-x^2+2=1$,则$x=\pm 1$.

$\therefore$当$x\in(-\infty,-1]$时,$u(x)$为增函数,值域为$(-\infty,1]$,而$f(x)$在$(-\infty,1]$上为增函数,

$\therefore g(x)$在$(-\infty,-1]$上为增函数.　3

同理,$g(x)$在$[-1,0]$上为减函数,在$[0,1]$上为增函数,在$[1,+\infty)$上为减函数.　3

凯尔微博



数学与战争——飞机止损护英伦(三)　因此要求内阁否决这一决定,最后,丘吉尔同意了这一要求,并将除留在法国的3个中队外,其余飞机全部返回英国,为下一步的英伦保卫战保留了实力. 正是由于数学方法在作战运用中的成效显著,人们开始将数学方法应用到军事问题中,并由此产生了一门新的学科——军事运筹学.

典例 2　(上海高考)已知函数 $f(x)=e^{|x-a|}$(a 为常数). 若 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上是增函数,则 a 的取值范围是 ______.

解析:$\because f(x)=e^{|x-a|}=\begin{cases}e^{x-a}(x\geqslant a),\\ e^{-x+a}(x<a),\end{cases}$　①

当 $x\geqslant a$ 时,令 $u(x)=x-a$,则 $u(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上是增函数,而 $y=e^u$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,$\therefore f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上为增函数.　2~3

同理,可得 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上为减函数.　2~3

$\therefore f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上为增函数,则 $[1,+\infty)\subseteq[a,+\infty)$,

$\therefore a\leqslant 1$.　④

答案:$(-\infty,1]$

必修1

知识要点

1. 增函数与减函数

(1)增函数

一般地,设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I,如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)<f(x_2)$,那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数.

(2)减函数

一般地,设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I,如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)>f(x_2)$,那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数.

特别提示

(1)函数的单调性是对函数定义域内的某个区间而言的.

(2)函数 $f(x)$ 在给定区间上的单调性是函数在该区间上的整体性质.

(3)函数的单调性定义中的 x_1,x_2 有三个特征:①任意性;②有大小;③属于同一个单调区间.

(4)求函数的单调区间,必须先求定义域.

2. 单调区间

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 D 上是增函数或减函数,那么就说函数 $y=f(x)$ 在这一区间具有(严格的)单调性,区间 D 叫作 $y=f(x)$ 的单调区间.

3. 函数单调性的证明步骤

(1)取值:设 x_1,x_2 为该区间内任意的两个值,且 $x_1<x_2$;

(2)作差变形:作差 $f(x_1)-f(x_2)$,并通过因式分解、配方、有理化等方法,向有利于判断差值符号的方向变形;

(3)定号:确定差值的符号,当符号不确定时,可考虑分类讨论;

(4)判断:根据定义作出结论.

4. 函数单调性的常用结论

(1)函数 $f(x)$ 与 $f(x)+c$(c 为常数)具有相同的单调性.

(2)$k>0$ 时,函数 $f(x)$ 与 $kf(x)$ 单调性相同,
　$k<0$ 时,函数 $f(x)$ 与 $kf(x)$ 单调性相反.

(3)若 $f(x)$ 恒为正或恒为负值,则 $f(x)$ 与 $\dfrac{1}{f(x)}$ 具有相反的单调性.

(4)若 $f(x),g(x)$ 都是增(减)函数,则 $f(x)+g(x)$ 是增(减)函数.

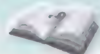
(5)若 $f(x),g(x)$ 都是增(减)函数,则 $f(x)\cdot g(x)$ 当两者都恒大于零时,是增(减)函数;当两者都恒小于零时,是减(增)函数.

5. 复合函数的单调性判断:同增异减

设 $f(x),g(x)$ 复合而成函数 $f(g(x))$,则在其定义域内单调性满足:

$f(x)$	$g(x)$	$f(g(x))$
增函数	增函数	增函数
增函数	减函数	减函数
减函数	增函数	减函数
减函数	减函数	增函数

最大的质数　虽然欧几里得早就证出没有最大的质数,但因质数无规律可循,所以迄今发现的最大质数都需借电脑判断. 法国数学家默森曾致力于寻找质数公式,我们把 Mp=2p-1 称为"默森数". 已发现第 28 个"默森质数"为 M86 243.

凯尔微博


模板演练

➡ 答案详见 P379

1. 下列函数中，在区间$(0,+\infty)$上为增函数的是(　　).

A. $y=\ln(x+2)$　　B. $y=-\sqrt{x+1}$

C. $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$　　D. $y=x+\frac{1}{x}$

2. 设函数$f(x)=(2a-1)x+b$在$\mathbf{R}$上是严格单调减函数，则有(　　).

A. $a\geqslant\frac{1}{2}$　　B. $a\leqslant\frac{1}{2}$

C. $a>\frac{1}{2}$　　D. $a<\frac{1}{2}$

3. 函数$y=1-\frac{1}{x-1}$(　　).

A. 在$(-1,+\infty)$内单调递增

B. 在$(-1,+\infty)$内单调递减

C. 在$(1,+\infty)$内单调递增

D. 在$(1,+\infty)$内单调递减

4. 已知函数$y=x^2+2(a-2)x+5$在区间$(4,+\infty)$上是增函数，则实数a的取值范围是(　　).

A. $a\leqslant-2$　　B. $a\geqslant-2$

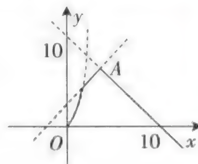
C. $a\leqslant-6$　　D. $a\geqslant-6$

5. 若函数$f(x)=|2x+a|$的单调递增区间是$[3,+\infty)$，则$a=$______.

6. 若函数$f(x)=a|x-b|+2$在$[0,+\infty)$上为增函数，则实数a,b的取值范围是______.

模板13　函数的最值问题【5年6考】

模板探究

母题呈现	模板引入
用$\min\{a,b,c\}$表示a,b,c三个数中的最小值，设$f(x)=\min\{x^2,x+2,10-x\}(x\geqslant0)$，则$f(x)$的最大值为(　　). A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7	本模板解决的是"已知函数$f(x)$，求其最大(小)值"的问题.
解析：$f(x)=\min\{x^2,x+2,10-x\}(x\geqslant0)$的图象如图所示. 令$x+2=10-x$，解得$x=4$. 当$x=4$时，$f(x)$取最大值$f(4)=4+2=6$. **答案：**C 	第一步　函数的定义域为$\{x\mid x\geqslant0\}$. 第二步　观察函数的结构特点，分段画出函数图象.确定各单调区间的单调性. 第三步　确定最大值.

模板攻略

1. 模板解决思路

求函数的最值问题实质上是求函数的值域问题，因此求函数最值的方法也是求函数值域的方法.首先，应观察函数的结构特点，再选用相应的方法(如是二次函数，则用配方法). 特别注意自变量的取值范围.

凯尔微博 

最早的对数表　1614年，纳皮尔发表了他的对数理论，并附有对数表，最早的常用对数表由英国布里格斯教授于1624年发表.

2. 模板解决步骤

1 第一步　确定函数的定义域.

2 第二步　根据函数的结构特点选择合适的方法(数形结合法、配方法、单调性法等).

3 第三步　确定函数的最值.

3. 典型例题

典例 1　已知函数 $f(x)=\frac{x^2+2x+a}{x}, x\in[1,+\infty)$.

(1)当 $a=4$ 时,求 $f(x)$的最小值;

(2)当 $a=\frac{1}{2}$ 时,求 $f(x)$的最小值.

解:(1)当 $a=4$ 时,$f(x)=x+\frac{4}{x}+2$,易知 $f(x)$在$[1,2]$上是减函数,在$[2,+\infty)$上是增函数,　①~②

$\therefore f(x)_{\min}=f(2)=6$.　③

(2)当 $a=\frac{1}{2}$ 时,$f(x)=x+\frac{1}{2x}+2$,易知 $f(x)$在$[1,+\infty)$上为增函数,　①~②

$\therefore f(x)_{\min}=f(1)=\frac{7}{2}$.　③

典例 2　已知函数 $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+3}$ 的最大值为 M,最小值为 m,则 $\frac{m}{M}$ 的值为(　　).

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析:显然函数的定义域是$[-3,1]$,　①

故 $y^2=4+2\sqrt{(1-x)(x+3)}=4+2\sqrt{-x^2-2x+3}=4+2\sqrt{-(x+1)^2+4}$,根据根式内的二次函数,可得$4\leq y^2\leq 8$,　②

故$2\leq y\leq 2\sqrt{2}$,即 $m=2, M=2\sqrt{2}$,所以 $\frac{m}{M}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.　③

答案:C

知识要点

1. 最大值

一般地,设函数 $y=f(x)$的定义域为 I,如果存在实数 M 满足:

(1)对于任意的 $x\in I$,都有 $f(x)\leq M$;

(2)存在 $x_0\in I$,使得 $f(x_0)=M$.

那么,我们称 M 是函数 $y=f(x)$的最大值.

2. 最小值

一般地,设函数 $y=f(x)$的定义域为 I,如果存在实数 M 满足:

(1)对于任意的 $x\in I$,都有 $f(x)\geq M$;

(2)存在 $x_0\in I$,使得 $f(x_0)=M$.

那么,我们称 M 是函数 $y=f(x)$的最小值.

最大值和最小值统称为最值.

3. 求函数最大(小)值的常用方法

(1)数形结合法:对于图形较容易画出的函数的最值问题可借助图象直观求出.

(2)配方法:主要适用于二次函数或可化为二次函数的函数,要特别注意自变量的范围.

(3)单调性法:若函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上是单调增(减)函数,则函数 $f(x)$在$[a,b]$上的最小(大)值为 $f(a)$,最大(小)值为 $f(b)$.

模板演练

➡ 答案详见 P380

1. 函数 $f(x)=x^2-2ax+a$在区间$(-\infty,1)$上有最小值,则函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$在区间$(1,+\infty)$上一定(　　).

A. 有最小值　　B. 有最大值

C. 是减函数　　D. 是增函数

2. 若函数 $f(x)$在$[m,n]$上是单调函数,则函数 $f(x)$在$[m,n]$的最大值与最小值之差为______.

3. 函数 $f(x)=-x^2+2x+3\ (x\in[0,3])$的最大值为________,最小值为________.

4. 已知函数 $f(x)=kx^2+2kx+1$ 在$[-3,2]$上的最大值为 4,则实数 k 的值为________.

最精确和最不精确的圆周率(一)　1897 年印第安纳议会,将圆周率规定为 4 左右,令人感到滑稽!而精确的圆周率,纪录一直在不断刷新:公元 460 年,祖冲之算得圆周率为 3.141 592 6,这个精确度保持了一千多年的世界纪录. 1873 年,沈克士算得了 707 位的圆周率,1946 年又提高到 808 位. 以上都是人工计算.



模板 14　函数的奇偶性问题【5年46考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(辽宁高考)若函数 $y=(x+1)(x-a)$为偶函数,则 $a=($　　$)$. A. -2　B. -1　C. 1　D. 2	本模板解决的是"已知含参数的函数 $f(x)$是奇(或偶)函数,求其中参数的值"的问题.
解析:$\because f(x)=(x+1)(x-a)$为偶函数, $\therefore f(-x)=(-x+1)(-x-a)=f(x)$恒成立, 即 $x^2+(a-1)x-a=x^2-(a-1)x-a$ 恒成立. $\therefore a-1=0,\therefore a=1$. **答案:**C	第一步　将解析式代入 $f(-x)=f(x)$. 第二步　得到关于 a 的方程. 第三步　解出 a 的值.

模板攻略

1. 模板解决思路

函数 $f(x)$是奇(偶)函数$\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)(f(-x)=f(x))$,将含参数的函数根据奇偶函数的定义和已知条件得关于参数的方程,解之可得参数的值.

2. 模板解决步骤

①第一步　代入奇(偶)函数成立的条件.

②第二步　得到关于参数的方程.

③第三步　解方程,求得参数的值.

3. 典型例题

典例 1　(辽宁高考)若函数 $f(x)=\dfrac{x}{(2x+1)(x-a)}$为奇函数,则 $a=($　　$)$.

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{2}{3}$　C. $\frac{3}{4}$　D. 1

解析:方法一:由题意知 $f(-x)=-f(x)$恒成立,即

$$\frac{-x}{2\left(-x+\frac{1}{2}\right)(-x-a)}=\frac{-x}{2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-a)},$$ ①

即 $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+a)=\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-a)$恒成立,所以 $a=\frac{1}{2}$,故选 A. ②~③

方法二:因为 $f(x)$的定义域为 $\left\{x \mid x\neq-\frac{1}{2}\text{ 且 }x\neq a\right\}$,又因为奇函数定义域关于原点对称,所以 $a=\frac{1}{2}$.

答案:A

典例 2　(浙江高考)若函数 $f(x)=x^2-|x+a|$为偶函数,则实数 $a=$________.

解析:方法一:$\because f(-x)=f(x)$对于 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,

$\therefore |-x+a|=|x+a|$对于 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立, ①

两边平方整理得 $ax=0$ 对于 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,故 $a=0$.

方法二:由 $f(-1)=f(1)$,得 $|a-1|=|a+1|$,解得 $a=0$. ②~③

答案:0

知识要点

1. 函数的奇偶性

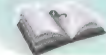
(1)偶函数

一般地,如果对于函数 $f(x)$的定义域内任意一个 x,都有 $f(-x)=f(x)$,那么函数 $f(x)$就叫作偶函数.

(2)奇函数

一般地,如果对于函数 $f(x)$的定义域内任意一个 x,都有 $f(-x)=-f(x)$,那么函数 $f(x)$就叫作奇

凯尔微博



最精确和最不精确的圆周率(二)　20 世纪 50 年代,人们用计算机算得了 10 万位小数的圆周率,70 年代又刷新到 150 万位. 1987 年 1 月 13 日,日本的金田康正,算出了 133 544 000 位小数的圆周率!印出的数字占两万页!1990 年,最新结果:4.8 万亿位.

函数.

函数定义域关于原点对称是函数具有奇偶性的必要条件. 首先看函数的定义域是否关于原点对称,若不对称,则函数是非奇非偶函数. 若对称,(1)再根据定义判定;(2)由 $f(-x)\pm f(x)=0$ 或 $\frac{f(x)}{f(-x)}=\pm1$ 来判定;(3)利用定理,或借助函数的图象判定.

2. 函数奇偶性的性质

(1)具有奇偶性的函数,其定义域关于原点对称.

(2)两个奇偶函数四则运算的性质

①两个奇函数的和仍为奇函数;

②两个偶函数的和仍为偶函数;

③两个奇函数的积是偶函数;

④两个偶函数的积是偶函数;

⑤一个奇函数与一个偶函数的积是奇函数.

注:上面所说的函数都定义在同一个关于原点对称的定义域上.

(3)函数 $f(x)$ 是奇函数⇔曲线 $y=f(x)$ 关于原点对称.

函数 $f(x)$ 是偶函数⇔曲线 $y=f(x)$ 关于 y 轴对称.

(4)如果一个奇函数在 $x=0$ 处有定义,则 $f(0)=0$.

(5)如果一个函数 $y=f(x)$ 既是奇函数又是偶函数,则 $f(x)=0$.

(6)若函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称,则 $f(x)$ 可以表示成 $f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ 的形式,该式的特点是:右端为一个奇函数和一个偶函数的和.

模板演练

➡ 答案详见 P380

1. (山东高考)设 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数. 当 $x\geqslant0$ 时,$f(x)=2^x+2x+b$(b 为常数),则 $f(-1)=$(　　).

A. -3　　B. -1　　C. 1　　D. 3

2. (湖北高考)已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 和偶函数 $g(x)$ 满足 $f(x)+g(x)=a^x-a^{-x}+2$($a>0$,且 $a\neq1$). 若 $g(2)=a$,则 $f(2)=$(　　).

A. 2　　B. $\frac{15}{4}$　　C. $\frac{17}{4}$　　D. a^2

3. 函数 $f(x)=ax^2+bx+2a-b$ 是定义在 $[a-1,2a]$ 上的偶函数,则 $a+b=$(　　).

A. $-\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. 0　　D. 1

4. (上海高考)若函数 $f(x)=(x+a)(bx+2a)$(常数 $a,b\in\mathbf{R}$)是偶函数,且它的值域为 $(-\infty,4]$,则该函数的解析式 $f(x)=$________.

5. (重庆高考)若 $f(x)=(x+a)(x-4)$ 为偶函数,则实数 $a=$________.

6. 若 $f(x)=(k-2)x^2+(k-3)x+3$ 是偶函数,则 $f(x)$ 的递减区间是________.

7. 设 $f(x)=\frac{ax^2+1}{bx+c}$ 是奇函数($a,b,c\in\mathbf{Z}$)且 $f(1)=2$,$f(2)<3$,求 a,b,c 的值.

学数学没有捷径可走——阿基米德的故事(一)　古希腊的阿基米德不仅是一位卓越的科学家,而且是一个很好的老师,他生前培养过许多学生,在这些学生中有一个特别的人物,他就是希腊国王多禄米. 闲着没事的多禄米,有一天忽然心血来潮想学一点儿东西. 当时,阿基米德已是一位十分著名的科学家了. 多禄米想了想,决定把阿基米德请来,拜他为师,学习一点几何知识.

凯尔微博



模板 15　解函数不等式 [5年12考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(辽宁高考)已知偶函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调增加,则满足 $f(2x-1)<f\left(\frac{1}{3}\right)$ 的 x 的取值范围是(　　). A. $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$　B. $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$　C. $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$　D. $\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$	本模板解决的是"已知函数 $f(x)$ 在某个区间上的单调性和奇偶性等相关性质,来解函数不等式的解集"的问题.
解析:$\because f(x)$ 是偶函数, $\therefore f(2x-1)<f\left(\frac{1}{3}\right)$ 即为 $f(\|2x-1\|)<f\left(\frac{1}{3}\right)$. 又 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增,$\therefore \|2x-1\|<\frac{1}{3}$, 解得 $\frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}$. 故选 A. **答案**:A	第一步　把 $f(2x-1)<f\left(\frac{1}{3}\right)$ 转化为 $f(\|2x-1\|)<f\left(\frac{1}{3}\right)$. 第二步　利用 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上递增 $\Rightarrow \|2x-1\|<\frac{1}{3}$. 第三步　解不等式即可.

模板攻略

1. 模板解决思路

解与函数有关的不等式问题,常利用奇函数在对称单调区间上有相同的单调性,偶函数在对称单调区间上有相反的单调性,利用题目已知条件,转化为不等式问题来求解,而解有关抽象函数不等式问题,也是充分利用函数的奇偶性和单调性求解.

2. 模板解决步骤

1 第一步　观察函数不等式的形式,将函数不等式转化为 $f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b)$ 的形式.

2 第二步　根据奇偶性、单调性及其他已知条件,将 $f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b)$ 转化同一单调区间上的普通不等式.

3 第三步　解不等式,求出相应的解集.

3. 典型例题

典例 1　设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是偶函数,在区间 $(-\infty,0)$ 上递增,且有 $f(2a^2+a+1)<f(3a^2-2a+1)$,求 a 的取值范围.

解:由 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是偶函数,在区间 $(-\infty,0)$ 上递增知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递减.

$\because 2a^2+a+1=2\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0$,

$3a^2-2a+1=3\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$

且 $f(2a^2+a+1)<f(3a^2-2a+1)$,　1

$\therefore 2a^2+a+1>3a^2-2a+1$,　2

即 $a^2-3a<0$,

解得 $0<a<3$.　3

典例 2　已知函数 $f(x)$ 是偶函数,其定义域为 $(-1,1)$,且在 $[0,1)$ 上为增函数,若 $f(a-2)-f(4-a^2)<0$,试求 a 的取值范围.

解:$\because f(a-2)-f(4-a^2)<0$,

$\therefore f(a-2)<f(4-a^2)$,　1

又 $\because f(x)$ 为偶函数,$\therefore f(x)=f(|x|)$.

凯尔微博



学数学没有捷径可走——阿基米德的故事(二)　接到国王召见,阿基米德急忙来到了皇宫,这里金碧辉煌,白玉大理石铺成的透明地板,雕龙刻虎的巨大梁柱,把整座宫殿装扮得格外豪华. 阿基米德一边欣赏着宫殿中的装饰,心中一边想,这些宏伟建筑不知凝结了多少科学家和劳动人民的智慧和心血,尤其是那些精巧的设计,无不反映出建造者们在数学、特别是几何学方面很深的造诣.

$\therefore f(|a-2|)<f(|4-a^2|)$.

又 $\because f(x)$ 在 $[0,1)$ 上为增函数，$\therefore f(x)$ 在 $(-1,0]$ 上为减函数.

$\therefore 0\leqslant |a-2|<1, 0\leqslant |4-a^2|<1, |a-2|<|4-a^2|$，

即 $|a-2|<1, |4-a^2|<1, 1<|2+a|, a\neq 2$. ②

解得 $\sqrt{3}<a<2$ 或 $2<a<\sqrt{5}$.

因此实数 a 的取值范围是 $(\sqrt{3},2)\cup(2,\sqrt{5})$. ③

模板演练

➡ 答案详见 P381

1. (天津高考)已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+4x, x\geqslant 0,\\ 4x-x^2, x<0,\end{cases}$ 若 $f(2-a^2)>f(a)$，则实数 a 的取值范围是(　　).

A. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$　B. $(-1,2)$

C. $(-2,1)$　D. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

2. 已知 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数,则满足 $f\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right)<f(1)$ 的实数 x 的取值范围是(　　).

A. $(-1,1)$　B. $(0,1)$

C. $(-1,0)\cup(0,1)$　D. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

3. 已知函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，$A(0,-1)$，$B(3,1)$ 是其图象上的两点，那么 $|f(x+1)|<1$ 的解集的补集是(　　).

A. $(-1,2)$　B. $(1,4)$

C. $(-\infty,-1]\cup[4,+\infty)$　D. $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$

4. (新课标全国高考)设奇函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，且 $f(1)=0$，则不等式 $\frac{f(x)-f(-x)}{x}<0$ 的解集为(　　).

A. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$　B. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

C. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　D. $(-1,0)\cup(0,1)$

5. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，且 $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$.

(1)求 $f(1)$；

(2)证明：$f(x)$ 在定义域上是增函数；

(3)如果 $f\left(\frac{1}{3}\right)=-1$，求满足不等式 $f(x)-f\left(\frac{1}{x-2}\right)\geqslant 2$ 的 x 的取值范围.

模板 16　抽象函数的函数值问题 【5年8考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(湖北高考)已知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数，且满足 $f(x+4)=f(x)$，$x\in(0,2)$ 时，$f(x)=2x^2$，则 $f(7)=$(　　). A. -2　B. 2　C. -98　D. 98	本模板解决的是“已知抽象函数满足条件 p，在不能求出抽象函数的解析式时，求特殊函数值”的问题.
解析： $\because f(x+4)=f(x)$，$\therefore f(x)$ 是周期为 4 的函数， $\therefore f(7)=f(2\times4-1)=f(-1)$. 又 $\because f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数，$\therefore f(-x)=-f(x)$， $\therefore f(-1)=-f(1)$，而当 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)=2x^2$， $\therefore f(1)=2\times1^2=2$， $\therefore f(7)=f(-1)=-f(1)=-2$，故选 A. **答案：** A	第一步　把 $f(7)$ 用 $f(-1)$ 表示出来. 第二步　由 $f(x)$ 是奇函数得 $f(-1)=-f(-1)$. 第三步　求出 $f(1)$ 的值，由 $f(7)=f(-1)=-f(1)$，得出 $f(7)$ 的值.

学数学没有捷径可走——阿基米德的故事(三)　从此以后，阿基米德就当上了国王的私人数学教师. 刚开始上几何课时，国王挺认真，似乎下了决心要学好这门课. 可是，时间一长多禄米的兴趣逐渐往下落了，尽管阿基米德讲授的几何学内容都很浅显，但对于不爱学习的国王而言，一堂课的时间简直比一年还长，他日益显出不耐烦的情绪.

模板攻略

1. 模板解决思路

对于求抽象函数的函数值问题，我们首先考虑是否能将抽象函数的解析式求出来，若不能求出解析式，一般是求出递推式，然后再求出特殊值的函数值，然后利用递推式和特殊值的函数值求出要求的函数值.

2. 模板解决步骤

1 第一步　利用条件，求出函数值的递推式或关系式.

2 第二步　利用递推式或关系式将问题转化为一个较小的或易求的函数值的问题，并求出这个函数值.

3 第三步　将这个函数值代入递推式或关系式，求出要求的函数值.

3. 典型例题

典例 1　(四川高考)已知函数 $f(x)$ 是定义在实数集 **R** 上的不恒为零的偶函数，且对任意实数 x 都有 $xf(x+1)=(1+x)f(x)$，则 $f\left[f\left(\frac{5}{2}\right)\right]$ 的值是(　　).

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. $\frac{5}{2}$

思路分析：想求 $f\left[f\left(\frac{5}{2}\right)\right]$，应先求 $f\left(\frac{5}{2}\right)$，按照模板方法，应先找到递推式或关系式，然后求出较小的函数值代入即可.

解析：由题意，$f(x+1)=\left(1+\frac{1}{x}\right)f(x)$，　1

所以 $f\left(\frac{5}{2}\right)=\left(1+\frac{2}{3}\right)f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{3}f\left(\frac{3}{2}\right)=5f\left(\frac{1}{2}\right)$.

又 $f\left(\frac{1}{2}\right)=(1-2)f\left(-\frac{1}{2}\right)=-f\left(-\frac{1}{2}\right)$，

同时，$f(x)$ 为偶函数，则 $f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=0$，$\therefore f\left(\frac{5}{2}\right)=0$，　2

又 $0\cdot f(1)=1\cdot f(0)$，即 $f(0)=0$，

$\therefore f\left[f\left(\frac{5}{2}\right)\right]=f(0)=0$.　3

答案：A

典例 2　已知函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=\frac{1}{4}$，$4f(x)f(y)=f(x+y)+f(x-y)(x,y\in\mathbf{R})$，则 $f(2\ 014)=$________.

解析：令 $x=n$，$y=1$，得 $f(n)=f(n+1)+f(n-1)$，

同理，$f(n+1)=f(n+2)+f(n)$，

联立上两式，得 $f(n+2)=-f(n-1)$，

即 $f(n+3)=-f(n)$，$f(n+6)=f(n)$.　1

又 $f(1)=\frac{1}{4}$，且 $f(4)=-f(1)=-\frac{1}{4}$，　2

所以 $f(2\ 014)=f(335\times6+4)=f(4)=-\frac{1}{4}$.　3

答案：$-\frac{1}{4}$

模板演练

➜ 答案详见 P381

1. (辽宁高考)设 $f(x)$ 是连续的偶函数，且当 $x>0$ 时是单调函数，则满足 $f(x)=f\left(\frac{x+3}{x+4}\right)$ 的所有 x 之和为(　　).

A. -3　　B. 3　　C. -8　　D. 8

2. (上海高考)已知 $y=f(x)$ 是奇函数. 若 $g(x)=f(x)+2$ 且 $g(1)=1$，则 $g(-1)=$______.

3. 已知 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)=f(x)+9$，$g(-2)=3$，则 $f(2)=$______.

4. 若 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数，$f(1)=2$，且 $f(x+1)=f(x+6)$，那么 $f(10)+f(4)=$______.

5. 若 $f(x)$ 是偶函数，则 $f(1+\sqrt{2})-f\left(\frac{1}{1-\sqrt{2}}\right)=$______.



学数学没有捷径可走——阿基米德的故事(四)　对于国王情绪的变化，阿基米德看到眼里，记在心中，他仍然一如既往地认真讲课. 他细心而又耐心地向多禄米讲解着各种几何的图形、原理以及计算方法. 可是多禄米对眼前出现的一个个三角形、正方形、菱形的图案毫无兴趣，有点昏昏欲睡了. 阿基米德来到多禄米的身边，用手推推他.

第二章 基本初等函数(Ⅰ)

模板 1 比较数的大小 [5年18考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(天津高考)已知 $a=5^{\log_2 3.4}$, $b=5^{\log_4 3.6}$, $c=\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_3 0.3}$, 则(　　). A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$ C. $a>c>b$　　D. $c>a>b$	本模板解决的是"已知几个指数或对数形式的数,比较它们的大小"的问题.
解析:$\because -\log_3 0.3=\log_3\frac{10}{3}>1$, 且 $\frac{10}{3}<3.4$, $\therefore \log_3\frac{10}{3}<\log_3 3.4<\log_2 3.4$. $\because \log_4 3.6<1$, $\log_3\frac{10}{3}>1$, $\therefore \log_4 3.6<\log_3\frac{10}{3}$. $\because y=5^x$ 为增函数, $\therefore 5^{\log_2 3.4}>5^{\log_3\frac{10}{3}}>5^{\log_4 3.6}$, 即 $5^{\log_2 3.4}>\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_3 0.3}>5^{\log_4 3.6}$, 故 $a>c>b$. **答案**:C	第一步　先将 c 化成 5 为底数的,然后比较各指数. 第二步　得出各指数的大小比较结果. 第三步　得出同底数的数的大小比较结果. 第四步　得出 a,b,c 的大小比较结果.

模板攻略

1. 模板解决思路

两个数的大小比较,有作差法、作商法或利用函数单调性等方法. 而对于多个数的大小比较,一般是先将这些数与 0,1 进行比较,然后分为几类,在每一类中,将数化为相同形式,然后利用两个数的大小比较的方法两两进行比较.

2. 模板解决步骤

1 第一步　先将它们与 0,1 进行比较,然后以 0,1 为界分成几类.

2 第二步　在每一类中,观察几个数的形式,对于指数形式的数,要求底数相同或指数相同,若是对数,要求底数相同,利用幂函数,指数函数或对数函数的单调性进行比较大小.

3 第三步　若不易直接比较,可利用作商法,作差法或找到中间值进行比较.

4 第四步　将几类合并成一类,给出大小顺序.

3. 典型例题

典例 1　(全国高考)设 $a=\log_3\pi$, $b=\log_2\sqrt{3}$, $c=\log_3\sqrt{2}$, 则(　　).

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $b>a>c$　　D. $b>c>a$

解析:因为当 $a>1$ 时,对数函数 $y=\log_a x$ 为单调增函数,所以 $a=\log_3\pi>\log_3 3=1$.　1

学数学没有捷径可走——阿基米德的故事(五)　这位国王勉强睁开惺忪的睡眼,没等阿基米德说话,他反而先问:"请问,到底有没有比你的方法更简捷一些的学习几何学的方法? 用你这种方法实在太难学了."听了国王的问题,阿基米德思考着,冷静地回答道:"陛下,乡下有两种道路,一条是供老百姓走的乡村小路,一条是供皇家贵族走的宽阔坦途,请问陛下走的是哪一条道路呢? "



因为 $b=\log_2\sqrt{3}=\frac{1}{2}\log_2 3$，

又 $1=\log_2 2<\log_2 3<\log_2 4=2$，

所以 $\frac{1}{2}<b<1$.

又 $c=\log_3\sqrt{2}=\frac{1}{2}\log_3 2<\frac{1}{2}\log_3 3=\frac{1}{2}$. ③

故 $c<\frac{1}{2}<b<1<a$. 故选 A. ④

答案：A

典例 2　将下列各数从小到大排列起来.

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$，$\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$，$3^{\frac{2}{3}}$，$\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$，$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$，$\left(\frac{5}{6}\right)^{0}$，$(-2)^3$，$\left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

思路分析：先按 0，1 分类，然后每类进行比较.

解：$(-2)^3<0$，$\left(\frac{5}{6}\right)^0=1$，$\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}>1$，$3^{\frac{2}{3}}>1$，$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}>1$，

$0<\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}<1$，$0<\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}<1$，$0<\left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}<1$. ①

$\because \dfrac{3^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}}=2^{\frac{2}{3}}>1$，$\therefore 3^{\frac{2}{3}}>\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}>\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

$\therefore \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}<\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}<3^{\frac{2}{3}}$. ②~③

同理，$\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$，

$\therefore (-2)^3<\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}}<\left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}<\left(\frac{5}{6}\right)^{0}<\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}<\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}<3^{\frac{2}{3}}$. ④

知识要点

1. 有理数指数幂的性质

(1) $a^ra^s=a^{r+s}(a>0,r,s\in\mathbf{Q})$.

(2) $(a^r)^s=a^{rs}(a>0,r,s\in\mathbf{Q})$.

(3) $(ab)^r=a^rb^r(a>0,b>0,r\in\mathbf{Q})$.

(4) $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha=\frac{a^\alpha}{b^\alpha}(a>0,b>0,\alpha\in\mathbf{Q})$.

2. 指数式的大小比较

(1)底数相同、指数不同：利用指数函数的单调性解决.

(2)底数不同、指数相同：利用指数函数的图象解决. 在同一平面直角坐标系中画出各个函数的图象，依据底数 a 对指数函数图象的影响，按照逆时针方向观察，底数在逐渐增大，然后观察指数所取值对应的函数值即可.

(3)底数不同、指数也不同：采用介值法（中间量法）. 取中间量 1，其中一个大于 1，另一个小于 1；或者以其中一个指数式的底数为底数，以另一个指数式的指数为指数. 例如，要比较 a^c 与 b^d 的大小，可取 a^d 为中间量，a^c 与 a^d 利用函数的单调性比较大小，b^d 与 a^d 利用函数的图象比较大小.

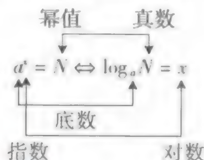
3. 对数的定义

(1)定义：一般地，如果 $a^x=N(a>0$，且 $a\neq1)$，那么数 x 叫作以 a 为底 N 的对数，记作 $x=\log_aN$，其中 a 叫作对数的底数，N 叫作真数.

(2)指数式与对数式的互化

根据对数的定义，可以得到对数与指数间的关系：

当 $a>0$，$a\neq1$ 时，$a^x=N\Leftrightarrow x=\log_aN$. 用图表示为：



4. 对数的性质

(1)负数与零没有对数.

(2) 1 的对数等于 0，即 $\log_a1=0$.

(3)底数的对数等于 1，即 $\log_aa=1$.

5. 对数恒等式

$\log_aa^x=x(a>0,a\neq1)$.

$a^{\log_aN}=N(a>0,a\neq1,N>0)$.



凯尔微博

学数学没有捷径可走——阿基米德的故事(六)　“当然是皇家的坦途呀！”多禄米回答得十分干脆，但又感到茫然不解. 阿基米德继续说：“不错，您当然是走皇家的坦途，但那是因为您是国王的缘故. 可现在，您是一名学生. 要知道，在几何学里，无论是国王还是百姓，无论是老师还是学生，大家只能走同一条路. 因为，走向学问是没有什么皇家大道的.”

6. 对数的运算法则

如果 $a>0, a\neq 1, M>0, N>0$，那么：

(1)$\log_a(M\cdot N)=\log_a M+\log_a N$.

(2)$\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$.

(3)$\log_a M^n=n\log_a M$.

(1)真数的取值范围是$(0,+\infty)$.

(2)对公式容易错误记忆，要特别注意：

$\log_a(MN)=\log_a M\cdot\log_a N$，$\log_a(M\pm N)=\log_a M\pm\log_a N$ 一般不成立.

7. 自然对数和常用对数

(1)以 10 为底的对数叫作常用对数，记作 $\log_{10}N$，简记为$\lg N$.

(2)以 e 为底的对数叫作自然对数，e=2.718 28…是无理数，记作 $\log_e N$，简记为 $\ln N$.

8. 换底公式及其推论

设 $a>0, a\neq 1, b>0, b\neq 1, m>0$，则

$$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}=\frac{\ln N}{\ln a}=\frac{\lg N}{\lg a}.$$

推论：(1)$\log_a b\cdot\log_b a=1$；

(2)$\log_{a^m} b^m=\log_a b$，$\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$；

(3)$\log_a m\cdot\log_b n=\log_a n\cdot\log_b m\,(n>0)$；

(4)$a^{\log_c b}=b^{\log_c a}\,(c>0, c\neq 1)$.

9. 对数式的大小比较

(1)若底数为同一常数，则可由对数函数的单调性直接进行比较.

(2)若底数为同一字母，则根据底数对对数函数单调性的影响，对底数进行分类讨论.

(3)若底数不同，真数相同，则可以先用换底公式化为同底后，再进行比较，也可以利用顺时针方向底数增大画出对数函数的图象，再进行比较.

(4)若底数与真数都不同，则常借助 1，0 等中间量进行比较.

模板演练

➡ 答案详见 P382

1. (全国高考)已知 $x=\ln\pi$，$y=\log_5 2$，$z=e^{-\frac{1}{2}}$，则(　　).

A. $x<y<z$　　B. $z<x<y$

C. $z<y<x$　　D. $y<z<x$

2. (重庆高考)$a=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$，$b=\log_{\frac{1}{3}}\frac{2}{3}$，$c=\log_3\frac{4}{3}$，则 a,b,c 的大小关系是(　　).

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$

C. $b<a<c$　　D. $b<c<a$

3. (天津高考)已知 $a=\log_5 4$，$b=(\log_5 3)^2$，$c=\log_4 5$，则(　　).

A. $a<c<b$　　B. $b<c<a$

C. $a<b<c$　　D. $b<a<c$

4. (新课标全国高考)设 $a=\log_3 6$，$b=\log_5 10$，$c=\log_7 14$，则(　　).

A. $c>b>a$　　B. $b>c>a$

C. $a>c>b$　　D. $a>b>c$

5. (全国高考)下列四个数中最大的是(　　)

A. $(\ln 2)^2$　　B. $\ln(\ln 2)$

C. $\ln\sqrt{2}$　　D. $\ln 2$

6. (重庆高考)把下列各数 $2^{\frac{2}{3}}$，$\left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$，$\left(-\frac{2}{3}\right)^3$，$\left(\frac{1}{5}\right)^0$，$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$，按由大到小的顺序排列为(　　).

A. $\left(\frac{1}{5}\right)^0>2^{\frac{2}{3}}>\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}>\left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}>\left(-\frac{2}{3}\right)^3$

B. $2^{\frac{2}{3}}>\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}>\left(\frac{1}{5}\right)^0>\left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}>\left(-\frac{2}{3}\right)^3$

C. $\left(-\frac{2}{3}\right)^3>\left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}>\left(\frac{1}{5}\right)^0>\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}>2^{\frac{2}{3}}$

D. $2^{\frac{2}{3}}>\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}>\left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}>\left(-\frac{2}{3}\right)^3>\left(\frac{1}{5}\right)^0$

学数学没有捷径可走——阿基米德的故事(七)　多禄米旺巴着眼睛思考了一下，总算理解了这番话的含意，于是重新打起精神，听阿基米德讲课. 这个故事说明了一个道理，追求科学知识没有捷径可走，科学知识对任何人都是一视同仁的，正如伟大的革命导师马克思所说："在科学的道路上，是没有平坦的大路可走的，只有在那崎岖小路上攀登的不畏劳苦的人们，才有希望到达光辉的顶点."



模板2 对数式的化简求值 【5年6考】

必修1

模板探究

母题呈现	模板引入
(四川高考)计算$\left(\lg\frac{1}{4}-\lg 25\right)\div 100^{-\frac{1}{2}}=$______.	本模板解决的是“含有对数的代数式的化简求值”的问题.
解析: 原式$=(\lg 2^{-2}-\lg 5^{2})\times 100^{\frac{1}{2}}$ $=\lg\frac{1}{2^{2}\cdot 5^{2}}\times 10$ $=\lg 10^{-2}\times 10$ $=-2\times 10=-20$. **答案:** -20	第一步 将每一项的真数化为最简形式. 第二步 利用$\log_a M-\log_a N=\log_a\frac{M}{N}$将含对数的两项合并. 第三步 化简并计算. 第四步 得出最后结果.

模板攻略

1. 模板解决思路

含有对数的代数式的化简关键是减少含有对数的项的个数，而含对数的项的合并常用对数的性质，因此，化简要朝这个方向进行.

2. 模板解决步骤

1 第一步　观察式子的结构特点.

2 第二步　将易计算的项放在一起进行化简合并.

3 第三步　整体化简计算.

4 第四步　求出最后的结果.

3. 典型例题

典例1　化简:

$2(\lg\sqrt{2})^{2}+\lg\sqrt{2}\cdot\lg 5+\sqrt{(\lg\sqrt{2})^{2}-\lg 2+1}$.

解: 原式=

$\lg\sqrt{2}(2\lg\sqrt{2}+\lg 5)+\sqrt{(\lg\sqrt{2})^{2}-2\lg\sqrt{2}+1}$　1

$=\lg\sqrt{2}(\lg 2+\lg 5)+|\lg\sqrt{2}-1|$　2

$=\lg\sqrt{2}\times\lg(2\times 5)+1-\lg\sqrt{2}$

$=\lg\sqrt{2}+1-\lg\sqrt{2}=1$.　3~4

典例2　已知$\log_{18}9=a$, $18^{b}=5$. 求$\log_{36}45$的值.

解: 方法一: $\because\log_{18}9=a$, $18^{b}=5$, $\therefore\log_{18}5=b$.　1

$\therefore\log_{36}45=\frac{\log_{18}45}{\log_{18}36}=\frac{\log_{18}(9\times 5)}{\log_{18}(18\times 2)}$

$=\frac{\log_{18}9+\log_{18}5}{1+\log_{18}2}$　2

$=\frac{a+b}{1+\log_{18}\frac{18}{9}}=\frac{a+b}{2-\log_{18}9}=\frac{a+b}{2-a}$.　3~4

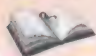
方法二: $\because\log_{18}9=a$, $18^{b}=5$, $\therefore\log_{18}5=b$.　1

$\therefore\log_{36}45=\frac{\log_{18}(9\times 5)}{\log_{18}\frac{18^{2}}{9}}$　2

$=\frac{\log_{18}9+\log_{18}5}{2\log_{18}18-\log_{18}9}$　3

$=\frac{a+b}{2-a}$.　4

凯尔微博



对数和它的发明者(一) 1614年,居住在爱丁堡的一位苏格兰贵族公布了他的一项重要发明,这个消息很快传开了.第二年,经过一些通信联系后,一位数学教授乘坐马车从伦敦出发前往爱丁堡,去会见这位他无比崇敬的天才的苏格兰人.这位数学教授在旅途日记中写道:这个苏格兰人的前额一定很高,因为他的头脑发达,否则难以做出如此惊人的发明.

模板演练

答案详见 P382

1. (四川高考)$2\log_5 10+\log_5 0.25=$(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

2. 计算下列各式的值:

(1)$\log_3(81\sqrt{3})$;

(2)$\dfrac{2\lg(\lg a^{100})}{2+\lg(\lg a)}$;

(3)$\log_6\dfrac{1}{12}-2\log_6 3+\dfrac{1}{3}\log_6 27$.

3. (1)设 $x=\log_2 3$,求 $\dfrac{2^{3x}-2^{-3x}}{2^x-2^{-x}}$ 的值;

(2)已知 $\lg x+\lg y=2\lg(x-2y)$,求 $\log_{\sqrt{2}}\dfrac{x}{y}$ 的值.

4. 设 a,b 为正数,且 $a^2-2ab-9b^2=0$,求 $\lg(a^2+ab-6b^2)-\lg(a^2+4ab+15b^2)$ 的值.

模板3　解指数(对数)方程或不等式 [5年6考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(上海高考)方程 $4^x-2^{x+1}-3=0$ 的解是________.	本模板解决的是"求解含有指数或对数的方程(或不等式)的解"的问题.
解析:根据方程 $4^x-2^{x+1}-3=0$,化简得 $(2^x)^2-2\cdot 2^x-3=0$,令 $2^x=t(t>0)$,则原方程可化为 $t^2-2t-3=0$,解得 $t=3$ 或 $t=-1$(舍),即 $2^x=3$,$x=\log_2 3$.所以原方程的解为 $\log_2 3$. **答案**:$\log_2 3$	第一步　将 4^x,2^{x+1} 都化为 2^x 的形式. 第二步　令 $2^x=t$,换元得 $t^2-2t-3=0$. 第三步　求出 t 的解. 第四步　代入 $2^x=t$,求出 x 的值.

对数和它的发明者(二)　由于意外的事故,教授在路上延误了时间,正在爱丁堡焦急等待的苏格兰贵族终于失望了,他向一位朋友抱怨道:"教授不会来了."可就在这时,教授出现在他的面前.他们在沉默中相互凝视了达一刻钟之久.后来,教授说:"阁下,我经历了长途跋涉专程来看你,就是想要知道你有怎样聪明的头脑,能使得你首先想出这一极好发明."



模板攻略

1. 模板解决思路

解决这类问题一般都是利用换元，将指数（对数）方程（或不等式）转化为常见的方程（或不等式）进行求解．而进行换元首先要将出现的指数（对数）在不同项的形式转化成统一的，然后进行换元．

2. 模板解决步骤

1 第一步　将不同项里出现的指数（对数）化成统一形式．

2 第二步　换元，将指数（对数）方程（或不等式）化成常见的方程（或不等式）形式．

3 第三步　解方程，得出常见方程（或不等式）形式中的解．

4 第四步　代入还原，求出对数（指数）的值（或取值范围），进一步求出未知数的值（或取值范围）．

3. 典型例题

典例 1　解不等式：$\log_2(2^x-1)\cdot\log_2(2^{x+1}-2)<2$．

解：原不等式可化为：

$\log_2(2^x-1)\cdot\log_2 2(2^x-1)<2$，

即 $\log_2(2^x-1)\cdot[\log_2(2^x-1)+1]<2$，　1

令 $\log_2(2^x-1)=t$，则 $t(t+1)<2$，　2

即 $t^2+t-2<0$，解得 $-2<t<1$．　3

即 $-2<\log_2(2^x-1)<1$．$\therefore\frac{1}{4}<2^x-1<2$，$\therefore\frac{5}{4}<2^x<3$．

解得 $\log_2\frac{5}{4}<x<\log_2 3$．　4

$\therefore$ 不等式的解集为 $\left\{x\left|\log_2\frac{5}{4}<x<\log_2 3\right.\right\}$．

典例 2　解方程：$\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)^2+\log_2 x=0$．

解：原方程可化为 $(\log_2 x)^2+\log_2 x=0$，　1

令 $\log_2 x=t$，得 $t^2+t=0$，　2

解得 $t=0$ 或 $t=-1$．　3

当 $t=0$ 时，$\log_2 x=0$，解得 $x=1$．

当 $t=-1$ 时，$\log_2 x=-1$，解得 $x=\frac{1}{2}$．　4

> 误区警示
>
> $\log_2 x=-1$ 是有解的，对数函数的定义域为 $(0,+\infty)$，而值域则是 $(-\infty,+\infty)$，不要想当然地舍掉，导致丢解．

模板演练

➡ 答案详见 P383

1.（上海高考）方程 $9^x-6\cdot3^x-7=0$ 的解是______．

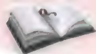
2. 已知函数 $f(x)=2^x-\frac{1}{2^{|x|}}$，若 $f(x)=2$，求 x 的值．

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}3^x+1, & x\leq 1,\\ -x, & x>1.\end{cases}$ 若 $f(x)=2$，求 x 的值．

4. 解方程：$\log_5(\log_2 x)=0$．

5. 解关于 x 的不等式：$(\log_a x)^2-m\log_a x<0$（$a>0$ 且 $a\neq1$，$m\in\mathbf{R}$）．

凯尔微博



对数和它的发明者（三）　“阁下，你发现了它，现在看来很容易的，但是我很奇怪，在此之前为什么没有人能够发现它呢？”这位教授作为贵宾在贵族的城堡里滞留了一个月之久．这位苏格兰贵族就是梅尔契斯顿堡的纳皮尔，去访问他的数学家就是伦敦格雷舍姆学院的几何学教授布里格斯，那项重要的发明就是“对数”——它无疑是数学史上的一个里程碑．

模板4　指数函数、对数函数、幂函数的性质【5年16考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(江苏高考)函数 $f(x)=\log_5(2x+1)$ 的单调增区间是______.	本模板解决的是"求与指数函数、对数函数或幂函数相关的函数的定义域、值域或单调性等"的相关问题.
解析: 依题意,函数 $f(x)$ 的定义域需满足 $2x+1>0$,即 $x\in\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$,令 $u=2x+1\left(x>-\frac{1}{2}\right)$,显然 $u=2x+1$ 在 $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上为单调递增函数,而 $y=\log_5 u$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,由复合函数单调性,知 $y=\log_5(2x+1)$ 在 $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增. **答案:** $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$	第一步　确定函数的定义域及复合函数的内外函数. 第二步　讨论内外函数的单调性. 第三步　得出复合函数的单调性,进一步得单调增区间.

模板攻略

1. 模板解决思路

解此类问题的关键是搞清楚复合函数的复合方式,即内函数与外函数分别是什么,它们分别对整体函数有什么影响,据此列出不等式(组)后求出自变量的范围即可.

2. 模板解决步骤

1 第一步　确定函数的复合方式.

2 第二步　根据函数的复合方式,结合已知条件列出对应的不等式(组).

3 第三步　解不等式(组),求得定义域、值域或单调区间.

3. 典型例题

典例1　(江西高考)若 $f(x)=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)}$,则 $f(x)$ 的定义域为(　　).

A. $\left(-\frac{1}{2},0\right)$　　B. $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$

C. $\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup(0,+\infty)$　　D. $\left(-\frac{1}{2},2\right)$

解析: 解不等式组 $\begin{cases}2x+1\neq 1,\\2x+1>0\end{cases}$ 即可,　1~2

所求为 $\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup(0,+\infty)$,故选C.　3

答案: C

典例2　已知 $f(x)=\log_4(4^x-1)$.

(1)求 $f(x)$ 的定义域;(2)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(3)求 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上的值域.

解: (1)由 $4^x-1>0$,解得 $x>0$,　1~2

因此 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.　3

(2)设 $0<x_1<x_2$,则 $0<4^{x_1}-1<4^{x_2}-1$,　1~2

因此 $\log_4(4^{x_1}-1)<\log_4(4^{x_2}-1)$,即 $f(x_1)<f(x_2)$,

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增.　3

(3)由(2)知 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上递增,

又 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$,$f(2)=\log_4 15$,　1~2

因此 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},2\right]$ 上的值域为 $[0,\log_4 15]$.　3

对数和它的发明者(四)　现在我们知道,对数作为一种计算方法主要在于:通过对数,可以把乘除运算化为较简单的加减运算.这种化简的原始思想,在三角公式 $\sin A\sin B=1/2[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$ 中已见端倪,而这个公式在纳皮尔时代已为人们所熟知,纳皮尔的思路很可能就是从这个公式出发的,否则就很难解释为什么最初他仅限于研究角的正弦的对数.

凯尔微博



必修1

知识要点

1. 指数函数的图象和性质

$y=a^x$	$0<a<1$	$a>1$
图象		
定义域	R	
值域	$(0,+\infty)$	
性质	(1)过定点$(0,1)$,即$x=0$时,$y=1$	
	(2)在R上是减函数	(2)在R上是增函数

2. 对数函数的图象和性质

$y=\log_a x$	$0<a<1$	$a>1$
图象		
定义域	$(0,+\infty)$	
值域	R	
性质	(1)过定点$(1,0)$,即$x=1$时,$y=0$	
	(2)在$(0,+\infty)$上是减函数	(2)在$(0,+\infty)$上是增函数

3. 几种常见幂函数的图象与性质

函数	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$y=\frac{1}{x}$
图象					
定义域	R	R	R	$[0,+\infty)$	$\{x\mid x\neq 0\}$
值域	R	$[0,+\infty)$	R	$[0,+\infty)$	$\{y\mid y\neq 0\}$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	非奇非偶函数	奇函数
单调性	增函数	在$(-\infty,0]$上单调递减,在$[0,+\infty)$上单调递增	增函数	增函数	在$(-\infty,0)$上单调递减,在$(0,+\infty)$上单调递减
定点	$(0,0),(1,1)$				$(1,1)$

模板演练

➡ 答案详见P383

1. (江西高考)函数$y=\sqrt{x}\ln(1-x)$的定义域为(　　).

A. $(0,1)$　B. $[0,1)$　C. $(0,1]$　D. $[0,1]$

2. (广东高考)函数$y=\frac{\lg(x+1)}{x-1}$的定义域为(　　).

A. $(-1,+\infty)$　B. $[-1,+\infty)$

C. $(-1,1)\cup(1,+\infty)$　D. $[-1,1)\cup(1,+\infty)$

3. (山东高考)函数$f(x)=\sqrt{1-2^x}+\frac{1}{\sqrt{x+3}}$的定义域为(　　).

A. $(-3,0]$　B. $(-3,1]$

C. $(-\infty,-3)\cup(-3,0]$　D. $(-\infty,-3)\cup(-3,1]$

4. (陕西高考)设全集为R,函数$f(x)=\sqrt{1-x}$的定义域为M,则$\complement_{\mathbf{R}}M$为(　　).

A. $(-\infty,1)$　B. $(1,+\infty)$

C. $(-\infty,1]$　D. $[1,+\infty)$

5. (重庆高考)$\sqrt{(3-a)(a+6)}\ (-6\leqslant a\leqslant 3)$的最大值为(　　).

A. 9　B. $\frac{9}{2}$　C. 3　D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

凯尔微博

对数和它的发明者(五) 纳皮尔潜心研究他的理论20余年,于1614年在一本题为《奇妙的对数定律说明》的小册子中,发表了他关于对数的讨论,并给出了以弧分为间隔的角的正弦的纳皮尔对数表.这部著作立即引起了人们的广泛兴趣.

模板5　求参数的值或取值范围 [5年25考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(重庆高考)若函数$f(x)=\sqrt{2^{x^2+2ax-a}-1}$的定义域为**R**,则$a$的取值范围为_______.	本模板解决的是"已知函数$f(x)$满足条件p,求参数的值或取值范围"的问题.
解析:由题意知$2^{x^2+2ax-a}-1\geqslant 0$恒成立, 即$x^2+2ax-a\geqslant 0$恒成立, 其等价于$\Delta=4a^2+4a\leqslant 0\Rightarrow -1\leqslant a\leqslant 0$. **答案**:$[-1,0]$	第一步　由定义域为**R**列不等式. 第二步　将含指数函数的不等式转化为普通不等式,即转化为判别式问题. 第三步　解不等式,得a的取值范围.

模板攻略

1. 模板解决思路

求参数的值或取值范围的关键是得到关于参数的方程(组)或不等式(组),而得到关于参数的方程(组)或不等式(组)则必须利用条件p,因此将条件p转化为关于参数的条件是解决此类问题的关键.

2. 模板解决步骤

1 第一步　将条件p转化为关于参数的条件.

2 第二步　将关于参数的条件转化为关于参数的方程(组)或不等式(组).

3 第三步　解方程(组)或不等式(组),得参数的值或取值范围.

3. 典型例题

典例1　是否存在实数a,使函数$f(x)=\log_a(ax^2-x)$在区间$[2,4]$是增函数?如果存在,求出a的取值范围,如果不存在,请说明理由.

思路分析:复合函数的单调性,取决于内外函数的单调性,将问题转化为关于内函数的不等式.

解:设$g(x)=ax^2-x$,假设符合条件的a存在,

当$a>1$时,为使函数$f(x)=\log_a(ax^2-x)$在区间$[2,4]$上是增函数,只需$g(x)=ax^2-x$在区间$[2,4]$上是增函数,　1

故应满足$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2a}\leqslant 2,\\ g(2)=4a-2>0,\end{cases}$　2

解得$a>\dfrac{1}{2}$,$\therefore a>1$;　3

当$0<a<1$时,为使函数$f(x)=\log_a(ax^2-x)$在区间$[2,4]$上是增函数,只需$g(x)=ax^2-x$在区间$[2,4]$上是减函数,　1

故应满足$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2a}\geqslant 4,\\ g(4)=16a-4>0,\end{cases}$　2

此不等式组无解.　3

综上可知,当$a>1$时,$f(x)=\log_a(ax^2-x)$在区间$[2,4]$上为增函数.

典例2　已知定义域为**R**的函数$f(x)=\dfrac{-2^x+b}{2^{x+1}+a}$是奇函数.

(1)求a,b的值;

(2)若对任意的$t\in\mathbf{R}$,不等式$f(t^2-2t)+f(2t^2-k)<0$恒成立,求k的取值范围.

解:(1)因为$f(x)$在**R**上是奇函数,所以$f(0)=0$,　1

即$\dfrac{-1+b}{2+a}=0$,　2

解得$b=1$.　3

对数和它的发明者(六)　当布里格斯于1615年访问纳皮尔时,两人一致认为:如果把对数改变一下,使得1的对数为0,10的对数为10的一个适当的次幂,编造出来的对数表就会更有用.于是,也就有了今天的常用对数表.这种对数实质上是以10为底的对数,在数值计算上有很大的优越性,因为我们的数系是以10为基数的.



从而有$f(x)=\frac{-2^x+1}{2^{x+1}+a}$，又由$f(1)=-f(-1)$， ①

知$\frac{-2+1}{4+a}=-\frac{-\frac{1}{2}+1}{1+a}$， ②

解得$a=2$. ③

(2)由(1)知$f(x)=\frac{-2^x+1}{2^{x+1}+2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^x+1}$，

由上式易知$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上为减函数.

又∵$f(x)$是奇函数，从而不等式$f(t^2-2t)+f(2t^2-k)<0$等价于$f(t^2-2t)<-f(2t^2-k)=f(-2t^2+k)$. ①

∵$f(x)$在$\mathbf{R}$上是减函数，∴$t^2-2t>-2t^2+k$. ②

即对一切$t\in\mathbf{R}$，有$3t^2-2t>k$，

而$3t^2-2t=3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}$的最小值为$-\frac{1}{3}$，

所以$k<-\frac{1}{3}$. ③

模板演练

➡ 答案详见 P383

1. (新课标全国高考)已知函数$f(x)=\begin{cases}-x^2+2x,x\leqslant 0,\\ \ln(x+1),x>0.\end{cases}$若$|f(x)|\geqslant ax$，则$a$的取值范围是(　　).

A. $(-\infty,0]$　　B. $(-\infty,1]$

C. $[-2,1]$　　D. $[-2,0]$

2. (天津高考)已知函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，且在区间$[0,+\infty)$上单调递增. 若实数a满足$f(\log_2 a)+f(\log_{\frac{1}{2}} a)\leqslant 2f(1)$，则$a$的取值范围是(　　).

A. $[1,2]$　　B. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$

C. $\left[\frac{1}{2},2\right]$　　D. $(0,2]$

3. (天津高考)若函数$f(x)=\begin{cases}\log_2 x,x>0,\\ \log_{\frac{1}{2}}(-x),x<0,\end{cases}$若$f(a)>f(-a)$，则实数$a$的取值范围是(　　).

A. $(-1,0)\cup(0,1)$

B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

D. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

4. (江苏高考)设函数$f(x)=x(e^x+ae^{-x})(x\in\mathbf{R})$是偶函数，则实数$a$的值为________.

5. (上海高考)已知函数$f(x)=e^{|x-a|}$(a为常数). 若$f(x)$在区间$[1,+\infty)$上是增函数，则a的取值范围是________.

6. (山东高考)若函数$f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$在$[-1,2]$上的最大值为4，最小值为m，且函数$g(x)=(1-4m)\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上是增函数，则$a=$______.

模板6　求函数的反函数 [5年10考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(全国高考)函数$y=\sqrt{x+1}\ (x\geqslant -1)$的反函数为(　　). A. $y=x^2-1(x\geqslant 0)$　　B. $y=x^2-1(x\geqslant 1)$ C. $y=x^2+1(x\geqslant 0)$　　D. $y=x^2+1(x\geqslant 1)$	本模板解决的是“已知函数$y=f(x)(x\in D)$，求其反函数$y=f^{-1}(x)$”的问题.
解析：因为$x\geqslant -1$，所以$x+1\geqslant 0$，所以$y=\sqrt{x+1}\geqslant 0$. 由$y=\sqrt{x+1}$，得$x+1=y^2$，所以$x=y^2-1$，所以反函数为$y=x^2-1(x\geqslant 0)$，选A. **答案：**A	第一步　将y用x表示出来. 第二步　将x与y互换. 第三步　注明x的范围.

凯尔微博



一袋宝石(一)　一个清晨，天还未亮，渔夫就来到河边准备撒网，在岸边他感觉到有什么东西在他的脚下，一摸是一小袋的石头. 他捡起袋子，将渔网放在一旁，坐在岸边等待日出. 他在等待黎明，以便开始一天的工作，他懒洋洋地从袋子里拿出一块石头丢进水里，然后又把一块石头丢进水里.

模板攻略

1. 模板解决思路

求反函数的关键是用y表示x,也就是将x解出来.同时,需注意自变量y的取值范围,即原函数的值域.

2. 模板解决步骤

1第一步　将$y=f(x)$中的x解出来,即得到$x=g(y)$.

2第二步　交换x,y的位置,得$y=g(x)$.

3第三步　并注明反函数中x的范围.

3. 典型例题

典例1　(全国高考)函数$f(x)=\log_2\left(1+\frac{1}{x}\right)(x>0)$的反函数$f^{-1}(x)=($　　$)$.

A. $\frac{1}{2^x-1}(x>0)$　　B. $\frac{1}{2^x-1}(x\neq0)$

C. $2^x-1(x\in\mathbf{R})$　　D. $2^x-1(x>0)$

解析: 由$y=\log_2\left(1+\frac{1}{x}\right)$得$x=\frac{1}{2^y-1}$,　①

所以原函数的反函数为$y=\frac{1}{2^x-1}$,　②

又由原函数的定义域可得原函数中$y>0$,故反函数中$x>0$,故选A.　③

答案:A

易错警示

原函数的定义域和值域分别是反函数的值域和定义域.解答本题时要注意必须写明反函数的定义域.

典例2　(上海高考)函数$f(x)=\frac{1}{x-2}$的反函数为$f^{-1}(x)$=________.

解析: 函数$f(x)$的值域为$\{y|y\neq0\}$,由$y=\frac{1}{x-2}$得$x=\frac{1}{y}+2$,$\therefore f^{-1}(x)=\frac{1}{x}+2(x\neq0)$.

答案: $\frac{1}{x}+2(x\neq0)$

知识要点

反函数

当一个函数是一一映射时,可以把这个函数的因变量作为一个新的函数的自变量,而把这个函数的自变量作为新的函数的因变量,我们称这两个函数互为反函数.函数$y=f(x)$的反函数常用$y=f^{-1}(x)$表示.

如果函数$y=f(x)$有反函数$y=f^{-1}(x)$,那么函数$y=f^{-1}(x)$的反函数就是$y=f(x)$.这就是说,函数$y=f(x)$与$y=f^{-1}(x)$互为反函数.

特别提示

(1)指数函数$y=a^x(a>0$且$a\neq1)$与对数函数$y=\log_a x(a>0$且$a\neq1)$互为反函数.

(2)函数$y=f(x)$的定义域、值域分别是它的反函数$y=f^{-1}(x)$的值域、定义域.

(3)互为反函数的两个函数图象关于直线$y=x$对称.

模板演练

➜ 答案详见P384

1. (北京高考)函数$f(x)=3^x(0<x\leq2)$的反函数的定义域为($　　$).

A. $(0,+\infty)$　　B. $(1,9]$

C. $(0,1)$　　D. $[9,+\infty)$

2. (广东高考)若函数$y=f(x)$是函数$y=a^x(a>0$,且$a\neq1)$的反函数,其图象经过点$(\sqrt{a},a)$,则$f(x)$=($　　$).

A. $\log_2 x$　　B. $\log_{\frac{1}{2}}x$　　C. $\frac{1}{2^x}$　　D. x^2

一袋宝石(二)　因为没有其他事可做,他继续把石头一块一块地丢进水里.慢慢地,太阳升起,大地重现光明.这时除了手里最后一块石头之外其他的石头都已经丢光了.当他借着白天的光,终于看清自己手中所拿的东西时,他的心跳几乎停止,那是一颗宝石!在黑暗中,他竟然把整袋的宝石都丢光了!

凯尔微博



3. (安徽高考)在同一平面直角坐标系中,函数 $y=g(x)$ 的图象与 $y=e^x$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,而函数 $y=f(x)$ 的图象与 $y=g(x)$ 的图象关于 y 轴对称,若 $f(m)=-1$,则 m 的值为(　　).

A. $-e$　　B. $-\frac{1}{e}$　　C. e　　D. $\frac{1}{e}$

4. (上海高考)对任意不等于1的正数 a,函数 $f(x)=\log_a(x+3)$ 的反函数的图象都过点 P,则点 P 的坐标是 ______.

模板 7　函数图象的判断 [5年25考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(安徽高考)设 $abc>0$,二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的图象可能是(　　). A　B　C　D	本模板解决的是"已知函数的解析式或一些已知条件,判断哪个是符合条件的函数图象"的问题.
解析:由 A,C,D 知,$f(0)=c<0$. ∵$abc>0$,∴$ab<0$,∴对称轴 $x=-\frac{b}{2a}>0$,知 A,C 错误,D 符合要求. 由 B 知 $f(0)=c>0$,∴$ab>0$,∴$x=-\frac{b}{2a}<0$,B 错误. **答案**:D	第一步　由截距确定 c 的符号. 第二步　由 $abc>0$ 和 c 的符号确定 ab 的符号. 观察图象中的对称轴,判断 $-\frac{b}{2a}$ 的符号. 第三步　排除错误答案,得出正确答案.

模板攻略

1. 模板解决思路

已知函数的解析式判断图象时,可以从函数图象的本质——点的集合入手,结合函数的单调性、奇偶性、周期性等性质,通过一些特殊点(常用函数与坐标轴的交点)排除错误项,选出正确答案.

2. 模板解决步骤

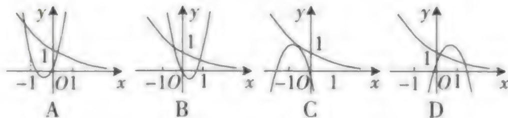
1 第一步　观察函数解析式及四个选项中图象的特点.

2 第二步　分析函数的性质(单调性、奇偶性、对称性和周期性等),以及特殊点(与 x 轴,y 轴交点,曲线交点等)的作用.

3 第三步　根据以上两步,排除错误项,得出正确答案.

3. 典型例题

典例 1　下列图象中,二次函数 $y=ax^2+bx$ 与指数函数 $y=\left(\frac{b}{a}\right)^x$ 的图象只可能是(　　).



解析:四个选项中,指数函数 $y=\left(\frac{b}{a}\right)^x$ 的图象相同,　1

可得 $0<\frac{b}{a}<1$,即 $-\frac{1}{2}<-\frac{b}{2a}<0$,　2

判断 $y=ax^2+bx$ 的对称轴可得只有 A 满足.　3

答案:A

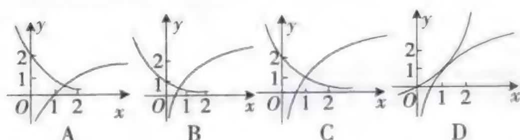
凯尔微博



一袋宝石(三)　在不知不觉当中,他的损失有多少?他充满懊悔,咒骂自己,伤心地哭了起来. 他在无意间获得的财富足以改变他的生活,然而在不知不觉当中,在黑暗中,他又把它们丢掉了.

大道理:上天对我们每个人都是很公平的,他会给每个人机会,但是就看你把这个机会当作是"宝石"还是"石子".

典例 2　函数 $f(x)=1+\log_2 x$ 与 $g(x)=2^{1-x}$ 在同一直角坐标系下的图象大致是(　　).



解析:$f(x)=1+\log_2 x$ 的图象是由函数 $f(x)=\log_2 x$ 的图象向上平移一个单位长度而得到,所以函数图象经过(1,1)点,且为增函数.显然,A 项中单调递增的函数图象经过点(1,0),而不是(1,1),故排除 A;函数 $g(x)=2^{1-x}=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^x$,其图象经过(0,2)点,且为减函数,而 B 项中单调递减的函数图象与 y 轴的交点坐标为(0,1),故排除 B;

D 项中两个函数都是单调递增的,故排除 D.

综上所述,排除 A,B,D. 选 C.

答案:C

知识要点

1. 点(x,y)在不同位置时的符号

(1)第一象限:$x>0,y>0$.

(2)第二象限:$x<0,y>0$.

(3)第三象限:$x<0,y<0$.

(4)第四象限:$x>0,y<0$.

(5)x 轴正半轴:$x>0,y=0$.

(6)x 轴负半轴:$x<0,y=0$.

(7)y 轴正半轴:$x=0,y>0$.

(8)y 轴负半轴:$x=0,y<0$.

2. 函数的性质与图象的关系

(1)单调性:函数在区间上单调递增,则图象从左向右是上升的;单调递减,则图象从左向右是下降的.

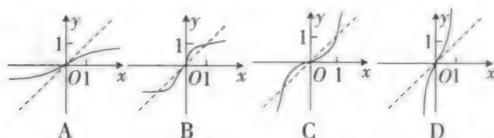
(2)奇偶性:奇函数的图象关于原点对称,偶函数的图象关于 y 轴对称.

(3)周期性:经过一个或若干个周期,函数值相等.

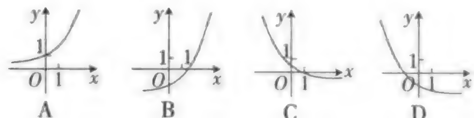
模板演练

➡ 答案详见 P384

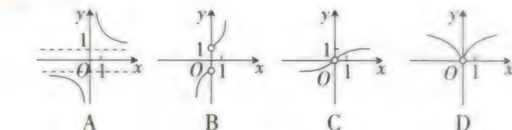
1. (陕西高考)函数 $y=x^{\frac{1}{3}}$的图象是(　　).



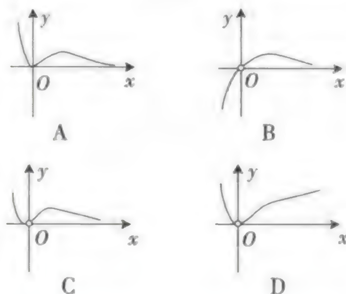
2. (四川高考)函数 $y=a^x-a(a>0,a\neq1)$的图象可能是(　　).



3. (山东高考)函数 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$的图象大致为(　　).



4. (四川高考)函数 $y=\frac{x^3}{3^x-1}$的图象大致是(　　).

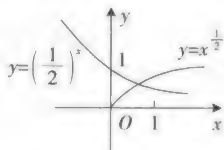


居安思危(一)　一只野狼卧在草上勤奋地磨牙,狐狸看到了,就对它说:"天气这么好,大家在休息娱乐,你也加入我们队伍中吧!"野狼没有说话,继续磨牙,把它的牙齿磨得又尖又利. 狐狸奇怪地问道:"森林这么静,猎人和猎狗已经回家了,老虎也不在近处徘徊,又没有任何危险,你何必那么用劲磨牙呢?"

第三章 函数的应用

模板1 判断函数的零点个数 【5年6考】

模板探究

母题呈现	模板引入
函数 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的零点个数为(　　). A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3	本模板解决的是"已知函数的解析式,通过画出函数的图象(或画出构造函数的图象),来判断函数的零点个数"的问题.
解析: 令 $g(x)=x^{\frac{1}{2}}$, $h(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, 则 $f(x)=g(x)-h(x)$, $f(x)$ 的零点个数即为 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的交点个数. 作出 $g(x)$ 和 $h(x)$ 如图所示.  显然,$g(x)$ 和 $h(x)$ 只有一个交点,即 $f(x)$ 只有一个零点. **答案:** B	第一步　构造 $f(x)=g(x)-h(x)$, $g(x)$ 与 $h(x)$ 为常见函数. 第二步　画出 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的图象. 第三步　根据 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的交点,判断 $f(x)$ 的零点个数.

模板攻略

1. 模板解决思路

求函数的零点个数就是求函数图象与 x 轴的交点个数,因此只要作出函数图象即可. 如果函数图象不易作出,可将函数拆成 $f(x)-g(x)$ 的形式,然后转化为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象的交点问题.

2. 模板解决步骤

1 第一步　画出函数的图象,或者将函数拆成 $f(x)-g(x)$ 的形式,转化成交点问题.

2 第二步　观察函数图象,特别注意间断的点.

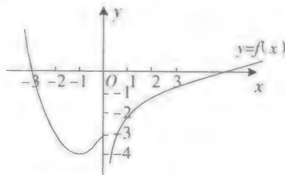
3 第三步　得出零点个数.

3. 典型例题

典例 1　(福建高考)函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-3, & x\leqslant 0,\\ -2+\ln x, & x>0\end{cases}$ 的零点个数为(　　).

A. 3　　B. 2　　C. 7　　D. 0

解析: 函数 $f(x)$ 的图象如图所示.　1

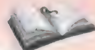


2

由图可知,函数 $f(x)$ 共有两个零点.　3

答案: B

典例 2　(天津高考)函数 $f(x)=2^x|\log_{0.5}x|-1$ 的零点个数为(　　).



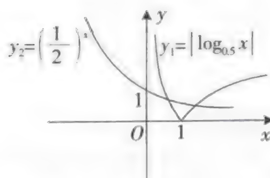
居安思危(二)　野狼停下来回答说:"我磨牙并不是为了娱乐,你想想,如果有一天我被猎人或老虎追逐,到那时,我想磨牙也来不及了. 而平时我就把牙磨好,到那时就可以保护自己了."

温馨提示: 做事应该未雨绸缪,居安思危,这样在危险突然降临时,才不至于手忙脚乱.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D.4

解析：函数 $f(x)=2^x|\log_{0.5}x|-1$ 的零点个数即为函数 $y=|\log_{0.5}x|$ 与 $y=\frac{1}{2^x}$ 图象的交点个数.　①

在同一直角坐标系中作出函数 $y=|\log_{0.5}x|$ 与 $y=\frac{1}{2^x}$ 的图象如图.



②

由图象易知有两个交点.　③

答案：B

知识要点

1. 函数零点的定义

对于函数 $y=f(x)$，我们把使 $f(x)=0$ 的实数 x 叫作函数 $y=f(x)$ 的零点.

特别提示

函数的零点不是一个点，而是一个实数.

2. 函数零点的意义

函数 $y=f(x)$ 的零点就是方程 $f(x)=0$ 的实数根，也就是函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴交点的横坐标，所以方程 $f(x)=0$ 有实数根 ⇔ 函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴有交点 ⇔ 函数 $y=f(x)$ 有零点.

模板演练

➡ 答案详见 P384

1. (湖南高考)函数 $f(x)=2\ln x$ 的图象与函数 $g(x)=x^2-4x+5$ 的图象的交点个数为(　　).

   A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

2. 函数 $y=2x^2-2x-1$ 的零点个数为(　　).

   A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 不能确定

3. 已知函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，且 $a+b+c=0$，则函数 $f(x)$ 的零点个数为(　　).

   A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 1 或 2

4. 函数 $y=|x^2-6x|-3$ 的零点的个数为(　　).

   A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

5. 函数 $f(x)=|x^2-2x|-\log_2(x+2)$ 的零点个数为______.

6. 方程 $x+x^{-1}-2=\log_3 x$ 的实数解的个数是______.

模板 2　判断区间内是否有零点 【5 年 8 考】

模板探究

母题呈现	模板引入
函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}-x^3$ 的零点所在的区间为(　　). A. (0,1)　B. (1,2)　C. (2,3)　D. (3,4)	本模板解决的是"已知函数的解析式，判断哪个区间有零点"的问题.
解析：$\because f(1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-2}-1^3=1>0$，$f(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2-2}-2^3=-7<0$， $\therefore f(1)\cdot f(2)<0$. 故函数 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}-x^3$ 的零点所在区间为(1,2). **答案**：B	第一步　确定讨论区间的端点 0,1,2,3,4. 第二步　计算易知 $f(1)$ 和 $f(2)$ 的符号相反. 第三步　判定函数 $f(x)$ 在(1,2)内存在零点.

好学不倦(一)　在一个漆黑的晚上，老鼠首领带领着小老鼠出外觅食，在一家人的厨房内，垃圾桶之中有很多剩余的饭菜，对于老鼠来说，就好像人类发现了宝藏. 正当一大群老鼠在垃圾桶及周围大挖一顿之际，突然传来了一阵令它们肝胆俱裂的声音，那就是一只大花猫的叫声. 它们震惊之余，各自四处逃命，但大花猫绝不留情，穷追不舍.



模板攻略

1. 模板解决思路

判断零点所在区间一般有两种方法，一是画出函数图象，二是利用零点存在性定理. 对于函数图象较易画出的，则易解决. 若图象不易画出，则考虑零点存在性定理，需要注意的是：该定理运用的前提条件是该函数在区间上无间断点.

2. 模板解决步骤

1 第一步　找出选项中所列出的区间的端点.

2 第二步　求出端点的函数值，若一个区间两端点的函数值异号，则零点在此区间内. 如 $f(m)\cdot f(n)<0$，则 $f(x)$ 在 (m,n) 内有零点.（若不易求出端点值或端点值不存在，则可画出函数图象观察）

3 第三步　判断零点所在区间.

3. 典型例题

典例 1　函数 $f(x)=\log_3x+x-3$ 的零点一定在区间（　　）内.

A. $(0,1)$　　B. $(1,2)$　　C. $(2,3)$　　D. $(3,4)$

解析： $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，不存在间断点.

$f(1)=-2<0$，$f(2)=\log_32-1<0$，$(1,2)$ 不一定有零点，

$f(3)=1>0$，$f(2)\cdot f(3)<0$，　　1~2

所以 $(2,3)$ 一定有零点.　　3

$f(4)=\log_34+1>0$，$(3,4)$ 不一定有零点，

而 $f(0)$ 不存在，借助图象可知函数在 $(0,1)$ 上没有零点.

答案： C

典例 2　（新课标全国高考）在下列区间中，函数 $f(x)=e^x+4x-3$ 的零点所在的区间为（　　）.

A. $\left(-\frac{1}{4},0\right)$　　B. $\left(0,\frac{1}{4}\right)$

C. $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$

解析： 经计算易知 $f\left(\frac{1}{4}\right)=\sqrt[4]{e}-2<0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-1>0$.　　1

$\because f\left(\frac{1}{4}\right)\cdot f\left(\frac{1}{2}\right)<0$，　　2

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ 内有零点. 故选 C.　　3

答案： C

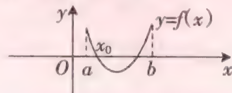
知识要点

函数零点的存在性

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的图象是连续不断的一条曲线，并且有 $f(a)\cdot f(b)<0$，那么，函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有零点，即存在 $c\in(a,b)$，使得 $f(c)=0$，这个 c 也就是方程 $f(x)=0$ 的根.

特别提示

如果函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图象是连续不断的曲线，且 x_0 是函数在 (a,b) 上的一个零点时，不一定有 $f(a)\cdot f(b)<0$. 如图.



模板演练

答案详见 P385

1.（天津高考）函数 $f(x)=e^x+x-2$ 的零点所在的一个区间是（　　）.

A. $(-2,-1)$　　B. $(-1,0)$

C. $(0,1)$　　D. $(1,2)$

凯尔微博



好学不倦（二）　终于有两只小老鼠躲避不及，被大花猫捉到，正要将它们吞噬之际，突然传来一连串凶恶的狗吠声，令大花猫手足无措，狼狈逃命. 大花猫走后，老鼠首领从垃圾桶后面走出来说："我早就对你们说，多学一种语言有利无害，这次我就因此救了你们一命."

温馨提示： 多一门技艺，多一条路. 不断学习是成功人士的终身承诺.

2.（上海高考）若 x_0 是方程 $\lg x+x=2$ 的解，则 x_0 属于区间（　　）.

A.（0,1）　　B.（1,1.25）

C.（1.25,1.75）　　D.（1.75,2）

3.（天津高考）函数 $f(x)=2^x+3x$ 的零点所在的一个区间是（　　）.

A.（-2,-1）　　B.（-1,0）

C.（0,1）　　D.（1,2）

4.（上海高考）若 x_0 是方程 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=x^{\frac{1}{3}}$ 的解，则 x_0 属于区间（　　）.

A. $\left(\frac{2}{3},1\right)$　　B. $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$

C. $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$　　D. $\left(0,\frac{1}{3}\right)$

5.（重庆高考）若 $a<b<c$，则函数 $f(x)=(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$ 的两个零点分别位于区间（　　）.

A. (a,b) 和 (b,c) 内　　B. $(-\infty,a)$ 和 (a,b) 内

C. (b,c) 和 $(c,+\infty)$ 内　　D. $(-\infty,a)$ 和 $(c,+\infty)$ 内

模板3　利用零点求参数的取值范围【5年6考】

模板探究

母题呈现	模板引入
已知函数 $f(x)=ax^2-2ax+3a-4$ 在区间 $(-1,1)$ 上有一个零点. 则实数 a 的取值范围是______.	本模板解决的是“已知含参函数在某区间上有零点，求参数的取值范围”的问题.
解析：若 $a=0$，则 $f(x)=-4$ 与题意不符，$\therefore a\neq0$，令 $f(-1)\cdot f(1)=(6a-4)(2a-4)<0$，解得 $\frac{2}{3}<a<2$. **答案：**$\frac{2}{3}<a<2$	第一步　讨论易知 $a\neq0$.求出 $f(-1)$，$f(1)$ 的值. 第二步　令 $f(-1)\cdot f(1)<0$，列不等式. 第三步　解不等式得 a 的取值范围.

模板攻略

1. 模板解决思路

解决由函数零点的存在情况，求参数的取值范围时，应该根据零点的存在情况，利用零点存在定理或二次函数的判别式等得到关于参数的不等式（组），然后求解即可.

2. 模板解决步骤

1 第一步　对参数进行分类讨论.

2 第二步　若是二次函数，则可根据二次函数的零点存在情况和零点存在定理列不等式（组）. 若不是二次函数，则可根据零点存在定理或函数图象列不等式（组）.

3 第三步　解不等式（组），得出参数的取值范围.

3. 典型例题

典例　（广东高考）已知 a 是实数，函数 $f(x)=2ax^2+2x-3-a$. 如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上有零点，求 a 的取值范围.

思路分析：若 $a=0$，则 $f(x)$ 为一次函数，若 $a\neq0$，则 $f(x)$ 为二次函数，因此需讨论. 同时，若 $a\neq0$，则二次函数零点情况在“知识要点”中有详细的介绍.

狮子和羚羊的家教　每天，当太阳升起来的时候，非洲大草原上的动物们就开始奔跑了. 狮子妈妈在教育自己的孩子：“孩子，你必须跑得快一点，再快一点，你要是跑不过最慢的羚羊，你就会活活地饿死.”在另外一个场地上，羚羊妈妈也在教育自己的孩子：“孩子，你必须跑得快一点，再快一点，如果你不能比跑得最快的狮子还要快，那你就肯定会被他们吃掉.”

解：若 $a=0, f(x)=2x-3$ 显然在 $[-1,1]$ 上没有零点，$\therefore a\neq 0$. ①

令 $\Delta=4+8a(3+a)=8a^2+24a+4=0$，得 $a=\frac{-3\pm\sqrt{7}}{2}$.

当 $a=\frac{-3-\sqrt{7}}{2}$ 时，$y=f(x)$ 恰有一个零点在 $[-1,1]$ 上；

当 $f(-1)\cdot f(1)=(a-5)(a-1)<0$，即 $1<a<5$ 时，$y=f(x)$ 也恰有一个零点在 $[-1,1]$ 上；

当 $y=f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有两个零点时，则

$$\begin{cases} a>0, \\ \Delta=8a^2+24a+4>0, \\ -1<-\frac{1}{2a}<1, \\ f(1)\geq 0, \\ f(-1)\geq 0, \end{cases} \text{或} \begin{cases} a<0, \\ \Delta=8a^2+24a+4>0, \\ -1<-\frac{1}{2a}<1, \\ f(1)\leq 0, \\ f(-1)\leq 0, \end{cases}$$ ②

解得 $a\geq 5$ 或 $a<\frac{-3-\sqrt{7}}{2}$. ③

因此，a 的取值范围是 $a>1$ 或 $a\leq\frac{-3-\sqrt{7}}{2}$.

知识要点

二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 零点的分布

零点的分布（$m<n<p$ 为常数）	图象	满足条件
$x_1<x_2<m$		$\begin{cases}\Delta>0,\\ -\frac{b}{2a}<m,\\ f(m)>0\end{cases}$
$m<x_1<x_2$		$\begin{cases}\Delta>0,\\ -\frac{b}{2a}>m,\\ f(m)>0\end{cases}$
$x_1<m<x_2$		$f(m)<0$

（续表）

零点的分布（$m<n<p$ 为常数）	图象	满足条件
$m<x_1<x_2<n$		$\begin{cases}\Delta>0,\\ m<-\frac{b}{2a}<n,\\ f(m)>0,\\ f(n)>0\end{cases}$
$m<x_1<n<x_2<p$		$\begin{cases}f(m)>0,\\ f(n)<0,\\ f(p)>0\end{cases}$
只有一根在 (m,n) 之间		$\begin{cases}\Delta=0,\\ m<-\frac{b}{2a}<n\end{cases}$ 或 $f(m)\cdot f(n)<0$

模板演练

➜ 答案详见 P385

1. $g(x)=x+\frac{e^2}{x}-m(x>0$，其中 e 表示自然对数的底数).

若 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有零点，则 m 的取值范围是______.

2. 方程 $(m-2)x^2+3mx+1=0$ 的两个根分别属于 $(-1,0)$ 和 $(0,2)$，则实数 m 的取值范围是______.

3.（山东高考）若函数 $f(x)=a^x-x-a(a>0$，且 $a\neq 1)$ 有两个零点，则实数 a 的取值范围是______.

4. 是否存在这样的实数 a，使函数 $f(x)=x^2+(3a-2)x+a-1$ 在区间 $[-1,3]$ 上与 x 轴恒有一个零点，且只有一个零点. 若存在，求出 a 的取值范围，若不存在，说明理由.

凯尔微博



好的学习习惯(一) 在学习中养成良好的学习习惯，在人的一生中非常重要. 首先，要逐渐养成积极思维的习惯："听课"是学习的重要一环，俗话说"会听的听门道，不会听的听热闹."课堂上应"勤思善问"，主动地发现问题，在积极地探究活动中激发学习的灵感，养成积极的、有效的思维习惯.

模板 4　利用函数模型解应用题【5年21考】

模板探究

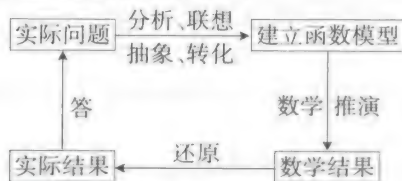
母题呈现	模板引入
(浙江高考)某商家一月份至五月份累计销售额达 3 860 万元,预测六月份销售额为 500 万元,七月份销售额比六月份递增 $x\%$,八月份销售额比七月份递增 $x\%$,九、十月份销售总额与七、八月份销售总额相等. 若一月份至十月份销售总额至少达到 7 000 万元,则 x 的最小值是_______.	本模板解决的是"通过建立函数模型(一次函数模型、反比例函数模型、二次函数模型、指数函数模型、对数函数模型、幂函数模型、分段函数模型等)解决实际问题"的问题.
解析:七月份的销售额为 $500(1+x\%)$,八月份的销售额为 $500(1+x\%)^2$,则一月份到十月份的销售总额是 $3\ 860+500+2[500(1+x\%)+500(1+x\%)^2]$,根据题意有 $3\ 860+500+2[500(1+x\%)+500(1+x\%)^2]\geqslant 7\ 000$,即 $25(1+x\%)+25(1+x\%)^2\geqslant 66$,令 $t=1+x\%$,则 $25t^2+25t-66\geqslant 0$,解得 $t\geqslant\frac{6}{5}$ 或者 $t\leqslant-\frac{11}{5}$(舍去),故 $1+x\%\geqslant\frac{6}{5}$,解得 $x\geqslant 20$. **答案:**20	第一步　用代数式表示出一月份至十月份的销售总额. 第二步　由"一月份至十月份销售总额至少达到 7 000 万元"列不等式. 第三步　解不等式,得不等式的解. 第四步　将不等式的解转化为实际问题的答案.

模板攻略

1. 模板解决思路

解决实际问题的关键是将自然语言转化为数学语言,然后利用相关的数学知识,建立起相应的数学模型来,经过数学推算,得到数学结果,最后将数学结果还原成实际结果.

以上过程用图表示如下:



2. 模板解决步骤

①第一步　审题:深刻理解题意,分清条件和结论,理顺其中的数量关系,把握其中的数学本质.

②第二步　建模:将自然语言转化为数学语言,将文字语言转化为符号语言,利用数学知识,建立相应的数学模型.

③第三步　解模:用数学知识和方法解决转化出的数学问题.

④第四步　还原:回到题目本身,检验结果的实际意义,给出结论.

3. 典型例题

典例 1　(湖北高考)里氏震级 M 的计算公式为:$M=\lg A-\lg A_0$,其中 A 是测震仪记录的地震曲线的最大振幅,A_0 是相应的标准地震的振幅. 假设在一次地震中,测震仪记录的最大振幅是 1 000,此时标准地震的振幅为 0.001,则此次地震的震级为______级;9 级地震的最大振幅是 5 级地震最大

好的学习习惯(二)　其次,要养成良好的解题习惯:(1)审题:有些同学在做练习甚至是考试时,只是把题目粗略地看几眼,就急于动笔做,常因未审清题意做错或中途做不下去,因此,所谓"审题要准"的基本思想就是要清晰地找出题目中的关键词或条件并划出来,真正弄懂题意后再设法求解.



振幅的______倍.

解析:由 lg1 000−lg0.001=6,得此次地震的震级为6级.因为标准地震的振幅为0.001,设9级地震最大振幅为 A_9,则 $\lg A_9-\lg 0.001=9$ 解得 $A_9=10^6$,同理5级地震最大振幅 $A_5=10^2$, 1~2

所以9级地震的最大振幅是5级地震的最大振幅的10 000倍. 3~4

答案:6　10 000

典例2　(湖北高考)提高过江大桥的车辆通行能力可改善整个城市的交通状态.在一般情况下,大桥上的车流速度 v(单位:千米/小时)是车流密度 x(单位:辆/千米)的函数.当桥上的车流密度达到200辆/千米时,造成堵塞,此时车流速度为0;当车流密度不超过20辆/千米时,车流速度为60千米/小时.研究表明:当 $20\leqslant x\leqslant 200$ 时,车流速度 v 是车流密度 x 的一次函数.

(1)当 $0\leqslant x\leqslant 200$ 时,求函数 $v(x)$ 的表达式;

(2)当车流密度 x 为多大时,车流量(单位时间内通过桥上某观测点的车辆数,单位:辆/小时) $f(x)=x\cdot v(x)$ 可以达到最大,并求出最大值.(精确到1辆/小时)

解:(1)由题意,当 $0\leqslant x\leqslant 20$ 时,$v(x)=60$;当 $20\leqslant x\leqslant 200$ 时,设 $v(x)=ax+b$,

显然 $v(x)=ax+b$ 在[20,200]是减函数,由已知得

$$\begin{cases}200a+b=0,\\20a+b=60,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=-\dfrac{1}{3},\\b=\dfrac{200}{3}.\end{cases}$$

故函数 $v(x)$ 的表达式为

$$v(x)=\begin{cases}60, & 0\leqslant x<20,\\ \dfrac{1}{3}(200-x), & 20\leqslant x\leqslant 200.\end{cases}$$ 1~2

(2)依题意并由(1)可得

$$f(x)=\begin{cases}60x, & 0\leqslant x<20,\\ \dfrac{1}{3}x(200-x), & 20\leqslant x\leqslant 200.\end{cases}$$

$f(x)$ 在[20,200]上是连续函数,当 $0\leqslant x\leqslant 20$ 时,$f(x)$ 为增函数,故当 $x=20$ 时,其最大值为 $60\times 20=1\ 200$;

当 $20\leqslant x\leqslant 200$ 时,

$$f(x)=\frac{1}{3}x(200-x)=-\frac{1}{3}(x-100)^2+\frac{10\ 000}{3}\leqslant\frac{10\ 000}{3}.$$

当且仅当 $x=100$ 时,等号成立.

所以,当 $x=100$ 时,$f(x)$ 在区间[20,200]上取得最大值 $\dfrac{10\ 000}{3}$.

综上,当 $x=100$ 时,$f(x)$ 在区间[0,200]上取得最大值 $\dfrac{10\ 000}{3}\approx 3\ 333$, 3

即当车流密度为100辆/千米时,车流量可以达到最大,最大值约为3 333辆/小时. 4

注意实际问题的自变量的取值范围,合理确定函数的定义域.

知识要点

1. 函数模型的概念

函数模型就是用函数知识对日常生活中普遍存在的成本最低、利润最高、产量最大、收益最好、用料最省等实际问题进行归纳加工,建立相应的目标函数,确定变量的取值范围,运用函数的方法进行求解,最后用其解决实际问题.

2. 几类不同的函数模型

常见的8种函数模型

(1)一次函数模型:$f(x)=kx+b$(k,b 为常数,$k\neq 0$);

(2)反比例函数模型:$f(x)=\dfrac{k}{x}+b$(k,b 为常数,$k\neq 0$);

(3)二次函数模型:$f(x)=ax^2+bx+c$(a,b,c 为常数,$a\neq 0$);

(4)指数型函数模型:$f(x)=ab^x+c$(a,b,c 为常数,$a\neq 0,b>0,b\neq 1$);

(5)对数型函数模型:$f(x)=m\log_a x+n$(m,n,a 为常数,$a>0,a\neq 1$);



好的学习习惯(三)　(2)画图:高中数学相当一部分内容必须用图或图象来表示.要养成画图、识图、借助图象解决问题的习惯.(3)解题:解题过程要清楚、完整,更要有必要的公式、文字说明及演练过程.(4)纠错:改错不是形式上的再做一遍,而是对正确解法要真正的心领神会,融会贯通.

(6)幂型函数模型：$f(x)=ax^n+b$（a,b,n为常数，$a\neq0,n\neq1$）；

(7)"勾"函数模型：$f(x)=x+\frac{k}{x}$（k为常数，且$k>0$）；

(8)分段函数模型.

模板演练

➡ 答案详见 P386

1. (北京高考)根据统计，一名工人组装第 x 件某产品所用的时间(单位:分钟)为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{c}{\sqrt{x}},x<A,\\ \frac{c}{\sqrt{A}},x\geqslant A\end{cases}(A,c \text{ 为常数}).$$

已知工人组装第 4 件产品用时 30 分钟，组装第 A 件产品时用时 15 分钟，那么 c 和 A 的值分别是(　　).

A. 75，25　　B. 75，16

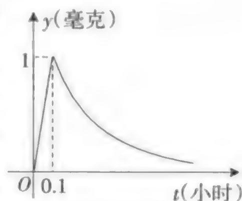
C. 60，25　　D. 60，16

2. 国家规定个人稿费纳税办法是：不超过 800 元的不纳税；超过 800 元而不超过 4 000 元的按超过 800 元部分的 14%纳税；超过 4 000 元的按全部稿酬的 11%纳税. 已知某人出版一本书，共纳税 420 元，这个人应得稿费(扣税前)为(　　).

A. 2 800 元　　B. 3 000 元

C. 3 800 元　　D. 3 818 元

3. (湖北高考)为了预防流感，某学校对教室用药熏消毒法进行消毒. 已知药物释放过程中，室内每立方米空气中的含药量 y(毫克)与时间 t(小时)成正比；药物释放完毕后，y 与 t 的函数关系式为 $y=\left(\frac{1}{16}\right)^{t-a}$（$a$ 为常数），如图，据图中提供的信息，回答下列问题：



(1)从药物释放开始，每立方米空气中的含药量 y(毫克)与时间 t(小时)之间的函数关系式为 ______________；

(2)据测定，当空气中每立方米的含药量降低到 0.25 毫克以下时，学生方可进教室，那么，从药物释放开始，至少需要经过 ______ 小时后，学生才能回到教室.

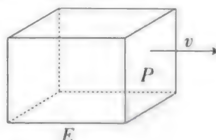
4. (湖南高考)如图，长方体物体 E 在雨中沿面 P（面积为 S）的垂直方向做匀速移动，速度为 v（$v>0$），雨速沿 E 移动方向的分速度为 c（$c\in\mathbf{R}$）. E 移动的单位时间内的淋雨量包括两部分：

①P 或 P 的平行面(只有一个面淋雨)的淋雨量，假设其值与 $|v-c|\times S$ 成正比，比例系数为 $\frac{1}{10}$；

②其他面的淋雨量之和，其值为 $\frac{1}{2}$. 记 y 为 E 移动过程中的总淋雨量. 当移动距离 $d=100$，面积 $S=\frac{3}{2}$ 时，

(1)写出 y 的表达式；

(2)设 $0<v\leqslant10,0<c\leqslant5$，试根据 c 的不同取值范围，确定移动速度 v，使总淋雨量 y 最少.



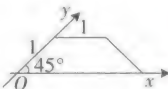
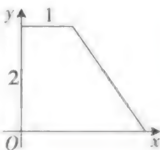
第二次数学危机(一)　十七世纪末，牛顿和莱布尼茨因发现微积分而发生的关于微积分的激烈争论，被称为第二次数学危机. 从历史或逻辑的观点来看，这次危机的发生带有必然性. 这次危机的萌芽出现在大约公元前 450 年，古希腊数学家芝诺注意到由于对无限性的理解问题而产生的矛盾，提出了关于时空的有限与无限的 4 个悖论.



第一章 空间几何体

模板1 根据直观图计算原图形面积

模板探究

母题呈现	模板引入
一个水平放置的平面图形的斜二测直观图是一个底角为45°,腰和上底均为1的等腰梯形,如图,则原平面图形的面积为(　　). A. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $1+\sqrt{2}$　　D. $2+\sqrt{2}$ 	本模板解决的是“已知水平放置平面图形的直观图的基本条件,求原图形的面积”的问题.
解析:由题意可知,原平面图形是一个直角梯形,且上底为1,高为2,如图.根据直观图的已知条件,可求得其下底为$1+\sqrt{2}$.故原平面图形的面积为$\frac{(1+1+\sqrt{2})}{2}\times2=2+\sqrt{2}$.  **答案:**D	第一步　根据直观图,判断原图形为直角梯形. 第二步　根据斜二测画法,求得原图形的上底为1,下底为$1+\sqrt{2}$,高为2. 第三步　代入面积公式,求得原图形的面积.

模板攻略

1. 模板解决思路

根据直观图计算原平面图形面积时,一般利用斜二测画法规则还原原平面图形,然后逆用“平行于x轴的线段,在直观图中保持原长度不变,平行于y轴的线段,长度变为原来的一半”这一规则,求得原平面图形的各待求边长,最后代入面积公式,求得原图形的面积.

2. 模板解决步骤

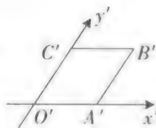
1 第一步　根据直观图,判断原平面图形的形状.

2 第二步　根据斜二测画法,求得原图形的相关边长或角度等.

3 第三步　代入原图形的面积公式,求得所求面积.

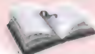
3. 典型例题

典例1　如图,在直观图中,四边形$O'A'B'C'$为菱形且边长为2 cm,则在平面直角坐标系xOy中,四边形$ABCO$为______,面积为______cm².



解析:由斜二测画法规则还原直观图的原图,在坐标系xOy中,四边形$ABCO$是一个矩形.　①

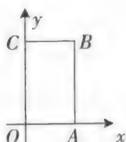
由题意四边形$O'A'B'C'$为菱形且边长为2cm可



凯尔微传

第二次数学危机(二)　芝诺悖论的提出可能有更深刻的背景,不一定是专门针对数学的,但是它们在数学王国中却激起了一场轩然大波.它们说明了希腊人已经看到“无穷小”与“很小很小”的矛盾,但他们无法解决这些矛盾.其后果是:希腊几何证明中从此就排除了无穷小.经过许多人多年的努力,终于在17世纪晚期,形成了无穷小演算——微积分这门学科.

知，$OA=2$cm，$AB=4$cm.　②



所以四边形 $ABCO$ 的面积为 $4\times2=8(\text{cm}^2)$.　③

答案：矩形　8

误区警示

一定要注意在原平面图形中与 y 轴平行的线段的长度在直观图中变为原来的一半，在由直观图还原真实图形时，与 y' 轴平行的线段的长度要变为原来的 2 倍.

典例 2　一个三角形的直观图是一个边长为 1 的正三角形，则原三角形的面积为______.

解析：由题意知直观图是一个边长为 1 的正三角形，则其面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$，而原三角形的面积与直观图的面积之比是 $2\sqrt{2}:1$，　①

所以原三角形的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.　②~③

答案：$\frac{\sqrt{6}}{2}$

误区警示

在斜二测画法中，原平面图形的面积与直观图的面积之比是 $2\sqrt{2}:1$，利用这一结论可有助于快速地解决问题.

必修 2

知识要点

1. 空间几何体的直观图

直观图是观察者站在某一点观察一个空间几何体而画出的图形.

2. 用斜二测画法画水平放置的平面图形直观图的步骤

(1)在已知图形中取互相垂直的 x 轴和 y 轴，两轴相交于点 O.画直观图时，把它们画成对应的 x'轴和 y'轴，两轴交于点 O'，且使 $\angle x'O'y'=45°$(或 $135°$)，它们确定的平面表示水平面.

(2)已知图形中平行于 x 轴或 y 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 x'轴或 y'轴的线段.

(3)已知图形中平行于 x 轴的线段，在直观图中保持原长度不变，平行于 y 轴的线段，长度为原来的一半.

特别提示

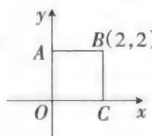
(1)如果原图中的点不在坐标轴上或不在与坐标轴平行的线段上，可过这些点作与坐标轴平行的线段，然后先确定这些垂足在坐标轴上的对应点，再确定这些点的对应点.

(2)用斜二测画法画出的水平放置的平面图形的直观图的面积是原图形面积的 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 倍.

模板演练

答案详见 P387

1. 如图是水平放置的正方形 $ABCO$，在直角坐标系 xOy 中，点 B 的坐标为(2,2)，则由斜二测画法画出的正方形的直观图中，顶点 B' 至 x'轴的距离为(　　).



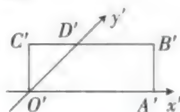
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

2. 已知正三角形 ABC 的边长为 a，那么 $\triangle ABC$ 的直观图 $\triangle A'B'C'$ 的面积为(　　).

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$

C. $\frac{\sqrt{6}}{8}a^2$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{16}a^2$

3. 如图，矩形 $O'A'B'C'$是水平放置的一个平面图形的直观图，其中 $O'A'=6$cm，$O'C'$



第二次数学危机(三)　牛顿和莱布尼茨被公认为微积分的奠基者.他们的功绩主要在于：把各种有关问题的解法统一成微分法和积分法，有明确的计算步骤.微分法和积分法互为逆运算.由于运算的完整性和应用的广泛性，微积分成为解决问题的重要工具.同时，关于微积分基础的问题也越来越严重.

凯尔微博



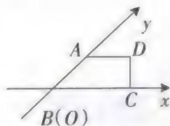
$=2\text{cm}$，则原图形是(　　).

A. 正方形　　B. 矩形

C. 菱形　　D. 一般的平行四边形

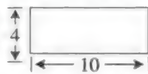
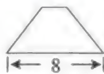
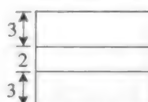
4. 等腰梯形 $ABCD$ 的上底 $CD=1$，下底 $AB=3$，腰 $AD=CB=\sqrt{2}$，以平行于上、下底边的直线为 x 轴，则直观图 $A'B'C'D'$ 的面积为______.

5. 有一块多边形的菜地，它的水平放置的平面图形的斜二测直观图是直角梯形(如图所示)，$\angle ABC=45°$，$AB=AD=1$，$DC\perp BC$，则这块菜地的面积为______.



模板2　由三视图求表面积或体积 [5年50考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(重庆高考)某几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为(　　). A. 180 B. 300 C. 220 D. 240  正(主)视图  侧(左)视图  俯视图	本模板解决的是“已知一个立体图形的三视图，求其表面积(侧面积)或体积”的问题.
解析: 该几何体为直四棱柱，其高为10，底面是上底为2，下底为8，高为4，其腰为5的等腰梯形， 故两个底面面积的和为 $\frac{1}{2}(2+8)\times4\times2=40$. 四个侧面的面积和为 $(2+8+5\times2)\times10=200$， 所以该直四棱柱的表面积为 $S=40+200=240$，故选D. **答案:** D	第一步　根据三视图可知几何体是一个直四棱柱，且底面是等腰梯形，侧面为矩形. 第二步　由题中数据可分别求得底面与侧面面积. 第三步　根据表面积公式，将各面面积相加即可求得直四棱柱的表面积.

模板攻略

1. 模板解决思路

把几何体的表面积与体积的计算与三视图结合考查是高考的一个热点，解决此类问题的关键是观察三视图，把它还原为直观图，特别要注意从三视图中得到几何体的度量，再结合表面积或体积公式解题.

2. 模板解决步骤

1 第一步　将三视图还原为直观图.

2 第二步　确定直观图各组成部分，并找出各部分相关数值.

3 第三步　代入面积或体积公式，计算出结果.

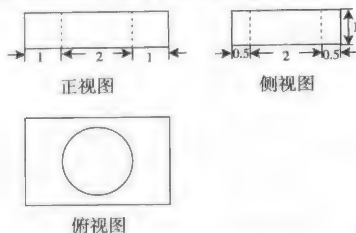
凯尔微博



第二次数学危机(四)　直到19世纪20年代，一些数学家才开始关注于微积分的严格基础. 从波尔查诺、阿贝尔、柯西、狄里克雷等人的工作开始，到魏尔斯特拉斯、狄德金和康托的工作结束，中间经历了半个多世纪，基本上解决了矛盾，为数学分析奠定了一个严格的基础. 波尔查诺给出了连续性的正确定义.

3. 典型例题

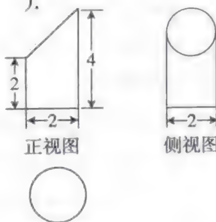
典例 1　(辽宁高考)一个几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为________.



解析：该几何体是一个长方体挖去了一个圆柱，几何体的表面积 S=长方体表面积+圆柱侧面积−圆柱两底面积，故 $S=2\times(4\times3+4\times1+3\times1)+2\pi\times1\times1-2\pi\times1^2=38$.

答案：38

典例 2　(湖北高考)已知某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为(　　).



A. $\frac{8}{3}\pi$

B. 3π

C. $\frac{10\pi}{3}$

D. 6π

思路分析：解此类题目的关键是将三视图表示的物体还原，本题中的几何体是一个圆柱切去了上面一半的一半.

解析：该几何体是一个圆柱体切去了上面一半的一半，

该几何体的体积为圆柱体的 $\frac{3}{4}$.

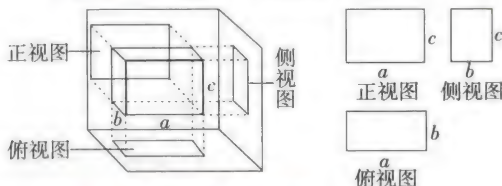
$V=\frac{3}{4}\times\pi r^2h=\frac{3}{4}\times\pi\times\left(\frac{2}{2}\right)^2\times4=3\pi$.

答案：B

知识要点

1. 三视图

下图是一个长方体的三视图.



2. 画几何体三视图的要求

(1)一个几何体的正视图、侧视图高度一样，正视图、俯视图长度一样，侧视图、俯视图宽度一样，可简记为：正侧高平齐，正俯长对正，侧俯宽相等.

(2)一般地，侧视图在正视图的右边，俯视图在正视图的下边.

(3)能看见的轮廓线和棱用实线表示，不能看见的轮廓线和棱用虚线表示.

3. 常见旋转体的三视图

(1)圆柱的正视图和侧视图都是矩形，俯视图为圆.

(2)圆锥的正视图和侧视图都是三角形，俯视图是圆和圆心.

(3)圆台的正视图和侧视图都是等腰梯形，俯视图是两个同心圆.

4. 多面体的表面积

对于棱柱、棱锥、棱台等多面体，它们的表面积是各个面的面积的和，也就是展开图的面积. 因此，可以把多面体展成平面图形，利用平面图形求面积的方法，求多面体的表面积.

(1)$S_{直棱柱侧}=ch$，$S_{直棱柱全}=ch+2S_{底}$(其中 c 为底面周长，h 为棱柱的高).

(2)$S_{正棱锥侧}=\frac{1}{2}ch'$，$S_{正棱锥全}=\frac{1}{2}ch'+S_{底}$(其中 c 为底面周长，h' 为侧面斜高).

5. 旋转体的表面积

(1)圆柱：$S=2\pi r^2+2\pi rl=2\pi r(r+l)$($r$ 为底面半径，l 为母线长).

(2)圆锥：$S=\pi r^2+\pi rl=\pi r(r+l)$($r$ 为底面半径，l 为母线长).

第二次数学危机(五)　阿贝尔指出要严格限制滥用级数展开及求和. 柯西在 1821 年的《代数分析教程》中从定义变量出发，认识到函数不一定要有解析表达式；他抓住极限的概念，指出无穷小量和无穷大量都不是固定的量而是变量，无穷小量是以零为极限的量；并且定义了导数和积分. 狄里克雷给出了函数的现代定义.



其中，$S_{圆锥侧}=\pi rl$.

(3)圆台：$S=\pi(r'^2+r^2+r'l+rl)$(r'，r为上、下底面半径，l为母线长).

其中，$S_{圆台侧}=\pi(r+r')l$.

6. 柱体、锥体、台体的体积

(1)$V_{柱体}=Sh$(S为底面面积，h为柱体的高).

(2)$V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$(S为底面面积，h为锥体的高).

(3)$V_{台体}=\frac{1}{3}(S'+\sqrt{S'S}+S)h$(其中$S'$，$S$分别为上、下底面面积，$h$为台体的高).

特别提示

(1)特别地，

$V_{圆柱}=\pi r^2h$，$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2h$(其中$r$为底面半径，$h$为圆柱(圆锥)的高).

$V_{圆台}=\frac{1}{3}(S+\sqrt{SS'}+S')h=\frac{1}{3}\pi(r'^2+r'r+r^2)h$(其中$r'$，$r$为上、下底面半径，$h$为圆台的高).

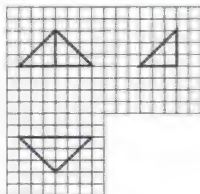
(2)柱体、锥体、台体的体积公式间的联系：

$V_{台体}=\frac{1}{3}(S+\sqrt{SS'}+S')h$ —— $S'=S$ → $V_{柱体}=Sh$；$S'=0$ → $V_{锥体}=\frac{1}{3}Sh$

模板演练

答案详见P388

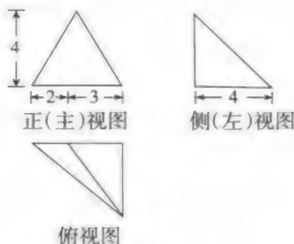
1. (新课标全国高考)如图，网格纸上小正方形的边长为1，粗线画出的是某几何体的三视图，则此几何体的体积为(　　).



A. 6　　B. 9

C. 12　　D. 18

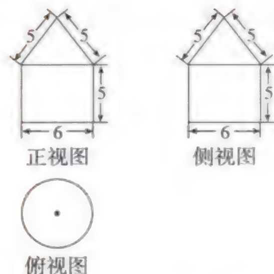
2. (北京高考)某三棱锥的三视图如图所示，该三棱锥的表面积是(　　).



A. $28+6\sqrt{5}$　　B. $30+6\sqrt{5}$

C. $56+12\sqrt{5}$　　D. $60+12\sqrt{5}$

3. (广东高考)某几何体的三视图如图所示，它的体积为(　　).

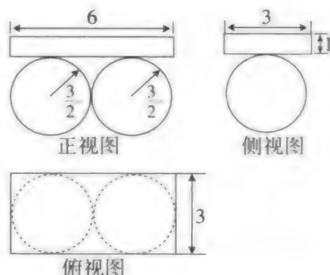


A. 12π　　B. 45π

C. 57π　　D. 81π

4. (上海高考)若一个圆锥的侧面展开图是面积为2π的半圆面，则该圆锥的体积为______.

5. (天津高考)一个几何体的三视图如图所示(单位：m)，则该几何体的体积为______m^3.





凯尔微博

第二次数学危机(六)　在这些工作的基础上，魏尔斯特拉斯消除了其中不确切的地方，给出现在通用的极限的ε—δ定义，连续的定义，并把导数、积分严格地建立在极限的基础上. 19世纪70年代初，魏尔斯特拉斯、狄德金、康托等人独立地建立了实数理论，而且在实数理论的基础上，建立起极限论的基本定理，从而使数学分析建立在实数理论的严格基础之上.

模板 3　求球的体积或表面积【5年10考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(新课标全国高考)如图,有一个水平放置的透明无盖的正方体容器,容器高 8 cm,将一个球放在容器口,再向容器内注水,当球面恰好接触水面时测得水深为 6cm,如果不计容器的厚度,则球的体积为(　　). A. $\frac{500\pi}{3}$ cm³　B. $\frac{866\pi}{3}$ cm³ C. $\frac{1\ 372\pi}{3}$ cm³　D. $\frac{2\ 048\pi}{3}$ cm³	本模板解决的是“已知球满足条件 p,求球的体积或表面积”的问题.
解析:设球半径为 R cm,根据已知条件知正方体的上底面与球相交所得截面圆的半径为 4 cm,球心到截面的距离为$(R-2)$cm,所以由 $4^2+(R-2)^2=R^2$,得 $R=5$,所以球的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times5^3=\frac{500\pi}{3}$ cm³. **答案**:A	第一步　设出球半径 R,根据已知条件知正方体的上底面与球相交所得截面圆中,存在关于半径的勾股关系. 第二步　利用勾股关系列出关于半径 R 的方程,求出球半径. 第三步　利用球的体积公式,求得体积.

模板攻略

1. 模板解决思路

求球的表面积或体积的问题其实就是求球的半径,一般是利用已知球中的相关截面,通过其中的直角三角形,找到关于半径的等量关系,直接或通过列方程求出半径,从而求出球的表面积或体积.

2. 模板解决步骤

①第一步　利用条件 p,寻找关于球半径的等量关系.

②第二步　求出球半径,必要时可通过解方程求得.

③第三步　代入球的表面积和体积公式,计算出表面积或体积.

3. 典型例题

典例 1　(湖北高考)用与球心距离为 1 的平面去截球,所得的截面面积为 π,则球的体积为(　　).

A. $\frac{32\pi}{3}$　B. $\frac{8\pi}{3}$　C. $8\sqrt{2}\pi$　D. $\frac{8\sqrt{2}\pi}{3}$

解析:设截面圆的半径为 r,则 $\pi r^2=\pi$,$\therefore r=1$,截面圆半径、球半径与平面到球心的距离构成直角三角形,　①

由勾股定理求得球的半径为 $\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$,　②

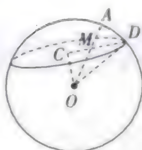
所以球体积为 $\frac{4}{3}\pi(\sqrt{2})^3=\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$,故选 D.　③

答案:D

典例 2　(全国高考)如图,OA 是球O 的半径,M 是

数学名家伽罗华(一)　伽罗华(1811~1832 年)出生于离巴黎不远的一个小城镇,父亲是学校校长,还当过多年市长.家庭的影响使伽罗华一向勇往直前.1823 年,12 岁的伽罗华离开双亲到巴黎求学,他不满足呆板的课堂灌输,自己去找最难的数学原著研究,老师们对他的评价是“只宜在数学的尖端领域里工作”.

OA 的中点，过 M 且与 OA 成 $45°$角的平面截球 O 的表面得到圆 C. 若圆 C 的面积等于 $\frac{7\pi}{4}$，则球 O 的表面积等于 ______.



解析：设球 O 的半径 $OA=R$，圆 C 的圆心为 C，半径为 r，则 OC 垂直于截面，$\angle OMC$ 就是直线 OA 与截面所成的角，

$\therefore \angle OMC=45°$，$\because \pi r^2=\frac{7\pi}{4}$，$\therefore r=\sqrt{\frac{7}{4}}$.

在 $Rt\triangle OCM$ 中，易得 $OC=\frac{\sqrt{2}}{4}R$，取圆 C 上一点 D，连接 CD，OD.

则在 $Rt\triangle OCD$ 中，$R^2=r^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}R\right)^2$，　1

$\therefore R^2=2$，　2

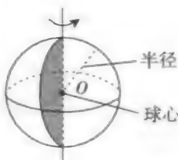
故球 O 的表面积为 $4\pi R^2=8\pi$.　3

答案：8π

知识要点

1. 球的相关概念

以半圆的直径所在直线为旋转轴，半圆面旋转一周形成的旋转体叫作球体，简称为球；半圆的圆心叫作球的球心，半圆的半径叫作球的半径，半圆的直径叫作球的直径.



2. 球的表示

球常用表示球心的字母 O 表示，图中的球表示为球 O.

3. 球截面的性质

(1)球的任意截面是圆面. 球面被经过球心的平面截得的圆叫作球的大圆，被不经过球心的平面截得的圆叫球的小圆.

(2)球心和截面圆心的连线垂直于截面，并且 $r=\sqrt{R^2-d^2}$，其中 R 为球的半径，r 为截面圆的半径，d 为球心到截面的距离.

4. 球面距离

在球面上，两点之间的最短距离，就是经过这两点的大圆在这两点间的一段劣弧的长度，这个弧长叫作两点的球面距离.

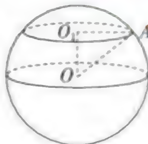
5. 球的表面积和体积

如果球的半径为 R，那么 $S_{球}=4\pi R^2$，$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$.

模板演练

➡ 答案详见 P388

1. 如图，用一个平面截一球得到直径为 6 cm 的圆面，球心到这个平面的距离为 4 cm，则球的体积为(　　).



A. $\frac{100\pi}{3}$ cm³　　B. $\frac{208\pi}{3}$ cm³

C. $\frac{500\pi}{3}$ cm³　　D. $\frac{416\sqrt{13}\pi}{3}$ cm³

2. 设三棱柱的侧棱垂直于底面，所有棱的长都为 a，顶点都在一个球面上，则该球的表面积为(　　).

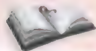
A. πa^2　　B. $\frac{7}{3}\pi a^2$　　C. $\frac{11}{3}\pi a^2$　　D. $5\pi a^2$

3. 长方体的共顶点的三个侧面面积分别为 $\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、$\sqrt{15}$，则它的外接球表面积为 ______.

4. 若一个底面边长为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$，侧棱长为 $\sqrt{6}$ 的正六棱柱的所有顶点都在一个球的面上，则此球的体积为 ______.

5. 半球内有一内接正方体，则这个半球的球面面积与正方体表面积之比是 ______.

凯尔微博



数学名家伽罗华(二)　1828 年，17 岁的伽罗华开始研究方程论，创造了"置换群"的概念和方法，解决了几百年来使人头痛的方程问题. 伽罗华最重要的成就是提出了"群"的概念，用群论改变了整个数学的面貌. 1829 年 5 月，伽罗华把他的成果写成论文，递交法国科学院，但伴随着这篇杰作而来的是一连串的打击和不幸.

第二章 点、直线、平面之间的位置关系

模板1 共面问题的证明 [5年2考]

模板探究

母题呈现	模板引入
已知：$a/\!/b/\!/c$，$l\cap a=A$，$l\cap b=B$，$l\cap c=C$. 求证：直线 a、b、c、l 共面.	本模板解决的是"证明一些点或直线在同一平面内"的问题.
证明：$\because a/\!/b$，$\therefore a$ 和 b 确定一个平面 α. $\because l\cap a=A$，$l\cap b=B$，$\therefore A\in\alpha$，$B\in\alpha$. 故 $l\subset\alpha$. 又 $a/\!/c$，$\therefore a$ 和 c 确定一个平面 β. 同理可证 $l\subset\beta$. 即 l 和 a 既在 α 内又在 β 内，且 l 与 a 相交，故 α、β 重合，即直线 a、b、c、l 共面.	第一步　分析题意，先由 $a/\!/b$ 得 a 和 b 确定一个平面 α. 第二步　由相交分别证得 $A\in\alpha$，$B\in\alpha\Rightarrow l\subset\alpha$. 第三步　由 $a/\!/c$ 得 a，c 确定一个平面 β，利用公理 2 的推论证得 α，β 重合，得证共面.

模板攻略

1. 模板解决思路

证明点线共面的主要依据是公理1、公理2及其推论. 证明点线共面的常用方法有：(1)纳入平面法：先确定一个平面，再证明有关点、线在此平面内；(2)辅助平面法：先证明有关的点、线确定平面 α，再证明其余元素确定平面 β，最后证明 α、β 重合.

2. 模板解决步骤

①第一步　首先观察是否可以利用公理2证明，若不能，可以先证明其中一些点、线确定一个平面 α.

②第二步　再证明其余元素也在平面 α 内.

③第三步　或证明其余元素确定平面 β，然后证明 α 与 β 重合.

3. 典型例题

典例　已知三条直线 AB，AC，BC，其中 $AB\cap AC=A$，$AB\cap BC=B$，$AC\cap BC=C$.

求证：直线 AB、BC、AC 共面.

思路分析：证明点线共面问题，一般做法是：先由某些点、线确定一个平面，然后证明其余的点、线也在这个平面内.

证明：方法一：因为 $AC\cap AB=A$，所以直线 AB、AC 确定一个平面 α，①

因为 $B\in AB$，$C\in AC$，所以 $B\in\alpha$，$C\in\alpha$，故 $BC\subset\alpha$. ②

因此直线 AB、BC、AC 都是在平面 α 内，即它们共面. ③

方法二：因为 A 不在直线 BC 上，所以点 A 和直线 BC 确定平面 α. ①

因为 $A\in\alpha$，$B\in BC$，所以 $B\in\alpha$，故 $AB\subset\alpha$，同理 $AC\subset\alpha$，②

所以直线 AB、BC、AC 共面. ③

方法三：因为 A、B、C 三点不在一条直线上，所以过

数学名家伽罗华(三)　先是父亲因不堪忍受教士诽谤而自杀，接着因为他的答辩既简捷又深奥，令考官们不满，而未能进入著名的巴黎综合理工学院. 至于他的论文，先是被认为新概念太多，又过于简略而要求重写；第二份推导详尽的稿子又因审稿人病逝而下落不明；1831年1月提交的第三份论文又因评阅人不能全部看懂而被否定.

A、B、C 三点可能确定平面 α，①

因为 $A\in\alpha, B\in\alpha$，

所以 $AB\subset\alpha$，同理 $BC\subset\alpha, AC\subset\alpha$. ②

所以直线 AB、BC、AC 三条直线共面. ③

知识要点

1. 公理 1

如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线在此平面内.

符号表示：$A\in l, B\in l$，且 $A\in\alpha, B\in\alpha \Rightarrow l\subset\alpha$.

作用：(1)检验一个面是否是平面；

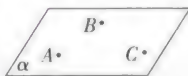
(2)判断直线是否在平面内；

(3)判断点是否在平面内.

2. 公理 2

过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面.

符号表示：A, B, C 不共线 $\Rightarrow A, B, C$ 确定一平面.



作用：刻画了平面特有的基本性质，它给出了确定一个平面的依据.

推论 1：经过一条直线和这条直线外一点，有且只有一个平面.

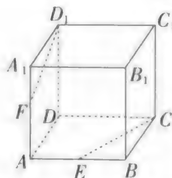
推论 2：经过两条相交直线，有且只有一个平面.

推论3：经过两条平行直线，有且只有一个平面.

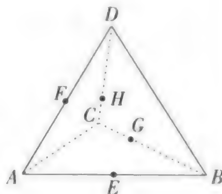
模板演练

答案详见 P389

1. 正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是 AB 和 AA_1 的中点. 求证：E, C, D_1, F 四点共面.



2. 如图，已知空间四面体 $ABCD$，E，F 分别是 AB，AD 的中点，G，H 分别是 BC，CD 上的点，且 $CG=\frac{1}{3}BC, CH=\frac{1}{3}DC$，求证 E, F, H, G 四点共面.



3. 已知 P, Q, R, S, M, N、分别为正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱 $AB, BC, CC_1, C_1D_1, A_1D_1, A_1A$ 的中点.

求证：P, Q, R, S, M, N 共面.

4. 证明：空间不共点且两两相交的四条直线在同一平面内.

数学名家伽罗华(四) 青年伽罗华一方面追求数学的真知，另一方面又献身于追求社会正义的事业. 在 1831 年法国的"七月革命"中，伽罗华率领群众走上街头，抗议国王的专制统治，不幸被捕. 在狱中，伽罗华仍然继续他的数学研究. 但出狱后不久，因为卷入一场纠葛而决斗身亡，死时不满 21 岁. 伽罗华去世后 16 年，他留存的 60 页手稿才得以发表，科学界才传遍了他的名字.



模板 2　证明线共点或点共线问题

模板探究

母题呈现	模板引入
如图,在空间四边形 $ABCD$ 中,E,F 分别是 AB,AD 的中点,G,H 分别是 BC,CD 上的点,且 $\frac{BG}{GC}=\frac{DH}{HC}=2$,求证:直线 EG,FH,AC 相交于一点.	本模板解决的是"证明线共点或点共线"的问题.
证明:$\because E,F$ 分别是 AB,AD 的中点, $\therefore EF /\!/ BD,EF=\frac{1}{2}BD$,又 $\frac{BG}{GC}=\frac{DH}{HC}=2$, $\therefore GH /\!/ BD,GH=\frac{1}{3}BD$,$\therefore$ 四边形 $EFHG$ 是梯形, 设两腰 EG,FH 相交于一点 T, $\because EG\subset$ 平面 $ABC,FH\subset$ 平面 ACD, $\therefore T\in$ 面 ABC,且 $T\in$ 面 ACD, 又平面 $ABC\cap$ 平面 $ACD=AC$,$\therefore T\in AC$, $\therefore$ 直线 EG,FH,AC 相交于一点.	第一步　根据已知条件,证明其中两条直线 EG,FH 相交,设相交于点 T. 第二步　根据公理 3,$\because AC=$平面 $ABC\cap$平面ACD,且$T\in$平面 $ABC,T\in$平面 ACD,$\therefore T\in AC$, 第三步　得证直线 EG,FH,AC 相交于一点.

模板攻略

1. 模板解决思路

(1)证明线共点的依据是公理 3. 证明线共点的思路是:先证两条直线交于一点,再证明第三条直线经过这点,把问题转化为证明点在直线上的问题.

(2)证明点共线的方法是利用公理 3,只需说明这些点都是两个平面的公共点,则必在这两个面的交线上.

2. 模板解决步骤

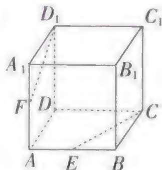
①第一步　分析三条直线,证明其中的两条直线相交于一点,且设点 P(或找出三点所在的两个平面,设出交线).

②第二步　利用公理 3 证明第三条直线经过点 P(或证明点都在这两个平面的交线上).

③第三步　得证三线共点(或得证多点共线).

3. 典型例题

典例 1　正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F 分别是 AB 和 AA_1 的中点. 求证:CE,D_1F,DA 三线共点.



证明:如图,连接 EF,CD_1,A_1B.

$\because EF /\!/ CD_1,EF<CD_1$,

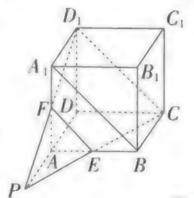
$\therefore CE$ 与 D_1F 必相交,设交点为 P,　①

则由 $P\in CE,CE\subset$ 平面 $ABCD$,

得 $P\in$ 平面 $ABCD$.

同理 $P\in$ 平面 ADD_1A_1.

又平面 $ABCD\cap$ 平面 $ADD_1A_1=DA$,



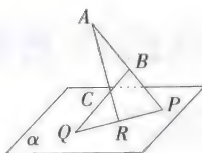
$\therefore P\in$ 直线 DA,　②

$\therefore CE,D_1F,DA$ 三线共点.　③

极限论的建立(一)　第一个为补救第二次数学危机提出真正有见地的意见的是达朗贝尔. 他在 1754 年指出,必须用可靠的理论去代替当时使用的粗糙的极限理论,但是他本人未能提供这样的理论. 最早使微积分严谨化的是拉格朗日. 为了避免使用无穷小推理和当时还不明确的极限概念,拉格朗日曾试图把整个微积分建立在泰勒展开式的基础上.



典例 2 已知$\triangle ABC$在平面α外,$AB\cap\alpha=P$,$AC\cap\alpha=R$,$BC\cap\alpha=Q$,如图.求证:P、Q、R三点共线.



证明:$\because AB\cap\alpha=P$,$\therefore P\in AB$,$P\in$平面α. ①

又$AB\subset$平面ABC.

$\therefore P\in$平面ABC. ①

$\therefore$由公理3可知:点P在平面ABC与平面α的交线上,同理可证Q、R也在平面ABC与平面α的交线上. ②

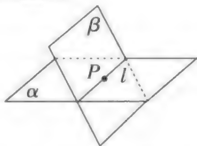
$\therefore P$、Q、R三点共线. ③

知识要点

公理 3

如果两个不重合的平面有一个公共点,那么它们有且只有一条过该点的公共直线.

符号表示:$P\in\alpha$,且$P\in\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=l$,且$P\in l$.



作用:(1)它是判断两个不重合平面是否相交的依据.如果两个不重合平面有一个公共点,那么这两个平面一定相交,且其交线一定过这个公共点.

(2)它可以找到两个平面的交线.如果两个平面有一个公共点,那么它们必定还有另外一个公共点,只要找出这两个平面的两个公共点,就找出了它们的交线.

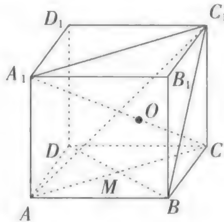
(3)它可以判定点在直线上.若点是某两个平面的公共点,线是这两个平面的交线,则这点在交线上.

模板演练

➡ 答案详见 P389

1. 三个平面两两相交于三条直线,若这三条直线不平行,求证:这三条直线交于一点.

2. 正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,对角线A_1C与平面BDC_1交于点O,AC、BD交于点M,求证:C_1、O、M三点共线.





极限论的建立(二) 但是,这样一来,考虑的函数范围太窄了,而且不用极限概念也无法讨论无穷级数的收敛问题.到了19世纪,出现了一批杰出的数学家,他们积极为微积分学的奠基工作而努力.首先要提到的是捷克的数学家波尔查诺,1816年,他在二项展开式的证明中,明确地提出了级数收敛的概念,同时对极限、连续和变量有了较深入的理解.

模板 3　求异面直线所成的角【5年8考】

模板探究

母 题 呈 现	模 板 引 入
如图，在三棱锥 C-ABD 中，E、F 分别是 AC 和 BD 的中点，若 $CD=2AB=4$，$EF\perp AB$，则 EF 与 CD 所成的角是 ________.	本模板解决的是“在立体几何中，求异面直线所成的角”的问题.
解析：取 CB 的中点 G，连接 EG，FG， $\because EG/\!/AB$，$FG/\!/CD$， $\therefore EF$ 与 CD 所成的角为 $\angle EFG$， 又 $\because EF\perp AB$，$\therefore EF\perp EG$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle EFG$，$EG=\frac{1}{2}AB=1$，$FG=\frac{1}{2}CD=2$， $\therefore \sin\angle EFG=\frac{1}{2}$，$\therefore \angle EFG=30°$， $\therefore EF$ 与 CD 所成的角为 $30°$. **答案：**$30°$	第一步　把异面直线 EF，CD 转化到一个平面中. 第二步　作出异面直线 EF，CD 所成的角：$\angle EFG$. 第三步　在 $\mathrm{Rt}\triangle EFG$ 中解出 $\angle EFG$，即为异面直线 EF，CD 所成角的大小.

模板攻略

1. 模板解决思路

求异面直线所成角的关键是作出异面直线所成的角，作两条异面直线所成的角的方法是：将其中一条平移到某个位置使其与另一条相交或将两条异面直线同时平移到某个位置使它们相交.

2. 模板解决步骤

①第一步　找：利用定义转化为平面角：对于异面直线所成的角，可固定一条，平移另一条，或两条同时平移到某个特殊的位置，顶点选在特殊的位置上.

②第二步　证：证明作出的角为所求角.

③第三步　求：把这个平面角置于一个三角形中，通过解三角形求角.

3. 典型例题

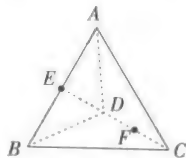
典例　在空间四面体 $ABCD$ 中，已知 E、F 分别是 AB、CD 的中点，且 $EF=5$，又 $AD=6$，$BC=8$，则 AD 与 BC 所成的角的大小是(　　).

A. $30°$

B. $60°$

C. $45°$

D. $90°$



思路分析：首先判断直线 AD 与 BC 是异面直线，然后根据求异面直线所成的角的步骤平移直线到相交位置，找出异面直线所成的角，并求值.

解析：如图，取 BD 的中点 G，连接 EG、GF，　①

根据题意有 $EG \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \frac{1}{2}AD$，$GF \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} \frac{1}{2}BC$，

极限论的建立(三)　特别是，他曾写出《无穷的悖论》一书，书中包含许多真知灼见，可是，在他去世两年后才得以出版. 分析学的奠基人，公认为是法国多产数学家柯西. 柯西在数学分析和置换群理论方面做了开拓性的工作，是最伟大的近代数学家之一. 他在 1821~1823 年间出版的《分析教程》和《无穷小计算讲义》是数学史上划时代的著作.



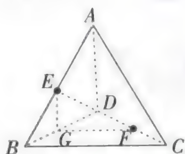
$\therefore$ 直线AD与BC所成的角即为直线 EG 与 GF 的夹角， ②

又$\because AD=6,BC=8$，

$\therefore EG=3,GF=4$，

在$\triangle EFG$中，$EF=5$，

$\therefore EF^2=EG^2+GF^2$，$\therefore \angle EGF=90°$，



则异面直线AD与BC所成的角的大小为$90°$. ③

答案:D

误区警示

两异面直线所成的角归结到一个三角形的内角时，容易忽视这个三角形的内角可能等于两异面直线所成的角，也可能等于其补角.

知识要点

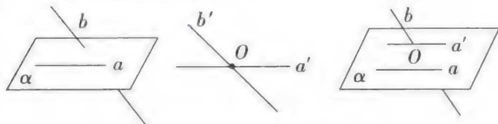
1. 异面直线

我们把不同在任何一个平面内的两条直线叫作异面直线.

为了表示异面直线 a,b 不共面的特点，作图时，通常用一个或两个平面衬托，如图：



2. 异面直线所成的角



如图，已知两条异面直线 a,b，经过空间任一点 O 作直线 $a'//a,b'//b$，把 a'与 b'所成的锐角（或直角）叫作异面直线 a 与 b 所成的角（或夹角）.

为了简便，点 O 常取在两条异面直线中的一条上，例如，取在直线 b 上，然后经过点 O 作直线 $a'//a$，a'和 b 所成的锐角（或直角）就是异面直线 a 与 b 所成的角.

如果两条异面直线所成的角是直角，那么我们就说这两条直线互相垂直. 两条互相垂直的异面直线 a,b，记作 $a\perp b$.

特别提示

(1)两条异面直线所成的角与点 O 位置的选取无关.

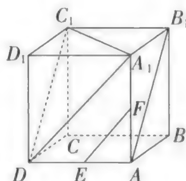
(2)两条异面直线所成角的范围是$(0°,90°]$.

模板演练

➡ 答案详见 P389

1. A 是$\triangle BCD$ 所在平面外的一点，E,F 分别是BC，AD 的中点.若 $AC\perp BD$，$AC=BD$，求 EF 与 BD 所成的角.

2. 如图，正方体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$，E,F 分别是 AD和 AA_1 的中点. 求直线 EF 和直线 AB_1 所成的角的大小.

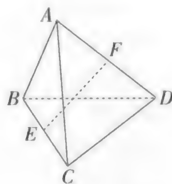




凯尔微博

极限论的建立(四) 在里面他给出了数学分析一系列基本概念的精确定义. 例如，他给出了精确的极限定义，然后用极限定义连续性、导数、微积分、定积分和无穷级数的收敛性，接着，魏尔斯特拉斯引进了精确的“ε—δ”语言. 这样，微积分就建立在严格的极限论的基础上了. 今天我们微积分课本中采用的体系和使用的定义，基本上就是柯西的，不过现在写得更加严格.

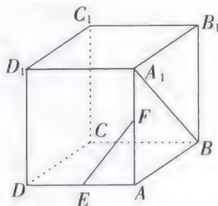
3. 空间四边形 $ABCD$ 中，$AB=CD$ 且 AB 与 CD 所成的角为 $30°$，E、F 分别为 BC、AD 的中点，求 EF 与 AB 所成角的大小.



4. 如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，E，F 分别是 AD、AA_1 的中点.

(1)求直线 A_1B 和 CC_1 所成的角的大小；

(2)求直线 A_1B 和 EF 所成的角的大小.

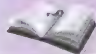


模板 4　线线平行的证明 【5 年 3 考】

模板探究

母题呈现	模板引入
如图，在三棱锥 $P-ABQ$ 中，$PB\perp$ 平面 ABQ，$BA=BP=BQ$，D，C，E，F 分别是 AQ，BQ，AP，BP 的中点，$AQ=2BD$，PD 与 EQ 交于点 G，PC 与 FQ 交于点 H，连接 GH. 求证：$AB\parallel GH$.	本模板解决的是“在立体几何中，证明直线 l 与直线 m 的平行”的问题.
证明： 因为 D，C，E，F 分别是 AQ，BQ，AP，BP 的中点， 所以 $EF\parallel AB$，$DC\parallel AB$. 所以 $EF\parallel DC$. 又 $EF\not\subset$ 平面 PCD，$DC\subset$ 平面 PCD， 所以 $EF\parallel$ 平面 PCD. 又 $EF\subset$ 平面 EFQ，平面 $EFQ\cap$ 平面 $PCD=GH$， 所以 $EF\parallel GH$. 又 $EF\parallel AB$，所以 $AB\parallel GH$.	第一步　将证明 $AB\parallel GH$ 转化为证明 $EF\parallel GH$. 第二步　根据“直线与平面平行的性质”可证 $EF\parallel GH$. 第三步　由平行的传递性证明 $AB\parallel GH$.

突破计算关(一)　“计算关”对中等和中等偏下的同学来说是最重要的了. 这一关度过得越早越好. 常看到有些人拿着发回来的卷子，看到自己会做而做错的题目，一拍脑袋“哎！气死我了！”你看过，听过吗？这一叹，表面上怨自己不该错，实际上对自己的粗心大意轻描淡写地放过了，下次后悔的还是他.



模板攻略

1. 模板解决思路

“线线-线面”之间平行的相互关系和相互转化，是线线、线面平行的判定与性质的实质，也是我们运用定理对平行进行证明的关系所在，判定线线平行的方法：

(1)利用定义：证明线线共面且无公共点.

(2)利用平行公理：证明两条直线同时平行于第三条直线.

(3)利用线面平行的性质定理：把证明线线平行转化为证明线面平行.

(4)利用面面平行的性质定理.

(5)利用线面垂直的性质定理.

2. 模板解决步骤

①第一步　寻找第三条直线 n，使得 n 与 l 和 m 均平行，则可证. 若没有，进入第②步.

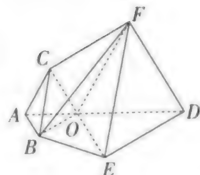
②第二步　找到一条线为两个平面的交线，利用线面平行或面面平行或线面垂直的性质去证明，若没有，进入第③步.

③第三步　找到或构造一个平面 α，使 l 和 m 在平面 α 内.

④第四步　在平面 α 上，利用平面几何知识证明平行.

3. 典型例题

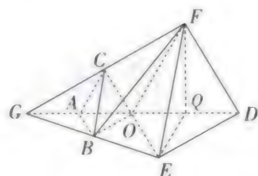
典例　(安徽高考节选)如图，$ABEDFC$ 为多面体，平面 $ABED$ 与平面 $ACFD$ 垂直，点 O 在线段 AD 上，$OA=1,OD=2$，$\triangle OAB,\triangle OAC,\triangle ODE,\triangle ODF$ 都是正三角形. 证明：直线 $BC/\!/EF$.



思路分析：由于题中多面体 $ABEDFC$ 的每个面都是一般多边形，图中平行关系很少，因此，只能首先证明 BC 与 EF 共面，然后利用平面几何知识解决.

证明：如图，设 G 是线段 DA 延长线与线段 EB 延长线的交点. 由于 $\triangle OAB$ 与 $\triangle ODE$ 都是正三角形，且 $OA=1,OD=2$，

所以 $OB \underline{/\!/} \frac{1}{2}DE$，$OG=OD=2$.



同理，设 G' 是线段 DA 延长线与线段 FC 延长线的交点，有 $OC \underline{/\!/} \frac{1}{2}DF$，$OG'=OD=2$.

又由于 G 和 G' 都在线段 DA 的延长线上，

所以 G 与 G' 重合. ③

在 $\triangle GED$ 和 $\triangle GFD$ 中，由 $OB \underline{/\!/} \frac{1}{2}DE$ 和 $OC \underline{/\!/} \frac{1}{2}DF$，可知 B,C 分别是 GE 和 GF 的中点，所以 BC 是 $\triangle GEF$ 的中位线，故 $BC/\!/EF$. ④

知识要点

1. 公理 4

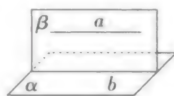
平行于同一条直线的两条直线互相平行.

此公理表述的性质通常叫作空间平行线的传递性.

符号表示：$a/\!/b,b/\!/c \Rightarrow a/\!/c$.

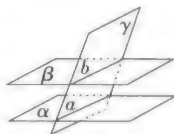
2. 直线与平面平行的性质

定理：一条直线与一个平面平行，则过这条直线的任一平面与此平面的交线与该直线平行.

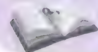


符号表示：$a/\!/\alpha,a\subset\beta,\alpha\cap\beta=b \Rightarrow a/\!/b$.

3. 平面与平面平行的性质



定理：如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们

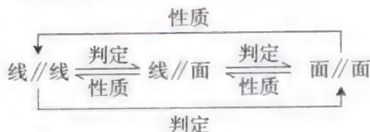


突破计算关(二)　粗心大意是很难克服的. 首先要提高认识并下大力气克服才行. 行之有效的方法是多动笔，加长演算过程. 如在去分母、移项等变换过程步步把关，表面上慢了，其实不错就是快！答题的快慢不在于书定的速度. 难改的事只要决心改，总会进步的. 仅凭这一项，就可把你的总分提高一两个档次！

的交线平行.

符号表示：$\alpha/\!/\beta,\alpha\cap\gamma=a,\beta\cap\gamma=b\Rightarrow a/\!/b$.

4. 线线、线面、面面的平行关系



（1）应用线面平行、面面平行的判定定理和性质，可以把空间问题转化为平面问题.

（2）“线线问题、线面问题、面面问题”的互相转化，体现了“化归思想”.

模板演练

➜ 答案详见 P390

1. 设 m,n 是两条不同的直线，α,β 是两个不同的平面，下列命题中正确的是(　　).

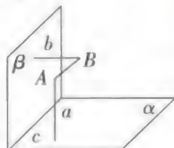
A. 若 $\alpha\perp\beta,m\subset\alpha,n\subset\beta$，则 $m\perp n$

B. 若 $\alpha/\!/\beta,m\subset\alpha,n\subset\beta$，则 $m/\!/n$

C. 若 $m\perp n,m\subset\alpha,n\subset\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

D. 若 $m\perp\alpha,m/\!/n,n/\!/\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

2. 已知：如图，直线 $a\perp\alpha$，直线 $b\perp\beta$，且 $AB\perp a$，$AB\perp b$，平面 $\alpha\cap\beta=c$. 求证：$AB/\!/c$.



模板 5　线面平行的证明【5 年 18 考】

模板探究

母 题 呈 现	模 板 引 入
（辽宁高考）如图，直三棱柱 $ABC-A'B'C'$，$\angle BAC=90°$，$AB=AC=\sqrt{2}$，$AA'=1$，点 M，N 分别为 $A'B$ 和 $B'C'$ 的中点. 证明：$MN/\!/$平面 $A'ACC'$.	本模板解决的是“在立体几何中，证明直线 l 与平面 α 平行”的问题.
证明：连接 AB'，AC'，如图，由已知 $\angle BAC=90°$，$AB=AC$，三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 为直三棱柱，所以 M 为 AB' 的中点. 又因为 N 为 $B'C'$ 的中点，所以 $MN/\!/AC'$. 又 $MN\not\subset$平面 $A'ACC'$，$AC'\subset$平面 $A'ACC'$，所以 $MN/\!/$平面 $A'ACC'$.	第一步　观察平面 $A'ACC'$ 内是否有与 MN 平行的线段. 没有发现. 第二步　连接 AB'，AC'，构造出平面 $B'AC'$ 与平面 $AA'C'C$ 相交，交线为 AC'. 第三步　利用平面几何知识证得 $MN/\!/AC'$. 第四步　利用线面平行的判定证得 $MN/\!/$平面 $A'ACC'$.

解决夹生饭　学习中的“夹生饭”是学不好的直接原因.“夹生饭”的形成是对知识理解不深，记忆不准确，没能及时复习巩固，做题缺乏反馈和联想. 比如：等差数列的通项公式是否是一次函数？如何判断一个和式是等比数列的前 n 项和？“夹生饭”解决的方法是通读课本及在做题中体会. 再把诸如分母不为零、被开偶次方的实数非负等注意起来，并形成习惯.



模板攻略

1. 模板解题思路

判定线面平行的方法:

(1)利用定义:证明直线 a 与平面 α 没有公共点,往往借助于反证法.

(2)利用直线与平面平行的判定定理.

(3)利用面面平行的性质.

2. 模板解决步骤

①第一步　首先观察直线 l 所在平面是否有与平面 α 平行的或平面 α 内是否有与直线 l 平行的线段,若有,可利用平面几何知识或面面平行的性质证明线线平行,再进入第④步;若没有,进入第②步.

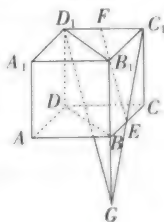
②第二步　过直线 l 的平面是否与平面 α 相交,若没有,则作辅助线构造一个;若有,进入第③步.

③第三步　证明直线 l 与两平面的交线平行.

④第四步　利用线面平行的判定证明结论.

3. 典型例题

典例 1　如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F 分别是棱 BC,C_1D_1 的中点,求证:EF//平面 BB_1D_1D.



证明:连接 C_1E,并延长交 B_1B 的延长线于 G,连接 D_1G.　②

因为 C_1C//B_1B,E 是 BC 的中点,

所以 E 是 C_1G 的中点.

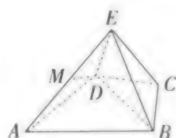
在 $\triangle C_1D_1G$ 中,F 是 C_1D_1 的中点,

E 是 C_1G 的中点,所以 EF//D_1G.　③

而 $EF\not\subset$平面 BB_1D_1D,$D_1G\subset$平面 BB_1D_1D.

所以 EF//平面 BB_1D_1D.　④

典例 2　(山东高考)如图,几何体 $E-ABCD$ 是四棱锥,$\triangle ABD$ 为正三角形,$CB=CD$,$EC\perp BD$.



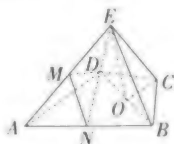
(1)求证:$BE=DE$;

(2)若 $\angle BCD=120°$,M 为线段 AE 的中点,求证:DM//平面 BEC.

证明:(1)取 BD 中点 O,连接 OC,OE,

$\because CB=CD$,$\therefore CO\perp BD$,

又已知 $EC\perp BD$,$EC\cap CO=C$,



$\therefore BD\perp$平面 OEC,$\therefore BD\perp EO$,

又$\because O$ 为 BD 中点,

$\therefore OE$ 为 BD 的中垂线,$\therefore BE=DE$.

(2)取 BA 的中点 N,连接 DN,MN.

$\because M$ 为 AE 的中点,$\therefore MN$//BE.

$\because\triangle ABD$ 为等边三角形,N 为中点,$\therefore DN\perp AB$,

$\because\angle DCB=120°$,$DC=BC$,

$\therefore\angle OBC=30°$,$\therefore\angle CBN=90°$,即 $BC\perp AB$,$\therefore DN$//BC,

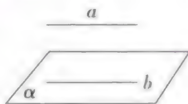
$\because DN\cap MN=N$,$BE\cap BC=B$,$\therefore$ 平面 MND // 平面 BEC,　①

又$\because DM\subset$平面 MND,$\therefore DM$//平面 BEC.　④

知识要点

1. 直线与平面平行的判定

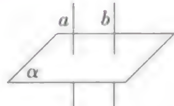
定理:平面外一条直线与此平面内的一条直线平行,则该直线与此平面平行.



符号表示:$a\not\subset\alpha$,$b\subset\alpha$,且 a//$b\Rightarrow a$//α.

2. 直线与平面垂直的性质

定理:垂直于同一个平面的两条直线平行.



符号表示:$a\perp\alpha$,$b\perp\alpha$ $\Rightarrow a$//b.

凯乐微博



注意体会数学思想方法(一)　近几年的高考数学试题不仅紧扣教材,而且还十分讲究数学思想和方法.转化的思想,函数与方程的思想,类比归纳与类比联想的思想,分类讨论的思想,数形结合的思想以及配方法、换元法、待定系数法、反证法等.这些基本思想和方法分散地渗透在高中数学教材的各章节之中.

模板演练

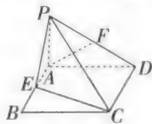
➔ 答案详见 P390

1. 过平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 任意两条棱的中点作直线,其中与平面 DBB_1D_1 平行的直线共有(　　).

A. 4 条　　B. 6 条　　C. 8 条　　D. 12 条

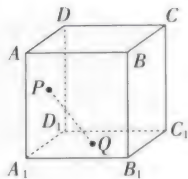
2. 若直线 $a//b$,且 $a//$平面 β,则 b 与 β 的位置关系是________.

3. 如图,若 $PA\perp$平面 $ABCD$,四边形 $ABCD$ 是矩形,E,F 分别是 AB,PD 的中点,求证:$AF//$平面 PCE.



4. 如图,设 P,Q 分别是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的面 AA_1D_1D 和面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心.

求证:$PQ//$平面 AA_1B_1B.



模板 6　面面平行的证明【5年3考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(江苏高考)如图,在三棱锥 $S-ABC$ 中,平面 $SAB\perp$平面 SBC,$AB\perp BC$,$AS=AB$. 过 A 作 $AF\perp SB$,垂足为 F,点 E,G 分别是棱 SA,SC 的中点. 求证:平面 $EFG//$平面 ABC.	本模板解决的是"在立体几何中,证明平面 α 与平面 β 平行"的问题.
证明:因为 $AS=AB,AF\perp SB$,垂足为 F, 所以 F 是 SB 的中点. 又因为 E 是 SA 的中点,所以 $EF//AB$. 因为 $EF\not\subset$平面 ABC,$AB\subset$平面 ABC, 所以 $EF//$平面 ABC. 同理 $EG//$平面 ABC. 又 $EF\cap EG=E$, 所以平面 $EFG//$平面 ABC.	第一步　选定平面 ABC,根据已知条件,在平面 EFG 中找两条相交直线与平面 ABC 平行. 第二步　利用平面几何知识证明 $EF//$平面 ABC,$EG//$平面 ABC. 第三步　利用面面平行的判定证明结论.

注意体会数学思想方法(二)　在平时的学习中,我们不仅要把主要精力集中于具体的数学内容之中,而且还要对基本的数学思想和方法进行归纳和总结,帮助我们掌握科学的解题方法,从而达到学习知识,培养能力的目的. 只有这样,我们在高考中才能灵活运用所学的知识更好地解决问题.



模板攻略

1. 模板解决思路

证明面面平行的方法:

(1)利用面面平行的定义.

(2)利用面面平行的判定定理.

(3)垂直于同一条直线的两个平面平行.

(4)平行于同一个平面的两个平面平行.

从思维方法的角度来看,要进行平行的证明,往往先从题目的结论出发去选择相应的判定方法并进行"逆向思维". 当逆推出现困难时,应进行"正向思维",即根据题目的已知去联想和推导有关的性质,使题设和结论逐步靠近,并最终产生联系和沟通,找到证明思路.

2. 模板解决步骤

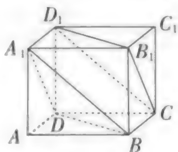
①第一步　首先观察是否有一条直线与 α 和 β 垂直,若有,利用线面垂直的性质证明;若没有,进入第②步.

②第二步　选定一个平面,如平面 α,证明 α 内有两条相交直线都与平面 β 平行.

③第三步　利用面面平行的判定证明结论.

3. 典型例题

典例 1　如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,求证:平面 A_1BD//平面 CD_1B_1.



证明:$\because B_1B \underline{\mathbin{/\!/}} A_1A$,$A_1A \underline{\mathbin{/\!/}} D_1D$,

$\therefore B_1B \underline{\mathbin{/\!/}} D_1D$,

$\therefore$ 四边形 BB_1D_1D 是平行四边形. $\therefore D_1B_1$//DB,

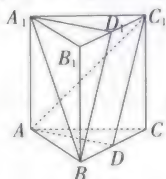
又 $\because DB \subset$ 平面 A_1BD,$D_1B_1 \not\subset$ 平面 A_1BD,

$\therefore D_1B_1$//平面 A_1BD.

同理 B_1C//平面 A_1BD.　②

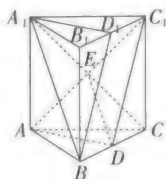
又 $\because D_1B_1 \cap B_1C=B_1$,$\therefore$ 平面 CD_1B_1//平面 A_1BD.　③

典例 2　如图,三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$,D 是 BC 上一点,且 A_1B//平面 AC_1D,D_1 是 B_1C_1 的中点.



求证:平面 A_1BD_1//平面 AC_1D.

证明:连接 A_1C,交 AC_1 于点 E,



$\because$ 四边形 A_1ACC_1 是平行四边形,

$\therefore E$ 是 A_1C 的中点,连接 ED,

$\because A_1B$//平面 AC_1D,

平面 $A_1BC \cap$ 平面 $AC_1D=ED$,

$\therefore A_1B$//ED,

$\because E$ 是 A_1C 的中点,$\therefore D$ 是 BC 的中点,

又 $\because D_1$ 是 B_1C_1 的中点,

$\therefore BD_1$//C_1D,A_1D_1//AD,

又 $A_1D_1 \cap BD_1=D_1$,$AD \cap C_1D=D$,　②

$\therefore$ 平面 A_1BD_1//平面 AC_1D.　③

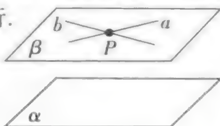
误区警示

在使用判定定理和性质定理进行推理论证时要使条件完备,即要有充足的条件保证得出的结论准确,特别是面面平行的判定定理,其中有五个条件,在使用时要把这五个条件都列出.

知识要点

平面与平面平行的判定

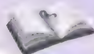
定理:一个平面内的两条相交直线与另一个平面平行,则这两个平面平行.



符号表示:$a \subset \beta$,$b \subset \beta$,$a \cap b=P$,a//α,b//$\alpha \Rightarrow \beta$//α.

推论:一个平面内的两条相交直线分别平行于另一个平面的两条直线,那么这两个平面互相平行.

符号表示:$a,b \subset \alpha$,$a \cap b=O$,$a' \subset \beta$,$b' \subset \beta$,a//a',b//$b' \Rightarrow \alpha$//β.



函数思想(一)　中学数学,特别是中学代数,可谓是以函数为中心(纲). 集合的学习,为求函数定义域和值域打下了基础;映射的引入,使函数的核心——对应法则更显现其本质;单调性、奇偶性、周期性的研究,是对函数更深入更细致的刻画;函数与反函数的研究,辩证地全面地看待事物之间的制约关系.

必修2

模板演练

➡ 答案详见 P391

1. 已知 m,n 是两条不同的直线，α,β,γ 是三个不同平面，下列命题中正确的是(　　).

A. 若 $m/\!/\alpha,n/\!/\alpha$，则 $m/\!/n$

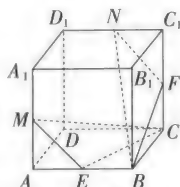
B. 若 $\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma$，则 $\alpha/\!/\beta$

C. 若 $m/\!/\alpha,m/\!/\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$

D. 若 $m\perp\alpha,n\perp\alpha$，则 $m/\!/n$

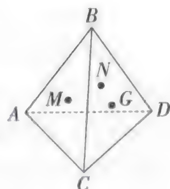
2. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F,M,N 分别是棱 AB,CC_1,AA_1,C_1D_1 的中点.

求证：平面 $CEM/\!/$平面 BFN.



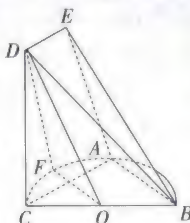
3. 如图，B 为 $\triangle ACD$ 所在平面外一点，M,N,G 分别为 $\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle BCD$ 的重心.

求证：平面 $MNG/\!/$平面 ACD.



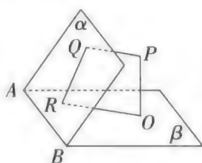
4. 如图，已知 BC 是半径为 1 的半圆 O 的直径，A 是半圆周上不同于 B,C 的点，F 为 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点. 梯形 $ACDE$ 中，$DE/\!/AC,AC=2DE$.

求证：平面 $OFD/\!/$平面 BAE.



模板 7　线线垂直的证明【5年9考】

模板探究

母 题 呈 现	模 板 引 入
已知 $\alpha\cap\beta=AB,PQ\perp\alpha$ 于 $Q,PO\perp\beta$ 于 $O,OR\perp\alpha$ 于 R，求证：$QR\perp AB$.	本模板解决的是“在立体几何中，证明直线 l 与直线 m 垂直”的问题.
证明： 如图，$\because\alpha\cap\beta=AB,PO\perp\beta,\therefore PO\perp AB$. $\because PQ\perp\alpha,\therefore PQ\perp AB$. $\because PO\cap PQ=P,\therefore AB\perp$平面 PQO. $\because OR\perp\alpha,\therefore PQ/\!/OR$. $\therefore PQ$ 与 OR 确定平面 $PQRO$. 即 $AB\perp$平面 $PQRO$. 又 $\because QR\subset$平面 $PQRO,\therefore QR\perp AB$. 	第一步　利用已知条件证明$AB\perp$平面 PQO. 第二步　根据已知证明平面 PQO 与平面 $PQRO$ 是一个平面，且 $QR\subset$平面 $PQRO$. 第三步　利用线面垂直的定义得证.

函数思想(二)　数列可以看成是特殊的函数. 解方程 $f(x)=0$，就是求函数 $y=f(x)$ 的零点；解不等式 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$，就是求函数 $y=f(x)$ 取正值、负值的区间；函数极限的研究，导数、微分、积分的研究，也完全是以函数为对象、为中心的. 一句话，抓住了函数，就牵起了中学代数的“牛鼻子”.



模板攻略

1. 模板解决思路

要证明线线垂直，一般情况下只需先证线面垂直，故考虑应用线面垂直的定义或判定定理证明，从而得到所需结论.若解题时没有线面垂直的可证条件，就需考虑证明两直线所成角为90°或利用平面几何知识通过平移证明线线垂直.

2. 模板解决步骤

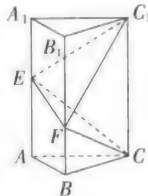
①第一步　寻找或构造一个过直线 l 的平面，证明直线 m 垂直于该平面，若有，则利用线面垂直的性质可证；若没有，则进入第2步.

②第二步　证明两直线所成的角为90°，若没有，则进入第3步.

③第三步　将两直线平移到同一平面内，利用平面几何知识证明.

3. 典型例题

典例　如图，已知正三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的底面边长为2，侧棱长为 $3\sqrt{2}$，点 E 在侧棱 AA_1 上，点 F 在侧棱 BB_1 上，且 $AE=2\sqrt{2}$，$BF=\sqrt{2}$. 求证：$CF\perp C_1E$.



证明：由已知可得 $CC_1=3\sqrt{2}$，

$CE=C_1F=\sqrt{2^2+(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$，

$EF^2=AB^2+(AE-BF)^2$，

$EF=C_1E=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$.

于是有 $EF^2+C_1E^2=C_1F^2$，$CE^2+C_1E^2=CC_1^2$.

所以 $C_1E\perp EF$，$C_1E\perp CE$.

又 $EF\cap CE=E$，所以 $C_1E\perp$ 平面 CEF.　①

又 $CF\subset$ 平面 CEF，故 $CF\perp C_1E$.

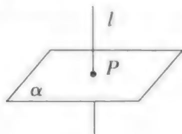
知识要点

1. 直线与平面垂直的定义

如果直线 l 与平面 α 内的任意一条直线都垂直，我们就说直线 l 与平面 α 互相垂直，记作 $l\perp\alpha$. 直线 l 叫做平面 α 的垂线，平面 α 叫作直线 l 的垂面. 直线与平面垂直时，它们唯一的公共点叫作垂足.

2. 画法

画直线与平面垂直时，通常把直线画成与表示平面的平行四边形的一边垂直.



特别提示

(1)注意定义中的“任意一条直线”，它与“所有直线”是同义语，但与“无数条直线”不同，定义的实质就是直线和平面内的所有直线都垂直.

(2)直线与平面垂直是直线和平面相交的一种特殊形式.

(3)定义可以用来判定线线垂直，即当直线和平面垂直时，那么直线就垂直于这个平面内的任何一条直线，可以作为线线垂直的判定定理.

(4)两个重要结论：

①过一点有且只有一条直线和已知平面垂直.

②过一点有且只有一个平面和已知直线垂直.

模板演练

➡ 答案详见 P391

1. 一条直线和三角形的两边都垂直，则这条直线和三角形的第三边的位置关系是(　　).

A. 平行　　B. 垂直

C. 相交但不垂直　　D. 不确定



数形结合思想(一)　所谓数形结合，就是根据数与形之间的对应关系，通过数与形的相互转化来解决数学问题的思想，实现数形结合，常与以下内容有关：(1)实数与数轴上的点的对应关系；(2)函数与图象的对应关系；(3)曲线与方程的对应关系；(4)以几何元素和几何条件为背景，建立起来的概念，如复数、三角函数等；(5)所给的等式或代数式的结构含有明显的几何意义.

2. 设 l,m 是两条不同的直线,α 是一个平面,则下列命题正确的是(　　).

A. 若 $l\perp m,m\subset\alpha$,则 $l\perp\alpha$

B. 若 $l\perp\alpha,l/\!/m$,则 $m\perp\alpha$

C. 若 $l/\!/\alpha,m\subset\alpha$,则 $l/\!/m$

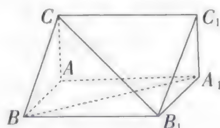
D. 若 $l/\!/\alpha,m/\!/\alpha$,则 $l/\!/m$

3. 直线 a 与直线 b 垂直,直线 $b\perp$ 平面 α,则直线 a 与平面 α 的位置关系是(　　).

A. $a\perp\alpha$　　B. $a/\!/\alpha$

C. $a\subset\alpha$　　D. $a\subset\alpha$ 或 $a/\!/\alpha$

4. (陕西高考)直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AB=AA_1$,$\angle CAB=\frac{\pi}{2}$.证明 $CB_1\perp BA_1$.



必修2

模板 8　线面垂直的证明【5年17考】

模板探究

母题呈现	模板引入
如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E 是 BB_1 的中点,O 是底面正方形 $ABCD$ 的中心,求证:$OE\perp$ 平面 ACD_1.	本模板解决的是"在立体几何中,证明直线 l 垂直于平面 α"的问题.
证明:连接 B_1D,A_1D,在 $\triangle B_1BD$ 中, $\because E,O$ 分别是 B_1B 和 DB 的中点, $\therefore EO/\!/B_1D$. $\because A_1B_1\perp$ 面 AA_1D_1D,$\therefore A_1B_1\perp AD_1$, 又 $\because AD_1\perp A_1D$,$\therefore AD_1\perp$ 平面 A_1B_1D, $\therefore AD_1\perp B_1D$. 同理可证 $B_1D\perp CD_1$. 又 $\because AD_1\cap CD_1=D_1,AD_1,D_1C\subset$ 平面 ACD_1, $\therefore B_1D\perp$ 平面 ACD_1. $\because B_1D/\!/OE$,$\therefore OE\perp$ 平面 ACD_1.	第一步　观察 OE 与平面 ACD_1 的关系,寻找到起桥梁作用的 $B_1D(OE/\!/B_1D)$. 第二步　利用正方体的性质及线面垂直的判定证明 $B_1D\perp$ 平面 ACD_1. 第三步　因为 $B_1D/\!/OE$,所以得证结论.

模板攻略

1. 模板解决思路

直线与平面垂直的判断和证明方法:

(1)利用定义.

(2)利用判定定理.

(3)如果两条平行线中的一条直线垂直于一个平面,那么另一条也垂直于这个平面.

数形结合思想(二)　数形结合的重点是研究"以形助数".运用数形结合思想,不仅直观而且易发现解题途径,还能避免复杂的计算与推理,大大简化了解题过程.这在解选择题、填空题中更显其优越性,要注意培养这种思想意识,要争取做到"胸中有图,见数想图",从而开拓自己的思维视野.



(4)两个平面垂直的性质定理.

(5)如果一条垂线垂直于两个平行平面中的一个平面,它也垂直于另一个平面.

2. 模板解决步骤

①第一步　首先观察过直线 l 的平面是否有与平面 α 垂直的,若有,则利用面面垂直的性质可证;若没有,则进入第②步.

②第二步　在平面 α 内寻找或构造两条相交直线,证明 l 与两相交直线均垂直.

③第三步　利用线面垂直的判定证明结论.

3. 典型例题

典例　(北京高考)如图 1,在 Rt$\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,D,E 分别为 AC,AB 的中点,点 F 为线段 CD 上的一点.将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起到 $\triangle A_1DE$ 的位置,使 $A_1F\perp CD$,如图 2.

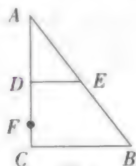


图 1

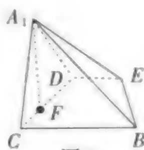


图 2

(1)求证:$DE/\!/$平面 A_1CB;

(2)求证:$A_1F\perp BE$;

(3)线段 A_1B 上是否存在点 Q,使 $A_1C\perp$平面 DEQ?说明理由.

解:(1)证明:在图1中,$\because D,E$分别为AC,AB的中点,

$\therefore DE/\!/BC$,

又$\because BC\subset$平面A_1CB,$DE\not\subset$平面A_1CB,

$\therefore DE/\!/$平面A_1CB.

(2)证明:在图1中,$\because \angle C=90°$,$\therefore AC\perp BC$,

又$\because DE/\!/BC$,$\therefore DE\perp AC$,

$\therefore$在图2中,$DE\perp A_1D$,$DE\perp CD$,

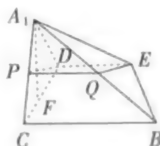
$\therefore DE\perp$平面A_1DC.$\because A_1F\subset$平面A_1DC,$\therefore DE\perp A_1F$,

又$\because A_1F\perp CD$,$CD\cap DE=D$,$\therefore A_1F\perp$平面$BCDE$,

$\therefore A_1F\perp BE$.

(3)线段A_1B上存在点Q,使$A_1C\perp$平面DEQ.

原因如下:



如图,分别取A_1C,A_1B的中点P,Q,则$PQ/\!/BC$,

$\because DE/\!/BC$,$\therefore DE/\!/PQ$,

$\therefore$平面DEQ即为平面DEP.

由(2)知,$DE\perp$平面A_1DC,$\therefore DE\perp A_1C$,

$\because A_1D=DC$,P为A_1C的中点,$\therefore A_1C\perp DP$,　②

$\therefore A_1C\perp$平面DEP,即$A_1C\perp$平面DEQ.　③

故线段A_1B上存在点Q,使$A_1C\perp$平面DEQ.

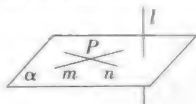
误区警示

在用线面垂直的判定定理证明线面垂直时,易忽视说明平面内的两条直线相交,而导致被扣分,这一点在证明中要注意口诀:线不在多,重在相交.

知识要点

1. 直线与平面垂直的判定

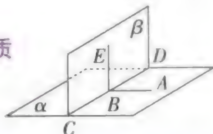
定理:一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直,则该直线与此平面垂直.



符号表示:$m\subset\alpha$,$n\subset\alpha$,$m\cap n=P$,$l\perp m$,$l\perp n\Rightarrow l\perp\alpha$.

2. 平面与平面垂直的性质

定理:两个平面垂直,则一个平面内垂直于交线的直线与另一个平面垂直.



符号表示:$\alpha\perp\beta$,$\alpha\cap\beta=CD$,$AB\subset\alpha$,$AB\perp CD$,且$AB\cap CD=B\Rightarrow AB\perp\beta$.

特别提示

(1)如果两个平面互相垂直,那么过一个平面内一点和另一个平面垂直的直线,必在此平面内.

(2)如果一个平面和两个相交平面都垂直,那么两个相交平面的交线与此平面垂直.

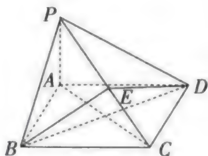


分类讨论思想(一)　所谓分类讨论,就是当问题所给的对象不能进行统一研究时,就需要对研究对象按某个标准分类,然后对每一类分别研究得出每一类的结论,最后综合各类结果得到整个问题的解答.实质上,分类讨论是"化整为零,各个击破,再积零为整"的数学策略.

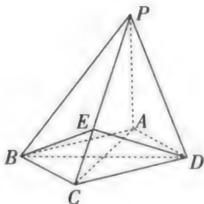
模板演练

➡ 答案详见 P392

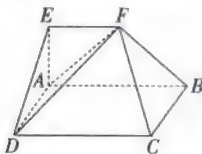
1. 如图所示,在四棱锥 P-$ABCD$ 中,$PA\perp$平面 $ABCD$,点 E 在线段 PC 上,$PC\perp$平面 BDE. 证明:$BD\perp$平面 PAC.



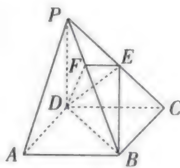
2. (全国高考节选)如图,四棱锥 P-$ABCD$ 中,底面 $ABCD$为菱形,$PA\perp$底面 $ABCD$,$AC=2\sqrt{2}$,$PA=2$,E 是 PC 上的一点,$PE=2EC$.
证明:$PC\perp$平面 BED.



3. 如图,在多面体 $ABCDEF$ 中,四边形 $ABCD$ 是矩形,在四边形 $ABFE$ 中,$AB/\!/EF$,$\angle EAB=90°$,$AB=2$,$AD=AE=EF=1$,平面 $ABFE\perp$平面 $ABCD$.
证明:$AF\perp$平面 BCF.



4. 如图,在四棱锥 P-$ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是正方形,侧棱 $PD\perp$底面 $ABCD$,$PD=DC$,E 是 PC 的中点,过 E 点作 $EF\perp PB$ 交 PB 于点 F.
求证:$PB\perp$平面 EFD.

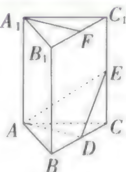


分类讨论思想(二)　分类原则:分类的对象确定,标准统一,不重复,不遗漏,分层次,不越级讨论. 分类方法:(1)明确讨论对象,确定对象的全体,确定分类标准,正确进行分类;(2)逐类进行讨论,获取阶段性成果;(3)归纳小结,综合得出结论.



模板 9 面面垂直的证明 【5年16考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(江苏高考节选)如图,在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中,$A_1B_1=A_1C_1$,D,E分别是棱BC,CC_1上的点(点D不同于点C),且$AD\perp DE$,F为B_1C_1的中点. 求证:平面$ADE\perp$平面BCC_1B_1. 	本模板解决的是"在立体几何中,证明平面α与平面β垂直"的问题.
证明:因为$ABC-A_1B_1C_1$是直三棱柱, 所以$CC_1\perp$平面ABC, 又$AD\subset$平面ABC,所以$CC_1\perp AD$. 因为$AD\perp DE$,$CC_1,DE\subset$平面BCC_1B_1,$CC_1\cap DE=E$, 所以$AD\perp$平面BCC_1B_1. 又$AD\subset$平面ADE, 所以平面$ADE\perp$平面BCC_1B_1.	第一步 在平面ADE内找一直线AD,在平面BCC_1B_1内找两相交直线DE,CC_1,并证明$AD\perp DE$,$AD\perp CC_1$. 第二步 由$DE\cap CC_1=E$,得$AD\perp$平面BCC_1B_1. 第三步 由$AD\subset$平面ADE,得平面$ADE\perp$平面BCC_1B_1.

模板攻略

1. 模板解决思路

证明平面与平面垂直的方法:

(1)利用定义:证明二面角的平面角为直角.

(2)利用面面垂直的判定定理.

垂直问题的关键是线面垂直,通过线线垂直证明线面垂直,通过线面垂直证明面面垂直,在解决垂直问题中要把这些垂直关系理清,确定合理的推理论证顺序.

2. 模板解决步骤

①第一步 在要证的两个垂直平面α,β内分别找一条直线$l\subset\alpha$和两个相交直线$m,n\subset\beta$.并分别证明$l\perp m,l\perp n$.

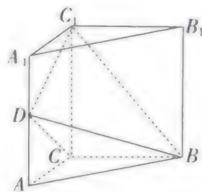
②第二步 由线面垂直的判定定理易得$l\perp\beta$.

③第三步 利用面面垂直的判定证明结论.

④第四步 也可以考虑证明两平面所成的二面角是直角.

3. 典型例题

典例 1 (新课标全国高考)如图,三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中,侧棱垂直底面,$\angle ACB=90°$,$AC=BC=\frac{1}{2}AA_1$,D是棱AA_1的中点.



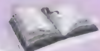
(1)证明:平面$BDC_1\perp$平面BDC;

(2)平面BDC_1分此棱柱为两部分,求这两部分体积的比.

解:(1)证明:由题设知$BC\perp CC_1$,$BC\perp AC$,$CC_1\cap AC=C$,所以$BC\perp$平面ACC_1A_1.

又$DC_1\subset$平面ACC_1A_1,所以$DC_1\perp BC$. ①

由题设知$\angle A_1DC_1=\angle ADC=45°$,所以$\angle CDC_1=90°$,



转化思想(一) 将未知解法或难以解决的问题,通过观察、分析、类比、联想等思维过程,选择运用恰当的数学方法变换,化归为在已知知识范围内已经解决或容易解决的问题的思想叫做化归与转化的思想.化归与转化思想的实质是揭示联系,实现转化.

即 $DC_1 \perp DC$. ①

又因为 $DC \cap BC=C$，所以 $DC_1 \perp$ 平面 BDC. ②

又 $DC_1 \subset$ 平面 BDC_1，故平面 $BDC_1 \perp$ 平面 BDC. ③

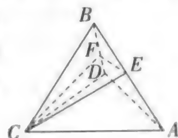
(2)设棱锥 $B-DACC_1$ 的体积为 V_1，$AC=1$，由题意得 $V_1=\frac{1}{3}\times\frac{1+2}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$.

又三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积 $V=1$，

所以 $(V-V_1):V_1=1:1$.

故平面 BDC_1 分此棱柱所得两部分体积的比为 $1:1$.

典例 2 （江苏高考）如图所示，在四面体 $ABCD$ 中，$CB=CD$，$AD\perp BD$，点 E，F 分别是 AB，BD 的中点.



求证：(1)直线 $EF/\!/$平面 ACD；

(2)平面 $EFC\perp$平面 BCD.

思路分析：要证线面平行，应用线面平行的判定定理，即只需在平面中找到一条直线和已知直线平行.而证明面面垂直只需要在一个面中找到和另一个面垂直的线即可.

证明：(1)在 $\triangle ABD$ 中，因为 E，F 分别是 AB，BD 的中点，

所以 $EF/\!/AD$. 又 $AD\subset$ 平面 ACD，$EF\not\subset$ 平面 ACD，

所以直线 $EF/\!/$平面 ACD.

(2)在 $\triangle ABD$ 中，因为 $AD\perp BD$，$EF/\!/AD$，

所以 $EF\perp BD$. ①

在 $\triangle BCD$ 中，因为 $CD=CB$，F 为 BD 的中点，

所以 $CF\perp BD$. ①

因为 $EF\subset$ 平面 EFC，$CF\subset$ 平面 EFC，EF 与 CF 交于点 F，

所以 $BD\perp$ 平面 EFC. ②

又因为 $BD\subset$ 平面 BCD，

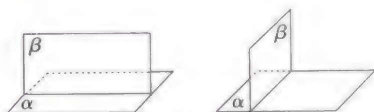
所以平面 $EFC\perp$ 平面 BCD. ③

知识要点

1. 平面与平面垂直

(1)定义：一般地，两个平面相交，如果它们所成的二面角是直二面角，就说这两个平面互相垂直.

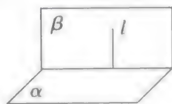
(2)画法及表示：两个互相垂直的平面，通常把直立平面的竖边画成与水平平面的横边垂直(如图). 平面 α 与 β 垂直，记作 $\alpha\perp\beta$.



2. 平面与平面垂直的判定

定理：一个平面过另一个平面的垂线，则这两个平面垂直.

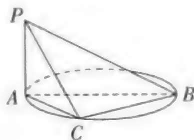
符号表示：$l\perp\alpha$，$l\subset\beta\Rightarrow\alpha\perp\beta$.



模板演练

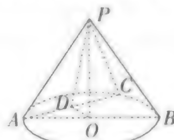
➡ 答案详见 P392

1. 如图，AB 是圆的直径，PA 垂直圆所在的平面，C 是圆上的点.求证：平面 $PAC\perp$平面 PBC.

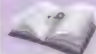


2. （湖南高考节选）如图，在圆锥 PO 中，已知 $PO=\sqrt{2}$，$\odot O$ 的直径 $AB=2$，C 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点，D 为 AC 的中点.

证明：平面 $POD\perp$平面 PAC.

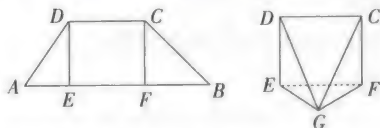


转化思想(二) 熟练、扎实地掌握基础知识、基本技能和基本方法是转化的基础；丰富的联想、机敏细微的观察、比较、类比是实现转化的桥梁；培养训练自己自觉的化归与转化意识需要对定理、公式、法则有本质上的深刻理解和对典型习题的总结和提炼，要积极主动有意识地去发现事物之间的本质联系."抓基础，重转化"是学好中学数学的金钥匙.



3. 过 S 引三条长度相等但不共面的线段 SA，SB，SC，且 $\angle ASB=\angle ASC=60°$，$\angle BSC=90°$，求证：平面 $ABC\perp$ 平面 BSC.

4.（江西高考）如图，在梯形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，E，F 是线段 AB 上的两点，且 $DE\perp AB$，$CF\perp AB$，$AB=12$，$AD=5$，$BC=4\sqrt{2}$，$DE=4$. 现将 $\triangle ADE$，$\triangle CFB$ 分别沿 DE，CF 折起，使 A，B 两点重合于点 G，得到多面体 $CDEFG$.



(1)求证：平面 $DEG\perp$ 平面 CFG；

(2)求多面体 $CDEFG$ 的体积.

必修2

模板 10　求直线与平面所成的角【5年10考】

模板探究

母题呈现	模板引入
如图，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\perp DC$，$AD/\!/BC$，$PD:DC:BC=1:1:\sqrt{2}$. 求 PB 与平面 PDC 所成角的大小.	本模板解决的是"在立体几何中，求直线与平面所成的角（或三角函数值）"的问题.
解：由 $PD\perp$ 平面 $ABCD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，得 $PD\perp BC$. 又 $AD\perp DC$，$AD/\!/BC$ 得 $BC\perp DC$. 又 PD 与 DC 相交，$\therefore BC\perp$ 平面 PDC. 即 $\angle BPC$ 为直线 PB 与平面 PDC 所成的角. 令 $PD=1$，则 $DC=1$，$BC=\sqrt{2}$，得 $PC=\sqrt{2}$. 又 $\angle BCP=90°$， $\therefore$ 在 Rt$\triangle PBC$ 中，由 $PC=BC$ 得 $\angle BPC=45°$， 即直线 PB 与平面 PDC 所成的角为 $45°$.	第一步　找出直线 PB 与平面 PDC 所成的角 $\angle BPC$. 第二步　利用已知条件解 $\triangle PBC$. 第三步　求得结论.



第一个 100 分（一）　童第周（1902~1979）是我国实验胚胎学的主要创始人，他 17 岁才到学校读书，18 岁考入一所教会学校的三年级当插班生. 由于基础差，他在中学读书时十分吃力，第一学期总平均分数只有 45 分. 学校令其退学或留级，经过他的再三请求，校长才允许他跟班试读一学期. 他每天早晨天不亮就起床苦读，晚上跑到马路上靠路灯自修.

模板攻略

1. 模板解决思路

求线面角的关键是找出或构造出直线与平面所成的角，确定斜线在平面内的射影是作角的关键，几何图形的特征是找射影的依据，然后把该角归结在某个三角形中，通过解三角形，求出该角.

2. 模板解决步骤

①第一步　判断直线与平面的关系：平行、垂直还是斜交.

②第二步　若是斜交，则找出或构造出直线与平面所成的角，即直线与平面内的射影所成的角.

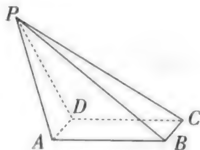
③第三步　将直线与平面所成的角转化到一个三角形中求解，算出角的大小或三角函数值.

3. 典型例题

典例　(天津高考)如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是矩形，$AD\perp PD$，$BC=1$，$PC=2\sqrt{3}$，$PD=CD=2$.

(1)求异面直线 PA 与 BC 所成角的正切值；

(2)证明：平面 $PDC\perp$ 平面 $ABCD$；



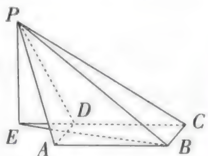
(3)求直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值.

解：(1)如图所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，因为底面 $ABCD$ 是矩形，所以 $AD=BC$ 且 $AD//BC$. 故 $\angle PAD$ 为异面直线 PA 与 BC 所成的角.

又因为 $AD\perp PD$，在 $Rt\triangle PDA$ 中，$\tan\angle PAD=\frac{PD}{AD}=2$，所以异面直线 PA 与 BC 所成角的正切值为 2.

(2)证明：由于底面 $ABCD$ 是矩形，故 $AD\perp CD$. 又因为 $AD\perp PD$，$CD\cap PD=D$，所以 $AD\perp$ 平面 PDC. 而 $AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以平面 $PDC\perp$ 平面 $ABCD$.

(3)在平面 PDC 内，过点 P 作 $PE\perp CD$ 交直线 CD 于点 E，连接 EB.



由于平面 $PDC\perp$ 平面 $ABCD$，而直线 CD 是平面 PDC 与平面 $ABCD$ 的交线，故 $PE\perp$ 平面 $ABCD$. 由此得 $\angle PBE$ 为直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角.　①~②

在 $\triangle PDC$ 中，由于 $PD=CD=2$，$PC=2\sqrt{3}$，可得 $\angle PCD=30°$.

在 $Rt\triangle PEC$ 中，$PE=PC\sin30°=\sqrt{3}$.

由 $AD//BC$，$AD\perp$ 平面 PDC，得 $BC\perp$ 平面 PDC，因此 $BC\perp PC$.

在 $Rt\triangle PCB$ 中，$PB=\sqrt{PC^2+BC^2}=\sqrt{13}$.

在 $Rt\triangle PEB$ 中，$\sin\angle PBE=\frac{PE}{PB}=\frac{\sqrt{39}}{13}$.

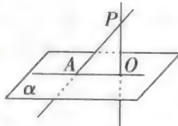
所以直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{39}}{13}$.　③

知识要点

1. 平面的斜线

一条直线 PA 与一个平面 α 相交，但不和这个平面垂直，这条直线叫作这个平面的斜线，斜线与平面的交点叫作斜足.

2. 直线与平面所成的角



过斜线上斜足以外的一点向平面引垂线 PO，过垂足 O 和斜足 A 的直线 AO 叫作斜线在这个平面上的射影. 平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角，叫作这条直线和这个平面所成的角(如图所示).

一条直线垂直于平面，我们说它们所成的角是直角；一条直线和平面平行，或在平面内，我们说它们所成的角是0°的角.

特别提示

(1)直线与平面所成角 θ 的范围是 $0°\leq\theta\leq90°$. 斜线与平面所成的角 θ 的范围是 $0°<\theta<90°$.

(2)斜线与平面所成的角是斜线与平面中所有直线所成角中最小的角.

第一个100分(二)　试读结束时，他的总平均分数达到七十多，几何还考了100分. 童第周28岁时留学比利时，他的老师布拉舍多年从事剥除青蛙卵膜手术，却没有成功. 童第周知道这种手术很难做，但他知难而上，不声不响地搞成了，这下子震动了他的欧洲同行. 老师高兴地说："童小子真行！"1978年夏天，几个文艺界的同志曾问童第周，解放前有哪些事情使他特别高兴.



模板演练 ➡ 答案详见 P393

1.（山东高考）已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧棱与底面垂直，体积为 $\frac{9}{4}$，底面是边长为 $\sqrt{3}$ 的正三角形，若 P 为底面 $A_1B_1C_1$ 的中心，则 PA 与平面 ABC 所成角的大小为（　　）.

A. $\frac{5\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

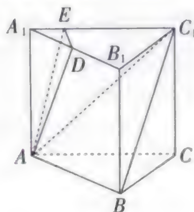
2. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，BB_1 与平面 ACD_1 所成的角的余弦值为（　　）.

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

3. 如图，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB=\sqrt{2}AA_1$，点 D 是 A_1B_1 的中点，点 E 在 A_1C_1 上，且 $DE\perp AE$.

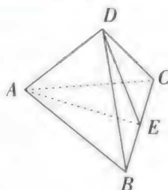
(1)证明：平面 $ADE\perp$ 平面 ACC_1A_1；

(2)求直线 AD 和平面 ABC_1 所成角的正弦值.



模板 11　求二面角【5 年 19 考】

模板探究

母 题 呈 现	模 板 引 入
已知三棱锥 $D-ABC$ 的三个侧面与底面全等，且 $AB=AC=\sqrt{3}$，$BC=2$，则以 BC 为棱，平面 BCD 与平面 BCA 所成的二面角的余弦值为（　　）. A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　B. $\frac{1}{3}$　C. 0　D. $-\frac{1}{2}$	本模板解决的是“求平面与平面所成的角（或三角函数值）”的问题.
解析：如图，取 BC 中点 E，连 AE，DE，可证 $BC\perp AE$，$BC\perp DE$，$\therefore\angle AED$ 为二面角 $A-BC-D$ 的平面角. 又 $AE=ED=\sqrt{2}$，$AD=2$，$\therefore\angle AED=90°$. 即平面 BCD 与平面 BCA 所成的二面角的余弦值为 0.  **答案**：C	第一步　通过作辅助线，构造出所求的二面角. 第二步　证明构造出的二面角 $\angle AED$ 即为所求二面角的平面角. 第三步　求出 $\angle AED$ 的大小，再求其余弦值.

第一个 100 分（三） 他回答说：“有两件事，我一想起来就很高兴：一件是我在中学时，第一次取得 100 分. 那件事使我知道我并不比别人笨，别人能办到的事，我经过努力也能办到. 世界上没有天才，天才是劳动换来的. 另一件，就是我在比利时第一次完成剥除青蛙卵膜的手术，那件事使我相信：中国人不比外国人笨. 外国人认为很难办到的事，我们照样能办到.”

模板攻略

1. 模板解决思路

二面角的大小是用二面角的平面角来度量的. 求二面角的平面角的关键在于正确地作出二面角的平面角,其过程是"一作、二证、三计算".

2. 模板解决步骤

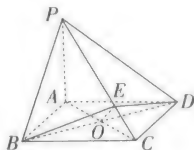
①第一步　作:作出二面角的平面角.

②第二步　证:证明该角就是二面角的平面角.

③第三步　计算:将该平面角转化到一个三角形中,计算出二面角的大小或三角函数值.

3. 典型例题

典例　(广东高考)如图所示,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为矩形,$PA\perp$平面 $ABCD$,点 E 在线段 PC 上,$PC\perp$平面 BDE.



(1)证明:$BD\perp$平面 PAC;

(2)若 $PA=1,AD=2$,求二面角 $B-PC-A$ 的正切值.

思路分析:(1)由 $BD\perp PC$ 和 $BD\perp PA$ 可得.

(2)由 $PC\perp$平面 BDE,得$\angle BEO$ 为二面角的平面角,在$\triangle BEO$ 中将其解出即可.

解:(1)证明:$\because PC\perp$平面 BDE,$BD\subset$平面 BDE,

$\therefore PC\perp BD$.

又 $PA\perp$平面 $ABCD$,$BD\subset$平面 $ABCD$,

$\therefore PA\perp BD$,$PC\cap PA=P$,$\therefore BD\perp$平面 PAC.

(2)设 $AC\cap BD=O$,连接 OE.　①

$\because PC\perp$平面 BDE,$BE\subset$平面 BDE,$OE\subset$平面 BDE,

$\therefore PC\perp BE$,$PC\perp OE$,$\therefore\angle BEO$ 为二面角 $B-PC-A$ 的平面角.　②

$\because BD\perp$平面 PAC,$\therefore BO\perp OE$,即$\angle BOE=90°$,

故 $\tan\angle BEO=\dfrac{OB}{OE}$.

又 $BD\perp$平面 PAC,$AC\subset$平面 PAC,$\therefore BD\perp AC$.

由四边形 $ABCD$ 为矩形知它也是正方形,

由 $AD=2$ 得 $BD=AC=2\sqrt{2}$,

在 $\text{Rt}\triangle PAC$ 中,$PC=\sqrt{PA^2+AC^2}=3$.

$\because\triangle OEC\backsim\triangle PAC$,$\therefore\dfrac{OC}{PC}=\dfrac{OE}{PA}$,即$\dfrac{OC}{OE}=\dfrac{PC}{PA}=3$,

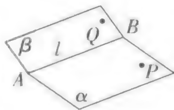
又 $\tan\angle BEO=\dfrac{OB}{OE}=\dfrac{OC}{OE}=3$,

$\therefore$二面角 $B-PC-A$ 的正切值为 3.　③

知识要点

1. 二面角的定义及记法

平面内的一条直线把平面分成两部分,这两部分通常称为半平面.



如图,从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫作二面角. 这条直线叫作二面角的棱,这两个半平面叫作二面角的面. 棱为 AB、面分别为 α,β 的二面角记作二面角 $\alpha-AB-\beta$. 有时为了方便,也可在 α,β 内(棱以外的半平面部分)分别取点 P,Q,将这个二面角记作二面角 $P-AB-Q$(也可记作"$^2\angle AB$"). 如果棱记作 l,那么这个二面角记作二面角 $\alpha-l-\beta$ 或 $P-l-Q$.

2. 二面角的平面角

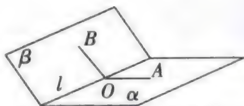
在二面角 $\alpha-l-\beta$ 的棱 l 上任取一点 O,以点 O 为垂足,在半平面 α 和 β 内分别作垂直于棱 l 的射线 OA 和 OB,则射线 OA 和 OB 构成的$\angle AOB$ 叫

睡眠问题　笨笨考试没考好,消息很快传到了家里."你的分数怎么这么低?"父亲责备道,"你的学习有问题吗?""没有,爸爸,"笨笨答道,"我根本不知道什么是问题,我不迟到,不早退,甚至也不在课堂上说话,不过,不知什么原因,老师好像不喜欢我."父亲想了想问:"你的睡眠有问题吗?"笨笨:"爸爸,你是问晚上还是在课堂上?"



作二面角的平面角.

二面角的大小可以用它的平面角来度量，二面角的平面角是多少度，就说这个二面角是多少度. 平面角是直角的二面角叫作直二面角.



特别提示

(1)二面角的平面角 θ 的取值范围是 $0° \leqslant \theta \leqslant 180°$.

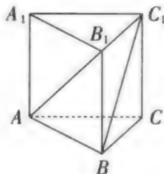
(2)二面角的平面角必须具备三个条件:①角的顶点在二面角的棱上;②角的两边分别在二面角的两个半平面内;③角的两边分别与二面角的棱垂直.

模板演练

➡ 答案详见 P393

1. 将锐角 A 为 $60°$,边长为 a 的菱形 $ABCD$ 沿 BD 折翻折,使翻折后点 A(此位置记为 A_1)与点 C 之间的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$,则二面角 A_1-BD-C 的大小为 ______.

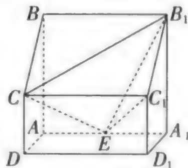
2. 如图,三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$ 的底面是边长为 6cm 的正三角形,$A_1A \perp$ 底面 ABC, 且 $A_1A=3\sqrt{3}$ cm,过 AB_1 且平行于 BC_1 的平面与底面 ABC 所成二面角大小为 β,求 β 的大小.

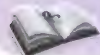


3. (天津高考)如图,四棱柱 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 中,侧棱 $A_1A \perp$ 底面 $ABCD$,$AB /\!/ DC$,$AD=CD=1$,$AA_1=AB=2$,E 为棱 AA_1 的中点.

(1)证明 $B_1C_1 \perp CE$;

(2)求二面角 B_1-CE-C_1 的正弦值.





凯尔微博

数学学习的基本思维方法 在数学学习过程中,观察与实验、分析与综合、抽象与概括、比较与分类、一般化与特殊化,这些思维方法的灵活、恰到好处的应用,是理解、巩固、应用数学知识的生动体现,在学习某一数学问题时,将以上的思维方法恰当地安排为几个思维步骤,从而就有希望获得解决这一问题的科学的学习方法.

第三章 直线与方程

模板 1　求斜率的取值范围

模板探究

母 题 呈 现	模 板 引 入
已知直线 l 过点 $P(-1,2)$，且与以 $A(-2,-3)$，$B(3,0)$ 为端点的线段相交，求直线 l 的斜率的取值范围.	本模板解决的是“过点 P 的直线与某几何图形有公共点，求斜率 k 或倾斜角 α 的取值范围”的问题.
解：如图，直线 PA 的斜率 $k_{PA}=\frac{2-(-3)}{-1-(-2)}=5$，直线 PB 的斜率 $k_{PB}=\frac{0-2}{3-(-1)}=-\frac{1}{2}$. 当直线 l 绕着点 P 由 PA 旋转到与 y 轴平行的位置 PC 时，它的斜率变化范围是 $[5,+\infty)$，当直线 l 绕着点 P 由 PC 旋转到 PB 的位置时，它的斜率的变化范围是 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$，所以直线 l 的斜率的取值范围是 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup[5,+\infty)$.	第一步　确定直线 l 与线段 AB 相交的两点 $A(-2,-3)$，$B(3,0)$. 第二步　利用点 P 求出直线 PA，直线 PB 的斜率. 第三步　结合图形分析直线 l 的变化趋势，写出直线 l 的斜率的取值范围.

模板攻略

1. 模板解决思路

求斜率的取值范围问题，一般结合图形考虑，先画出图象，利用关键点求出相关斜率值，通过对直线斜率的变化规律的分析，得出所求取值范围. 解决这类问题的关键是利用数形结合判断斜率取值范围的形式是夹在中间还是两边.

2. 模板解决步骤

①第一步　确定或求出几何图形与直线有公共点的边界点(可能不止一个).

②第二步　利用边界点与已知点 P 求出边界斜率.

③第三步　观察图形，写出斜率或倾斜角的取值范围.

3. 典型例题

典例　已知两点 $A(-3,4)$，$B(3,2)$，过点 $P(1,0)$ 的直线 l 与线段 AB 有公共点.

(1)求直线 l 的斜率 k 的取值范围；

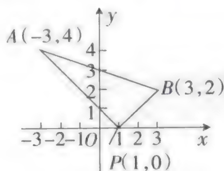
(2)求直线 l 的倾斜角 α 的取值范围.

抓住“四个三”　内容上要充分领悟三个方面：理论、方法、思维；解题上要抓好三个字：数、式、形；阅读、审题和表述上要实现数学的三种语言自如转化：文字语言、符号语言、图形语言；学习中要驾驭好三条线：知识结构是明线，要清晰；能力方法是暗线，要领悟、要提炼；思维训练是主线，要掌握思维能力是数学诸能力的核心，创造性的思维能力是最强大的创新动力.



思路分析：先画图，然后观察图上直线的范围，最后将与范围相关的斜率和倾斜角求出来.

解：如图，



①

由题意可知 $k_{PA}=\frac{4-0}{-3-1}=-1$，$k_{PB}=\frac{2-0}{3-1}=1$. ②

(1)要使 l 与线段 AB 有公共点，则直线 l 的斜率 k 的取值范围是 $k\leqslant-1$ 或 $k\geqslant1$. ③

(2)由题意可知直线 l 的倾斜角介于直线 PB 与 PA 的倾斜角之间，又因为 PB 的倾斜角是 45°，PA 的倾斜角是 135°，

$\therefore \alpha$ 的取值范围是 $45°\leqslant\alpha\leqslant135°$. ③

误区警示

过两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 的直线的斜率：当 $y_1=y_2(x_1\neq x_2)$ 时，$k=0$；当 $x_1=x_2$ 时，直线斜率不存在. 斜率公式中两点所确定的斜率与两点的顺序无关.

知识要点

1. 直线的倾斜角

当直线 l 与 x 轴相交时，取 x 轴作为基准，x 轴正向与直线 l 向上方向之间所成的角 α 叫作直线 l 的倾斜角. 当直线 l 与 x 轴平行或重合时，规定它的倾斜角为 0°. 因此，直线的倾斜角 α 的取值范围为 $0°\leqslant\alpha<180°$.

2. 直线的斜率

(1)一条直线的倾斜角 α 的正切值叫作这条直线的斜率.斜率常用小写字母 k 表示，即 $k=\tan\alpha$.

(2)倾斜角是 90°的直线没有斜率.

倾斜角 α 不是 90°的直线都有斜率，倾斜角不同，直线的斜率也不同.

(3)经过两点的直线的斜率公式：

经过两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$ 的直线的斜率公式为 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

3. 倾斜角的范围与斜率的范围之间的关系

(1)$\alpha=0°\Leftrightarrow k=0$.

(2)$0°<\alpha<90°\Leftrightarrow k>0$. k 随 α 的增大而增大.

(3)$\alpha=90°\Leftrightarrow k$ 不存在.

(4)$90°<\alpha<180°\Leftrightarrow k<0$. k 随 α 的增大而增大.

模板演练

答案详见 P394

1. 直线 l 经过 $A(2,1)$，$B(1,m^2)(m\in\mathbf{R})$两点，那么直线 l 的倾斜角 α 的取值范围是(　　).

A. $0\leqslant\alpha<\pi$　　B. $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

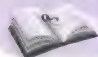
C. $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

2. 已知 $A(2,-3)$，$B(-3,-2)$，直线 l 过点 $P(1,1)$，且与线段 AB 相交，求直线 l 的斜率的取值范围.

3. 点 $M(x,y)$在函数 $y=-2x+8$ 的图象上，当 $x\in[2,3]$ 时，求：

(1)$\frac{y}{x}$ 的最大值与最小值；

(2)$\frac{y+1}{x+1}$ 的取值范围.



在老师辅导下复习(一) 部分同学担心老师的复习方法未必适合自己，便闭门造车，按照他们自己的思路复习. 不管你对知识的掌握程度如何，首先要配合老师的教学. 这是因为我们每天主要的学习任务都是在学校完成的，按照老师的节奏复习有以下好处：老师比我们更了解考试大纲、更明确考试范围和高考命题的原则与走向.

模板 2　三点共线问题【5年3考】

模板探究

母题呈现	模板引入
已知三点 $A(a,2)$,$B(5,1)$,$C(-4,2a)$在同一直线上,求 a 的值.	本模板解决的是"判断三点共线问题或利用三点共线求参数值"的问题.
解:根据斜率公式 $k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x_2\neq x_1)$可得 $k_{AB}=\frac{2-1}{a-5}$,$k_{BC}=\frac{2a-1}{-4-5}$. 已知 A,B,C 三点共线,必有 $k_{AB}=k_{BC}$. 由 $\frac{2-1}{a-5}=\frac{2a-1}{-4-5}$,解得 $a=2$ 或 $a=\frac{7}{2}$.	第一步　利用斜率公式求出直线 AB、BC 的斜率. 第二步　由三点共线可得 $k_{AB}=k_{BC}$,列出方程. 第三步　解方程,求出参数的值.

必修2

模板攻略

1. 模板解决思路

斜率是反映直线相对于 x 轴正方向的倾斜程度的. 直线上任意两点所确定的方向不变,即在同一直线上任何不同的两点所确定的斜率相等,这正是利用斜率可证三点共线的原因.

2. 模板解决步骤

1 第一步　根据已知三点 A,B,C,求出 k_{AB},k_{AC}(或 k_{BA},k_{BC} 或 k_{CA},k_{CB}).

2 第二步　若 $k_{AB}=k_{AC}$,则三点共线;若已知三点共线,则令 $k_{AB}=k_{AC}$,列出方程.

3 第三步　解方程,求出参数的值.

3. 典型例题

典例 1　已知直线 l 上两点 $A(-2,3)$,$B(3,-2)$,若点 $C(a,b)$在直线 l 上.

(1)求 a,b 应满足的关系;

(2)若 $a=\frac{1}{2}$ 时,b 的值.

解:(1)由斜率公式得 $k_{AB}=\frac{-2-3}{3-(-2)}=-1$,

$k_{AC}=\frac{b-3}{a+2}$.　①

因为点 C 在直线 l 上,所以 $\frac{b-3}{a+2}=-1$.　②

即 $a+b-1=0$.　③

(2)若 $a=\frac{1}{2}$,则 $b=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

典例 2　已知 $a>0$,若平面内三点 $A(1,-a)$,$B(2,a^2)$,$C(3,a^3)$共线,则 $a=$______.

解析:由斜率公式得

$k_{AB}=\frac{a^2+a}{2-1}=a^2+a$,

$k_{BC}=\frac{a^3-a^2}{3-2}=a^3-a^2$.　①

因为三点共线,所以 $a^2+a=a^3-a^2$,　②

即 $a^3-2a^2-a=0$. 因为 $a>0$,所以 $a^2-2a-1=0$.　③

进而求得 $a=1+\sqrt{2}$ 或 $a=1-\sqrt{2}$(舍去).

答案:$\sqrt{2}+1$

在老师辅导下复习(二)　老师指导的复习一般都是分层次、分专题、有系统的复习,这样可以有效地避免某些学生无计划无目的的复习,特别是有的学生遇到不感兴趣的题目就绕过去,而对那些自己早已掌握的知识,做着重复学习,这样做,对提高成绩帮助不大. 复习中脱离老师,对自己也是一个损失:课堂内容不能消化,作业难以完成,将直接影响到学习效率.

凯尔微博


模板演练

➡ 答案详见 P394

1. 斜率为 2 的直线经过(3,5),(a,7),(-1,b)三点,则 a=______,b=______.
2. 若点 A(4,3),B(5,a),C(6,5)三点共线,则 a 的值为 ______.
3. 若点 A(a,0),B(0,b),C(1,-1)(a>0,b<0)三点共线,则 a-b 的最小值为 ______.
4. 已知点 P(2,1),Q(3,2),R(4,3),试判断三点是否共线.

模板 3 求直线的方程【5 年 10 考】

模板探究

母题呈现	模板引入
直线 l 经过点 $P(-5,-4)$,且与两坐标轴围成的三角形面积为 5,求直线 l 的方程.	本模板解决的是“已知直线 l 满足条件 p,求直线 l 的方程”的问题.
解: 由题意知直线 l 在 x 轴、y 轴上的截距存在且不为 0,设所求直线 l 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. ∵ 直线 l 过点 $P(-5,-4)$, ∴ $\frac{-5}{a}+\frac{-4}{b}=1$,即 $4a+5b=-ab$. 又由已知有 $\frac{1}{2}\|a\|\|b\|=5$,即 $\|ab\|=10$, 解方程组 $\begin{cases}4a+5b=-ab,\\ \|ab\|=10,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=-\frac{5}{2},\\ b=4,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=5,\\ b=-2.\end{cases}$ 故所求直线 l 的方程为 $\frac{x}{-\frac{5}{2}}+\frac{y}{4}=1$ 或 $\frac{x}{5}+\frac{y}{-2}=1$, 即 $8x-5y+20=0$ 或 $2x-5y-10=0$.	第一步 根据条件,设出直线 l 的截距式方程. 第二步 根据“直线 l 经过点 $P(-5,-4)$,且与两坐标轴围成的三角形面积为 5”列出方程组. 第三步 解方程组,求出参数,即得所求直线的方程.

模板攻略

1. 模板解决思路

解求直线方程的问题的关键是选择适当的直线形式,一般地,已知一点通常选择点斜式;已知斜率选择斜截式或点斜式;已知截距或两点选择截距式或两点式,另外,从所求的结论来看,若求直线与坐标轴围成的三角形面积或周长,则应选



妙算猜牌(一) 玩法:(1)将 54 张牌洗乱;(2)将 54 张牌(正面朝上),一张一张地顺序数出 30 张,反过来(正面朝下)放在桌上,表演者在数 30 张牌时,牢记第 9 张牌的花色与点数;(3)从手中的 24 张牌中,请观众任取一张,若为 10,J,Q,K 之一,算为 10 点,并且正面朝上作为第一列放在一旁,

用截距式.

2. 模板解决步骤

①第一步　根据条件,选择适当的直线形式,设出直线方程.

②第二步　根据条件 p,列出方程(组).

③第三步　解方程(组),得出直线的方程.

3. 典型例题

典例 1　已知直线 l 经过直线 $2x+y-5=0$ 与 $x-2y=0$ 的交点. 若点 $A(5,0)$ 到 l 的距离为 3,求 l 的方程.

解:由 $\begin{cases}2x+y-5=0,\\x-2y=0,\end{cases}$ 得交点 $P(2,1)$,

设 l 的方程为 $x=2$ 或 $y-1=k(x-2)$.

$l:x=2$ 时,显然符合题意.

$l:y-1=k(x-2)$时,即 $kx-y-2k+1=0$,　①

由 $\frac{|5k-2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=3$,解得 $k=\frac{4}{3}$.　②

$\therefore l$ 的方程为 $x=2$ 或 $4x-3y-5=0$.　③

典例 2　过点 $M(0,1)$作直线,使它被两直线 $l_1:x-3y+10=0$,$l_2:2x+y-8=0$ 所截得的线段恰好被 M 所平分,求此直线的方程.

解:方法一:过点 M 且与 x 轴垂直的直线显然不合题意.故可设所求直线的方程为 $y=kx+1$,与已知两直线 l_1,l_2 分别交于 A,B 两点.　①

联立方程组 $\begin{cases}y=kx+1,\\x-3y+10=0,\end{cases}$　(*)

和 $\begin{cases}y=kx+1,\\2x+y-8=0.\end{cases}$　(**)

由(*)解得 $x_A=\frac{7}{3k-1}$,由(**)解得 $x_B=\frac{7}{k+2}$.

$\because$ 点 M 平分线段 AB,$\therefore x_A+x_B=2x_M$,　②

即 $\frac{7}{3k-1}+\frac{7}{k+2}=0$,解得 $k=-\frac{1}{4}$.

故所求直线的方程为 $x+4y-4=0$.　③

方法二:设所求直线与 l_1,l_2 分别交于 A,B 两点.

$\because$点 B 在直线 $l_2:2x+y-8=0$ 上,故可设 $B(t,8-2t)$,

$\because M(0,1)$是 AB 的中点,

由中点公式得 $A(-t,2t-6)$.

$\because$ 点 A 在直线 $l_1:x-3y+10=0$ 上,

$\therefore(-t)-3(2t-6)+10=0$,得 $t=4$.　②

$\therefore A(-4,2),B(4,0)$.

故所求直线方程为 $x+4y-4=0$.　③

误区警示

注意只有在斜率存在的情况下才能使用直线的点斜式方程.

知识要点

1. 直线方程的几种形式

名称	已知条件	方程	适用范围
点斜式	点 $P_0(x_0,y_0)$ 和斜率 k	$y-y_0=k(x-x_0)$	斜率存在,即不适用于 y 轴和平行于 y 轴的直线
斜截式	斜率 k 和直线在 y 轴上的截距 b	$y=kx+b$	
两点式	点 $P_1(x_1,y_1)$ 和$P_2(x_2,y_2)$	$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$	斜率存在且不为 0,即不适用于坐标轴和平行于坐标轴的直线

(续表)

名称	已知条件	方程	适用范围
截距式	直线在 x 轴上的截距 a 和直线在 y 轴上的截距 b	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$	斜率存在且不为 0,直线不过原点,即不适用于坐标轴,平行于坐标轴和过原点的直线
一般式	——	$Ax+By+C=0$(A,B 不同时为 0)	

2. 直线方程的一般形式能表示坐标平面上的所有直线.

(1)$B=0$ 时,$x=-\frac{C}{A}$,表示与 x 轴垂直的直线;

妙算猜牌(二)　若牌的点数 a_1 小于 10(大小王的点数为 0),将这张牌正面朝上放在一旁,并且从手中任取$(10-a_1)$张牌正面朝下,作为第一列放在这张牌下面,再请观众从手中的牌中任取一张,按上述方法组成第 2 列;(4)最后再请观众从手中任取一张牌,按上述方法组成第 3 列. 若手中的牌不够,从桌上已放好的 30 张补足,但是必须从上到下地取牌.



(2)$B\neq0$时,$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$,表示斜率$k=-\frac{A}{B}$,截距$b=-\frac{C}{B}$的直线.

3. 截距

直线l与y轴交点$(0,b)$的纵坐标b叫作直线l在y轴上的截距;直线l与x轴交点$(a,0)$的横坐标a叫作直线l在x轴上的截距.

特别提示

(1)直线在y轴上的截距也常称作纵截距,直线在x轴上的截距也常称作横截距.

(2)截距不是距离,它是个数,可正可负也可为0.

模板演练

➡ 答案详见 P395

1. 已知直线l经过点$P(-2,5)$,且斜率为$-\frac{3}{4}$.则直线l的方程为(　　).

A. $3x+4y-14=0$　　B. $3x-4y+14=0$

C. $4x+3y-14=0$　　D. $4x-3y+14=0$

2. 过两点$(0,3)$,$(2,1)$的直线方程为(　　).

A. $x-y-3=0$　　B. $x+y-3=0$

C. $x+y+3=0$　　D. $x-y+3=0$

3. 已知直线l_1的方程为$y=-2x+3$,l_2的方程为$y=4x-2$,直线l与l_1平行且与l_2在y轴上的截距相同,求直线l的方程.

4. 求过点$M(3,-4)$,且在两坐标轴上的截距相等的直线的方程.

5. 三角形的顶点是$A(-5,0)$,$B(3,-3)$,$C(0,2)$,求此三角形的三边所在直线的方程.

凯尔微博



妙算猜牌(三) (5)将每列的第一张牌的点数a_1,a_2,a_3加起来,得$a=a_1+a_2+a_3$;(6)表演者从手中已剩下的牌数起,一直数到第a张牌(如果手中已无剩牌,则从桌上剩下的第一张牌数起),就可以准确地猜出这张牌的点数与花色(即开始数30张牌时记的第9张牌的花色与点数).

模板 4　求两直线平行或垂直中参数的值【5年3考】

模板探究

母题呈现	模板引入
如果直线 l_1:$(m^2-m-2)x+(m^2-2m)y-3m+2=0$ 与直线 l_2:$2x+3y-7=0$ 平行,试求 m 的值.	本模板解决的是"已知两条含参数的直线平行或垂直,求参数的值"的问题.
解:$\because l_1/\!/l_2$, $\therefore \frac{m^2-m-2}{2}=\frac{m^2-2m}{3}\neq\frac{-3m+2}{-7}$, 解得 $m=2$ 或 $m=-3$, 代入 $\frac{m^2-2m}{3}\neq\frac{-3m+2}{-7}$ 均成立, 又当 $m=2$ 时,$m^2-m-2=m^2-2m=0$,此时 l_1 不存在. $\therefore$ 当 $m=-3$ 时,$l_1/\!/l_2$.	第一步　根据直线 l_1 与直线 l_2 平行,列出方程(组). 第二步　解方程(组),求出参数 m 的值. 第三步　检验出 $m=2$ 时,直线 l_1 不存在,故舍去.

模板攻略

1. 模板解决思路

对于根据两直线平行或垂直求直线方程中参数的值的问题,通常利用两直线平行或垂直与其相应斜率之间的关系(或两直线方程的一般式之间的系数的关系),列出方程(组),通过解方程求出参数的值.另外,一定要注意检验斜率不存在时的情况.

2. 模板解决步骤

①第一步　将两条直线的方程化成一般式或斜截式.

②第二步　利用两直线平行或垂直,列出方程(组).

③第三步　解方程(组)求出参数的值,并检验(特别注意斜率不存在时的情况).

3. 典型例题

典例 1　(浙江高考)若直线 $x-2y+5=0$ 与直线 $2x+my-6=0$ 互相垂直,则实数 $m=$________.

思路分析:由于直线 $x-2y+5=0$ 斜率不为 0,因此,$m\neq0$,可利用斜率乘积为-1 来求.

解析:依题意知 $m\neq0$,直线 $x-2y+5=0$,即 $y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$,直线 $2x+my-6=0$,即 $y=-\frac{2}{m}x+\frac{6}{m}$,　①

所以由 $\left(-\frac{2}{m}\right)\times\frac{1}{2}=-1$,　②

得 $m=1$.　③

答案:1

典例 2　已知两条直线 l_1:$x+my+6=0$,l_2:$(m-2)x+my+2m=0$,求 m 为何值时,l_1 与 l_2:

妙算猜牌(四)　答案:放在一旁的三列牌的总数:$A=3+(10-a_1)+(10-a_2)+(10-a_3)=33-(a_1+a_2+a_3)$,手中剩的牌数:$B=24-A$.因为 $B+9=24-A+9=33-[33-(a_1+a_2+a_3)]=a$.所以从手中剩下的牌数起,第 a 张牌恰好为原来的 30 张牌中的第 9 张牌.



(1)相交;(2)平行.

解:当 $m=0$ 时,$l_1:x+6=0$,$l_2:x=0$,$l_1/\!/l_2$.

当 $m\neq0$ 时,$l_1:y=-\frac{1}{m}x-\frac{6}{m}$,$l_2:y=-\frac{m-2}{m}x-2$. ①

设 l_1,l_2 的斜率、纵截距分别为 k_1,k_2,b_1,b_2,

则当 $k_1=k_2$,即 $-\frac{1}{m}=-\frac{m-2}{m}$ 时,$m=3$.

当 $b_1=b_2$,即 $-\frac{6}{m}=-2$ 时,$m=3$. ②

(1)当 $m\neq3$ 且 $m\neq0$ 时,$k_1\neq k_2$,l_1 与 l_2 相交;

(2)当 $m=0$ 时,l_1 与 l_2 平行. ③

误区警示

在利用斜率关系时要注意数形结合,要注意解析几何中两直线除平行和相交外,还有可能重合,也要注意斜率不存在时的情况.

知识要点

1. 两条直线平行与垂直的判定

(1)平行、垂直与倾斜角的关系

设两条直线 l_1,l_2 的倾斜角分别为 α_1,α_2.

$l_1/\!/l_2\Leftrightarrow\alpha_1=\alpha_2$;

$l_1\perp l_2\Rightarrow|\alpha_1-\alpha_2|=90°$.

(2)平行、垂直与斜率的关系

设两条直线 l_1,l_2,斜率存在时分别为 k_1,k_2.

$l_1/\!/l_2\Leftrightarrow k_1=k_2$ 或 l_1,l_2 的斜率都不存在;

$l_1\perp l_2\Rightarrow k_1k_2=-1$ 或“$k_1=0$ 且 l_2 的斜率不存在”或“$k_2=0$ 且 l_1 的斜率不存在”.

2. 两条直线的位置关系

位置关系 \ 直线方程	$l_1:y=k_1x+b_1$ $l_2:y=k_2x+b_2$	$l_1:A_1x+B_1y+C_1=0$ $l_2:A_2x+B_2y+C_2=0$	l_1 与 l_2 组成的方程组
平行	$k_1=k_2$,且 $b_1\neq b_2$	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$ $(A_2B_2C_2\neq0)$	无解
重合	$k_1=k_2$,且 $b_1=b_2$	$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ $(A_2B_2C_2\neq0)$	有无数多解
相交	$k_1\neq k_2$	$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$ $(A_2B_2\neq0)$	有唯一解
垂直	$k_1k_2=-1$	$A_1A_2+B_1B_2=0$	

模板演练

➡答案详见 P395

1. 直线 $3ax-y-1=0$ 与直线 $\left(a-\frac{2}{3}\right)x+y+1=0$ 垂直,则 a 的值是(　　).

A. -1 或 $\frac{1}{3}$　　B. 1 或 $\frac{1}{3}$

C. $-\frac{1}{3}$ 或 -1　　D. $-\frac{1}{3}$ 或 1

2. 已知直线 $l_1:(k-3)x+(4-k)y+1=0$,与 $l_2:2(k-3)x-2y+3=0$ 平行,则 k 的值是(　　).

A. 1 或 3　　B. 1 或 5

C. 3 或 5　　D. 1 或 2

3. 直线 $l_1:kx+(1-k)y-3=0$ 和 $l_2:(k-1)x+(2k+3)\cdot y-2=0$ 互相垂直,则 $k=$(　　).

A. -3 或 -1　　B. 3 或 1

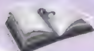
C. -3 或 1　　D. -1 或 3

4. 已知直线 l 的倾斜角为 $\frac{3}{4}\pi$,直线 l_1 经过点 $A(3,2)$,$B(a,-1)$,且 l_1 与 l 垂直,直线 $l_2:2x+by+1=0$ 与直线 l_1 平行,则 $a+b$ 等于(　　).

A. -4　　B. -2

C. 0　　D. 2

凯尔微博



相识数学 恩格斯说:数学是数和形的学问.数学这棵大树的根深深地扎在现实世界之中.他有两大主干:几何与代数.几何是研究空间形式的学问,视觉思维占主导地位,要用眼睛看,以培养知觉能力和洞察力.代数是数量关系的科学,有序思维占主导地位,以培养逻辑能力和符号运算能力.如果你没有从整体上把握这两个特征,那么你的几何和代数就没有学透.

模板5　求距离中参数的值

模板探究

母题呈现	模板引入
已知两点 $A(3,2)$ 和 $B(-1,4)$ 到直线 $mx+y+3=0$ 的距离相等,则 m 的值为(　　). A. 0 或 $-\frac{1}{2}$　B. $\frac{1}{2}$ 或 -6 C. $-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$　D. 0 或 $\frac{1}{2}$	本模板解决的是"已知两点间的距离(或点线距离或线线距离)满足条件 p,求其中参数的值"的问题.
解析:依题意,得 $\frac{\lvert 3m+5\rvert}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{\lvert -m+7\rvert}{\sqrt{m^2+1}}$. 化简得 $8m^2+44m-24=0$, 所以 $2m^2+11m-6=0$. 所以 $m=\frac{1}{2}$ 或 $m=-6$. **答案**:B	第一步　将题目中的 A、B 到直线的距离表示出来. 第二步　根据点 A,B 到直线 $mx+y+3=0$ 的距离相等列方程. 第三步　解方程,求出 m 的值.

模板攻略

1. 模板解决思路

解有关距离的参数的值的问题,首先要化直线方程为一般式,然后根据题目中的条件选择合适的距离公式,列出关于距离的方程,最后解方程,求出参数的值,并检验.

2. 模板解决步骤

1 第一步　将直线化成一般方程,选择合适的距离公式.

2 第二步　利用条件 p,列出关于距离公式的方程.

3 第三步　解方程,求出参数的值,并检验.

3. 典型例题

典例　若平行直线 $3x-2y-1=0$,$6x+ay+c=0$ 之间的距离为 $\frac{2\sqrt{13}}{13}$,则 c 的值是______.

解析:将直线 $3x-2y-1=0$ 化为 $6x-4y-2=0$,　1

因为两直线平行,所以 $a=-4$,

则由两直线之间的距离为 $\frac{\lvert c+2\rvert}{\sqrt{6^2+(-4)^2}}=\frac{2\sqrt{13}}{13}$,　2

解得 $c=2$ 或 $c=-6$.　3

答案:2 或 -6

误区警示

使用点到直线的距离公式前必须将直线方程化为一般式,然后再套用距离公式;使用两平行线间的距离公式时一定要注意先把两直线方程中的 x,y 的系数化成相等的.

"数学化"与"计算机化"(一)　半个世纪前,作为人类发展史上一个重要里程碑的计算机出现了,今天由它的信息革命对社会产生越来越广泛的影响.计算机革命的冲击力之所以如此迅猛,是因为作为人脑的延伸,它以惊人的速度深刻地改变着人们的工作方式、生活方式与思维方式.在对"如何迎接21世纪挑战"的讨论中,计算机的重要性已经被广泛认识.



知识要点

1. 两点间的距离公式

设 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$是平面直角坐标系中的两个点,则 $|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

特别地,原点 $O(0,0)$与任一点 $P(x,y)$的距离 $|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$.

2. 点到直线的距离公式

点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $l:Ax+By+C=0$ 的距离 $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

特别提示

(1)若给出的直线方程不是一般式,则应先把方程化为一般式,再利用公式求距离.

(2)若点 P_0 在直线上,点 P_0 到直线的距离为零,距离公式仍然适用.

(3)点到几种特殊直线的距离:

①点 $P_0(x_0,y_0)$到 x 轴的距离 $d=|y_0|$;

②点 $P_0(x_0,y_0)$到 y 轴的距离 $d=|x_0|$;

③点 $P_0(x_0,y_0)$到与 x 轴平行的直线 $y=a$ 的距离 $d=|y_0-a|$;

④点 $P_0(x_0,y_0)$到与 y 轴平行的直线 $x=b$ 的距离 $d=|x_0-b|$.

3. 两条平行直线间的距离公式

两条平行直线 $Ax+By+C_1=0$ 与 $Ax+By+C_2=0$ 间的距离为 $d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

特别提示

应用此公式要注意两点:

(1)两平行直线的方程应为一般式.

(2)两平行直线方程中 x,y 的系数对应相等.

模板演练

➡ 答案详见 P395

1. 若点$(4,a)$到直线 $4x-3y-1=0$ 的距离不大于 3,则 a 的取值范围是(　　).

A. $[0,10]$

B. $(0,10)$

C. $\left[\frac{1}{3},\frac{3}{13}\right]$

D. $(-\infty,0]\cup[10,+\infty)$

2. 已知点 $P(a,2)$,$Q(-2,-3)$,$M(1,1)$,且$|PQ|=|PM|$,则 a 的值是______.

3. 若 $O(0,0)$,$A(4,-1)$两点到直线 $ax+a^2y+6=0$ 的距离相等,则实数$a=$______.

4. 已知直线 $l_1:mx+8y+n=0$ 与 $l_2:2x+my-1=0$ 互相平行,且 l_1,l_2 之间的距离为$\sqrt{5}$,求直线 l_1 的方程.

凯尔微博



"数学化"与"计算机化"(二) 人们普遍谈论着"计算机是进入 21 世纪的通行证",但是数学在未来社会的重要性却没有引起足够的关注,接受"数学盲难以进入 21 世纪"观点的人并不多. 那么未来社会的特点是"计算机化"还是"数学化"呢?既然计算机的功能如此强大,那么是否可以少学一些数学呢?

模板6　对称问题 [5年3考]

模板探究

母题呈现	模板引入
已知直线 $l:x-y-1=0$, $l_1:2x-y-2=0$. 若直线 l_2 与 l_1 关于 l 对称,则 l_2 的方程是(　　). A. $x-2y+1=0$　B. $x-2y-1=0$ C. $x+y-1=0$　D. $x+2y-1=0$	本模板解决的是"关于点或直线对称"的问题.
解析:l_1 与 l_2 关于 l 对称,则 l_1 上任一点关于 l 的对称点都在 l_2 上,故 l 与 l_1 的交点(1,0)在 l_2 上.又易知(0,-2)为 l_1 上一点,设其关于 l 的对称点为 (x,y),则 $\begin{cases}\frac{x+0}{2}-\frac{y-2}{2}-1=0,\\ \frac{y+2}{x}\times1=-1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-1,\\ y=-1.\end{cases}$ 即(1,0),(-1,-1)为 l_2 上两点,可得 l_2 方程为 $x-2y-1=0$. **答案**:B	第一步　求出直线 l 与直线 l_1 的交点(1,0),则此点也在直线 l_2 上. 第二步　确定直线 l_1 上的一点(0,-2),设出其关于 l 的对称点 (x,y). 第三步　利用中点公式以及垂直直线间的斜率关系,列出方程组,解得点(-1,-1). 第四步　由两点(1,0)和(-1,-1),求得所求直线方程.

模板攻略

1. 模板解决思路

关于点或直线对称的问题,可分为以下三种:

(1)求点关于直线的对称点

这是最基本也是最重要的对称,处理这类问题要抓住两点:一是已知点与对称点的连线与对称轴垂直;二是以已知点与对称点为端点的线段的中点在对称轴上.

(2)求直线关于直线外一点对称的直线

解决此类问题认清两点:一是关于点对称的两条直线平行;二是点到两条直线的距离相等.

(3)求直线关于直线的对称直线

求直线 a 关于直线 l 的对称直线 b,由平面几何知,若直线 a,b 关于直线 l 对称,它们具有下列几何性质:

①若 a,b 相交,则 l 是 a、b 夹角的平分线;

②若点 A 在直线 a 上,那么点 A 关于直线 l 的对称点 B 一定在直线 b 上,这时,$AB\perp l$ 且 AB 中点 D 在 l 上.

2. 模板解决步骤

1 第一步　分析题目中所求对称类型,设出相关的点或直线.

2 第二步　利用中点公式或已知直线或垂直直线间的斜率关系,列出方程或方程组.

3 第三步　解方程或方程组,求得所求的点,进而得到所求直线.

"数学化"与"计算机化"(三)　实际上,情况恰恰相反,在信息社会里,正是计算机的广泛应用,才加速了现代社会的"数学化"进程.由于越来越多的问题需要归结或表示成为能用计算手段处理的数学问题,所以数学科学在社会发展中的地位空前提高了.有的专家认为,计算机作为一种功能强大的计算工具,对计算方法的进步有划时代的意义.

凯乐微博


3. 典型例题

典例1 已知直线 $l:y=3x+3$，求：

(1)点 $P(4,5)$关于 l 的对称点坐标；

(2)直线 $y=x-2$ 关于 l 的对称直线的方程；

(3)直线 l 关于点 $A(3,2)$的对称直线的方程.

解:(1)设点 P 关于直线 l 的对称点为 $P'(x',y')$，①

则点 P、P' 的中点 M 在直线 l 上，且直线 PP' 垂直于直线 l.

即 $\begin{cases}\dfrac{y'+5}{2}=3\cdot\dfrac{x'+4}{2}+3,\\ \dfrac{y'-5}{x'-4}\cdot 3=-1,\end{cases}$ ②

解得 $\begin{cases}x'=-2,\\ y'=7.\end{cases}$ ③

∴点 P' 的坐标为$(-2,7)$.

(2)设直线 $l_1:y=x-2$ 关于直线 l 对称的直线为 l_2，则 l_1 上任一点 $P_1(x_1,y_1)$关于 l 的对称点 $P_2(x_2,y_2)$一定在 l_2 上，反之也成立. ①

即 $\begin{cases}\dfrac{y_1+y_2}{2}=3\cdot\dfrac{x_1+x_2}{2}+3,\\ \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot 3=-1,\end{cases}$ ②

解得 $\begin{cases}x_1=-\dfrac{4}{5}x_2+\dfrac{3}{5}y_2-\dfrac{9}{5},\\ y_1=\dfrac{3}{5}x_2+\dfrac{4}{5}y_2+\dfrac{3}{5},\end{cases}$

把(x_1,y_1)代入 $y=x-2$，

整理得 $7x_2+y_2+22=0$，

∴l_2 方程为 $7x+y+22=0$. ③

(3)设直线 l 关于点 $A(3,2)$的对称直线为 l'，

由于 $l/\!/l'$，可设 l' 为 $y'=3x'+b(b\neq 3)$. ①

由点到直线的距离公式得

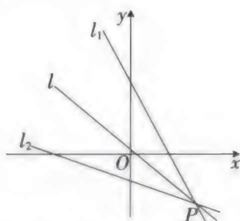
$\dfrac{|3\times 3-2+b|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{|3\times 3-2+3|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}$， ②

即$|b+7|=10$，解得 $b=-17$，或 $b=3$(舍去)，

∴直线 l'的方程为 $y'=3x'-17$，

即对称直线的方程为 $3x-y-17=0$. ③

典例2 已知直线 $l:3x+4y-1=0$，直线 $l_1:2x+y-4=0$，直线 l_2 与直线 l_1 关于直线 l 对称，求直线 l_2 的方程(如图所示).



解:方法一：在直线 l_1 上取一点 $A(2,0)$，并设点 A 关于直线 l 的对称点为 $B(x,y)$. ①

则有 $\begin{cases}\dfrac{y-0}{x-2}\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)=-1,\\ 3\times\dfrac{x+2}{2}+4\times\dfrac{y+0}{2}-1=0,\end{cases}$ ②

即 $\begin{cases}4x-3y-8=0,\\ 3x+4y+4=0,\end{cases}$

∴ $\begin{cases}x=\dfrac{4}{5},\\ y=-\dfrac{8}{5}.\end{cases}$ ∴点 $B\left(\dfrac{4}{5},-\dfrac{8}{5}\right)$必在 l_2 上.

由两点式得直线 l_2 的方程为

$\dfrac{y+2}{-\dfrac{8}{5}+2}=\dfrac{x-3}{\dfrac{4}{5}-3}$，即 $2x+11y+16=0$. ③

方法二：设直线 l_2 上的任意点 $N(x,y)$关于直线 l 的对称点为 $N'(x',y')$， ①

则有 $\begin{cases}\dfrac{y-y'}{x-x'}\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)=-1,\\ 3\cdot\dfrac{x+x'}{2}+4\cdot\dfrac{y+y'}{2}-1=0,\end{cases}$ ②

即 $\begin{cases}4x'-3y'=4x-3y,\\ 3x'+4y'=2-3x-4y,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x'=\dfrac{7x-24y+6}{25},\\ y'=\dfrac{-24x-7y+8}{25}.\end{cases}$

∵$N'(x',y')$在直线 l_1 上，

∴$2\cdot\dfrac{7x-24y+6}{25}+\dfrac{-24x-7y+8}{25}-4=0$. ③

整理得 $2x+11y+16=0$，即是直线 l_2 的方程.


凯尔微博

"数学化"与"计算机化"(四) 计算机超乎人们想像的计算速度，使一大批原本由于手工计算的局限而难以解决的问题，一下子获得了解决，于是计算机把计算方法推向了人类科学活动的前沿，成为与实验、理论推导并列的第三种科学方法."由计算机推动的当代计算方法的兴趣，并形成与实验方法论上的最大进展，推动着科研实践中一场深刻的、不可逆转的变革."

知识要点

1. 点关于点的对称

点 $P(x_0,y_0)$关于 $A(a,b)$的对称点为 $P'(2a-x_0,2b-y_0)$.

2. 点关于直线的对称

设点 $P(x_0,y_0)$关于直线 $y=kx+b$ 的对称点为 $P'(x',y')$,则有 $\begin{cases}\dfrac{y'-y_0}{x'-x_0}\cdot k=-1,\\ \dfrac{y'+y_0}{2}=k\cdot\dfrac{x'+x_0}{2}+b,\end{cases}$ 可求出 x',y'.

3. 直线关于直线的对称

(1)若已知直线 l_1 与对称轴 l 相交,则交点必在与 l_1 对称的直线 l_2 上,然后再求出 l_1 上任一个已知点 P_1 关于对称轴 l 对称的点 P_2,那么经过交点及点 P_2 的直线就是 l_2;

(2)若已知直线 l_1 与对称轴 l 平行,则与 l_1 对称的直线和 l_1 分别到直线 l 的距离相等,由平行直线系和两条平行线间的距离即可求出 l_1 的对称直线.

必修2

模板演练

➡ 答案详见 P396

1. 入射光线沿直线 $x+2y+c=0$ 射向直线 $l:x+y=0$,被直线 l 反射后的光线所在的直线方程为(　　).

A. $2x+y+c=0$　　B. $2x+y-c=0$

C. $2x-y+c=0$　　D. $2x-y-c=0$

2. 直线 $x-2y+1=0$ 关于直线 $x=1$ 对称的直线方程是(　　).

A. $x+2y-1=0$　　B. $2x+y-1=0$

C. $2x+y-3=0$　　D. $x+2y-3=0$

3. 光线从点 $A(-3,5)$射到 x 轴上,经反射后经过点 $B(2,10)$,则光线从 A 到 B 的距离为 ______.

4. 已知点 $A(7,-4)$关于直线 l 的对称点为 $B(-5,6)$,求直线 l 的方程.

5. 光线从点 $A(-4,-2)$射出,到直线 $y=x$ 上的点 B 后被直线 $y=x$ 反射到 y 轴上的点 C,又被 y 轴反射,这时反射光线恰好过点 $D(-1,6)$,求 BC 所在的直线方程.

"数学化"与"计算机化"(五) 当前,数学和计算机结合起来已经形成一种所谓的"数学技术",在社会的经济发展中起着举足轻重的作用.从某种意义上讲,是计算机的飞速发展把数学提升到了从来未曾有过的重要位置,信息时代就是一个"数学化的时代".这个时代绝不是仅要求人们掌握电脑的简单操作,而是要求每个人比以往任何时候都要更懂数学,更善于进行数学的思考.

凯尔微博



第四章 圆与方程

模板1 求圆的方程【5年16考】

模板探究

母题呈现	模板引入
求经过 $A(6,5)$,$B(0,1)$两点,并且圆心在直线 $3x+10y+9=0$ 上的圆的方程.	本模板解决的是"已知圆满足条件 p,求圆的方程"的问题.
解:设所求圆的方程为$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$,则 $\begin{cases}(6-a)^2+(5-b)^2=r^2,\\(0-a)^2+(1-b)^2=r^2,\\3a+10b+9=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=7,\\b=-3,\\r=\sqrt{65},\end{cases}$ 故所求圆的方程为$(x-7)^2+(y+3)^2=65$.	第一步 根据题意,设出圆的标准方程. 第二步 根据条件,列出方程组,解出参数. 第三步 将参数代入圆的标准方程,得解.

模板攻略

1. 模板解决思路

求满足一定条件的圆的方程时,其关键是寻找确定圆的两个几何要素,即圆心和半径,待定系数法也是经常使用的方法.在一些问题中借助平面几何中关于圆的知识可以简化计算,如已知一个圆经过两个点时,其圆心一定在这两点的垂直平分线上,解题时要注意平面几何知识的应用.

2. 模板解决步骤

1 第一步 根据条件,选择合适的形式,设出圆的方程.

2 第二步 利用条件 p,列出方程(组).

3 第三步 解方程(组),得到圆的方程.

3. 典型例题

典例1 (辽宁高考)已知圆 C 经过 $A(5,1)$,$B(1,3)$两点,圆心在 x 轴上,则 C 的方程为__________.

思路分析:本题已知圆上两点和圆心在 x 轴上,既可以用标准方程,也可以用一般方程.

解析:方法一:依题意设所求方程为:$(x-a)^2+y^2=r^2$, 1

把所给两点坐标代入方程,得 $\begin{cases}(5-a)^2+1=r^2,\\(1-a)^2+9=r^2,\end{cases}$ 2

解得 $\begin{cases}a=2,\\r^2=10,\end{cases}$ 所以所求圆 C 的方程为$(x-2)^2+y^2=10$. 3

方法二:依题意设所求方程为:$x^2+y^2+Dx+F=0$, 1

把所给两点坐标代入方程,得 $\begin{cases}5^2+1^2+5D+F=0,\\1^2+3^2+D+F=0,\end{cases}$ 2

解得 $\begin{cases}D=-4,\\F=-6,\end{cases}$ 所以所求圆 C 的方程为 $x^2+y^2-4x-6=0$. 3

答案:$(x-2)^2+y^2=10$(或 $x^2+y^2-4x-6=0$)

典例2 在平面直角坐标系中,曲线 $y=x^2-6x+1$ 与坐标轴的交点都在圆 C 上.求圆 C 的方程.



总结每次考试(一) 很多同学对考试产生了畏惧心理,甚至把模拟考试也当成了负担,其实高考前的模拟考试对我们是一次很好的"练兵".无论知识掌握多扎实,应用多灵活,最终反映成绩的依然是高考试卷,除了智力因素外,临场经验直接影响着考试的发挥.我们应珍惜学校有限的模拟考试机会,从中发现自己的问题:考试紧张、审题不清、时间安排不合理……

解：曲线 $y=x^2-6x+1$ 与 y 轴交点为(0,1)，与 x 轴交点为$(3+2\sqrt{2},0)$，$(3-2\sqrt{2},0)$，因而设圆心坐标为 $C(3,t)$， ①

则有 $3^2+(t-1)^2=(2\sqrt{2})^2+t^2$，$\therefore t=1$. ②

故圆 C 的半径为 $\sqrt{3^2+(t-1)^2}=3$，

所以圆 C 的方程是 $(x-3)^2+(y-1)^2=9$. ③

误区警示

求圆的方程要确定圆心的坐标(横坐标、纵坐标)和圆的半径，这实际上是三个独立的条件，只有根据已知把三个独立条件找出才可能通过解方程组的方法确定圆心坐标和圆的半径，其中列条件和解方程组都要注意其准确性.

知识要点

1. 圆的标准方程

圆心为 $A(a,b)$，半径为 r 的圆的方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 叫作圆的标准方程.

特别地，圆心在坐标原点，半径为 r 的圆的方程为 $x^2+y^2=r^2$.

特别提示

在圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$ 中，

(1)当 $a^2+b^2=r^2$ 时，圆过原点；

(2)当 $|a|=r$ 时，圆与 y 轴相切；

当 $|b|=r$ 时，圆与 x 轴相切；

当 $|a|=|b|=r$ 时，圆与两坐标轴相切；

当 $|a|=r,b=0$ 时，圆与 y 轴相切于原点；

当 $|b|=r,a=0$ 时，圆与 x 轴相切于原点.

2. 圆的一般方程

方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ ①

可化为 $\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$.

(1)当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程①表示以 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$ 为圆心，$\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ 为半径长的圆；

(2)当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，方程①只有实数解 $x=-\frac{D}{2},y=-\frac{E}{2}$，它表示一个点 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$；

(3)当 $D^2+E^2-4F<0$ 时，方程①没有实数解，它不表示任何图形.

因此，当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 表示一个圆，把它叫作圆的一般方程.

特别提示

(1)若方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 表示圆，则

①当 $F=0$ 时，圆过原点；

②当 $D=0,E\neq0$ 时，圆心在 y 轴上；当 $D\neq0,E=0$ 时，圆心在 x 轴上；

③当 $D=F=0,E\neq0$ 时，圆与 x 轴相切于原点；当 $E=F=0,D\neq0$ 时，圆与 y 轴相切于原点；

④当 $D^2=E^2=4F$ 时，圆与两坐标轴相切.

(2)求圆的一般方程，只需用待定系数法求出 D,E,F 三个系数就可以了.

(3)以 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 为直径的两端点的圆的方程是 $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.

模板演练

➔ 答案详见 P396

1. 已知点 $A(1,-1)$，$B(-1,1)$，则以线段 AB 为直径的圆的方程是(　　).

A. $x^2+y^2=2$　　B. $x^2+y^2=\sqrt{2}$

C. $x^2+y^2=1$　　D. $x^2+y^2=4$

2. 圆心在 y 轴上，半径为 1，且过点(1,2)的圆的方程为(　　).

A. $x^2+(y-2)^2=1$　　B. $x^2+(y+2)^2=1$

C. $(x-1)^2+(y-3)^2=1$　　D. $x^2+(y-3)^2=1$

总结每次考试(二)　如果每次考试后能做总结，看一下哪些非智力因素影响了自己的正常发挥，在高考之前加以改正，高考时一定会有所提高的. 模拟考试还可以帮助考生发现知识上的不足，及时查漏补缺，模拟考试中的题目考查知识点非常全面，新题型较多，阅读量和题型设置都很科学，能够真正帮助我们估计实力.



3. 已知圆 C_1: $(x+1)^2+(y-1)^2=1$，圆 C_2 与圆 C_1 关于直线 $x-y-1=0$ 对称，则圆 C_2 的方程为（　　）.

A. $(x+2)^2+(y-2)^2=1$　　B. $(x-2)^2+(y+2)^2=1$

C. $(x+2)^2+(y+2)^2=1$　　D. $(x-2)^2+(y-2)^2=1$

4. 已知圆 C 与直线 $x-y=0$ 及 $x-y-4=0$ 都相切，圆心在直线 $x+y=0$ 上，则圆 C 的方程为（　　）.

A. $(x+1)^2+(y-1)^2=2$　　B. $(x-1)^2+(y+1)^2=2$

C. $(x-1)^2+(y-1)^2=2$　　D. $(x+1)^2+(y+1)^2=2$

模板 2　求动点的轨迹方程

模板探究

母题呈现	模板引入
已知一曲线是与两定点 $O(0,0)$，$A(3,0)$ 距离的比为 $\frac{1}{2}$ 的点的轨迹，求此曲线的方程.	本模板解决的是"已知动点满足条件 p，求动点的轨迹方程"的问题.
解：在给定的坐标系中，设 $M(x,y)$ 是曲线上的任意一点，点 M 在曲线上的条件是 $\left\|\frac{MO}{MA}\right\|=\frac{1}{2}$. 由两点的距离公式，得 $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}=\frac{1}{2}$. 两边平方并化简，得曲线方程 $x^2+y^2+2x-3=0$. 将方程配方，得 $(x+1)^2+y^2=4$. 即所求曲线的方程为 $(x+1)^2+y^2=4$.	第一步　设出动点坐标 $M(x,y)$. 第二步　利用题目所给条件，列出方程. 第三步　化简方程，得到所求曲线的方程.

模板攻略

1. 模板解决思路

求动点的轨迹方程即是建立动点的横、纵坐标 x，y 的方程. 其中根据不同条件建立方程是求轨迹方程的难点，学习时应注意归纳和总结常用方法. 求轨迹方程常用的方法有：代入法、直接法、定义法、参数法等.

2. 模板解决步骤

1 第一步　设动点的坐标为 (x,y).

2 第二步　利用条件 p，列出关于 x，y 的方程.

3 第三步　化简方程，得关于动点的轨迹方程，并检验.

3. 典型例题

典例　已知动点 P 到 y 轴的距离的 3 倍等于它到点 $A(1,3)$ 的距离的平方，求动点 P 的轨迹方程.

解：设动点 P 坐标为 (x,y).　①

由已知 $3|x|=(x-1)^2+(y-3)^2$，得 $3|x|=x^2-2x+1+y^2-6y+9$.　②

当 $x\geqslant 0$ 时，得 $x^2+y^2-5x-6y+10=0$.

当 $x<0$ 时，得 $x^2+y^2+x-6y+10=0$.

∵ 两个方程分别化为 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{21}{4}$ 和 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-3)^2=-\frac{3}{4}$，

由于两个平方数之和不可能为负数，

故所求动点 P 的轨迹方程为

$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{21}{4}$ $(x\geqslant 0)$.　③

凯尔微博



适当多做题，及时总结经验　"多做题"和"总结经验"是联系在一起的，不怕做题少，就怕面不全. "多"是指题目类型. 题目虽多，通过合并，题类若有限，并不能达到理想的效果. 只要把各类题目各做一定数量，加上细心领悟，没准还会发现点什么. 做题的量也是因人而异. 做题的难易程度也应根据自己的情况，要保大面积丰收，不要刻意求难.

模板演练

➔ 答案详见P397

1. 点 $P(4,-2)$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 上任一点连线的中点的轨迹方程是(　　).
   A. $(x-2)^2+(y+1)^2=1$　　B. $(x-2)^2+(y+1)^2=4$
   C. $(x+4)^2+(y-2)^2=4$　　D. $(x+2)^2+(y-1)^2=1$
2. 一个动点在圆 $x^2+y^2=1$ 上移动时，它与定点 $(3,0)$ 连线中点的轨迹方程是(　　).
   A. $(x+3)^2+y^2=4$　　B. $(x-3)^2+y^2=1$
   C. $(2x-3)^2+4y^2=1$　　D. $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{2}$
3. 由动点 P 向圆 $x^2+y^2=1$ 引两条切线 PA，PB，切点分别为 A，B，$\angle APB=60°$，则动点 P 的轨迹方程为______.
4. 已知圆的方程为 $x^2+y^2-6x-6y+14=0$，求过点 $A(-3,-5)$ 的直线交圆的弦 PQ 的中点 M 的轨迹方程.

模板3　求直线与圆位置关系中的参数 [5年12考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(天津高考)设 $m,n\in\mathbf{R}$，若直线 $(m+1)x+(n+1)y-2=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 相切，则 $m+n$ 的取值范围是(　　). A. $[1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}]$ B. $(-\infty,1-\sqrt{3}]\cup[1+\sqrt{3},+\infty)$ C. $[2-2\sqrt{2},2+2\sqrt{2}]$ D. $(-\infty,2-2\sqrt{2}]\cup[2+2\sqrt{2},+\infty)$	本模板解决的是“已知含参数的直线与圆满足某种位置关系时，求参数的值(取值范围)”的问题.
解析：$\because$ 直线 $(m+1)x+(n+1)y-2=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 相切， $\therefore$ 圆心 $(1,1)$ 到直线的距离 $d=\frac{\lvert(m+1)+(n+1)-2\rvert}{\sqrt{(m+1)^2+(n+1)^2}}=1$. 所以 $mn=m+n+1\leqslant\left(\frac{m+n}{2}\right)^2$，设 $t=m+n$，则 $\frac{1}{4}t^2\geqslant t+1$， 解得 $t\in(-\infty,2-2\sqrt{2}]\cup[2+2\sqrt{2},+\infty)$. **答案**：D	第一步　由“直线与圆相切”的条件可得圆心到直线的距离等于半径. 第二步　利用点到直线的距离公式列出方程，并借助基本不等式，得到关于参数 m 的不等式. 第三步　利用换元法解不等式，求出参数 m 的取值范围.

解题后的六思(一)　1. 思因果：思考在解题过程中运用了哪些知识点、已知条件及它们之间的联系，还有哪些条件没有用过，结果与题意或实际生活是否相符等. 2. 思规律：思考所运用的方法，总结规律，达到举一反三的目的，提高知识迁移能力. 3. 思多解：思考多种解法，比较孰繁孰简，孰优孰劣，久而久之，就可以对每一道题在最短时间内找到最优的方法.



模板攻略

必修2

1. 模板解决思路

直线与圆的位置关系是圆的重点内容，由于圆的特殊性，解答直线与圆的位置关系问题的方法多种多样，繁简不一，要注意方法的选择. 对于求参数的取值范围问题，一般将直线与圆的位置关系转化为圆心和半径的几何问题，然后根据距离公式列出方程(不等式(组))，解方程(不等式(组))，得解.

2. 模板解决步骤

1 第一步　求出圆心和半径.

2 第二步　将直线与圆满足某种位置关系的问题转化为关于圆心和半径的几何问题.

3 第三步　根据几何问题，列出关于参数的方程(不等式(组)).

4 第四步　解方程(不等式(组))，求出参数的值(或取值范围).

3. 典型例题

典例 1　(安徽高考)若直线 $x-y+1=0$ 与圆 $(x-a)^2+y^2=2$ 有公共点，则实数 a 的取值范围是(　　).

A. $[-3,-1]$　　B. $[-1,3]$

C. $[-3,1]$　　D. $(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$

思路分析: 已知直线与圆的位置关系时，常用几何法将位置关系转化为圆心到直线的距离 d 与半径 r 的大小关系，以此来确定参数的值或取值范围.

解析: 圆心 $(a,0)$ 到直线 $x-y+1=0$ 的距离为 d，　①

则 $d\leqslant r$，即 $\frac{|a+1|}{\sqrt{2}}\leqslant\sqrt{2}$，　②~③

解得 $-3\leqslant a\leqslant 1$.　④

答案: C

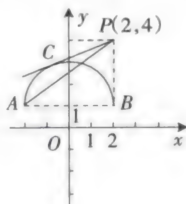
典例 2　当函数 $y=1+\sqrt{4-x^2}$ 与函数 $y=k(x-2)+4$ 的图象有两个相异交点时，实数 k 的取值范围是(　　).

A. $\left(0,\frac{5}{12}\right)$　　B. $\left(\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right]$

C. $\left(\frac{5}{12},\frac{3}{4}\right]$　　D. $\left(\frac{5}{12},+\infty\right)$

思路分析: 分析两个函数的特征，$y=1+\sqrt{4-x^2}$ 可看作关于 x,y 的二元二次方程. 画出图形，一个是上半圆，一个是恒过定点的直线，使二者有两个交点，从图形上分析便知.

解析: 曲线 $y=1+\sqrt{4-x^2}$ 是以 $(0,1)$ 为圆心，2 为半径的半圆(如图).



直线 $y=k(x-2)+4$ 是过定点 $(2,4)$ 的直线.　①

设切线 PC 的斜率为 k_0，

则切线 PC 的方程为 $y=k_0(x-2)+4$.

圆心 $(0,1)$ 到直线 PC 的距离等于半径 2，

即 $\frac{|1+2k_0-4|}{\sqrt{1+k_0^2}}=2$，解得 $k_0=\frac{5}{12}$.

设直线 PA 的斜率为 k_1，则 $k_1=\frac{3}{4}$.　②~③

所以实数 k 的取值范围 $\frac{5}{12}<k\leqslant\frac{3}{4}$.　④

答案: C

误区警示

在解决直线与圆的位置关系时要充分考虑平面几何知识的运用，如在直线与圆相交的有关线段长度计算中，要把圆的半径、圆心到直线的距离、直线被圆截得的线段长度放在一起综合考虑，这样既简单又不容易出错.



解题后的六思(二)　4. 思变通：对一道题不局限于就题论题，要进行适当变化引申，一题变多题，拓宽思路，提高应变能力，防止思维定势. 5. 思归类：回忆与该题同类的习题，进行对比，找到解这一类题的技巧和方法，从而达到触类旁通的目的. 6. 思错误：思考题中易混易错的地方，找出错误原因和解决方法，提高辨析错误的能力.

知识要点

1. 直线与圆的位置关系

直线和圆有相离、相切、相交三种位置关系.

位置关系	相离	相切	相交
公共点	没有公共点	只有一个公共点	有两个公共点
二元二次方程组	无解	仅有一组解	有两组不同的解
消元后的一元二次方程	无实数根($\Delta<0$)	有两个相等的实数根($\Delta=0$)	有两个不相等的实数根($\Delta>0$)
圆心到直线的距离 d 与圆的半径 r 的关系	$d>r$	$d=r$	$d<r$
图示	r, d	d=r	r, d

2. 圆的切线

(1)过圆上一点的切线方程

与圆 $x^2+y^2=r^2$ 相切于点(x_1,y_1)的切线方程是 $x_1x+y_1y=r^2$.

与圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 相切于点(x_1,y_1)的切线方程是$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$.

(2)过圆外一点切线方程的求法

设 $P_0(x_0,y_0)$是圆$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 外一点,求过点 P_0 的切线.

方法一:设切点是 $P_1(x_1,y_1)$,解方程组

$$\begin{cases}(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=r^2,\\(x_0-a)(x_1-a)+(y_0-b)(y_1-b)=r^2,\end{cases}$$

求出切点 P_1 的坐标,即可写出切线方程.

方法二:设切线方程是 $y-y_0=k(x-x_0)$,即 $kx-y-kx_0+y_0=0$,再由 $\frac{|ka-b-kx_0+y_0|}{\sqrt{1+k^2}}=r$ 求出待定系数 k,就可写出切线方程.

特别提示

一般来说,用方法二比较简单,但应注意,可能遗漏 k 不存在时的切线. 因此,当解出的 k 值唯一时,应观察图形,看是否有垂直于 x 轴的切线.

3. 点与圆的位置关系

已知圆心$C(a,b)$,半径r,点M的坐标为(x_0,y_0),则

$|MC|<r\Leftrightarrow(x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2\Leftrightarrow$点$M$在圆$C$内;

$|MC|=r\Leftrightarrow(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2\Leftrightarrow$点$M$在圆$C$上;

$|MC|>r\Leftrightarrow(x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2\Leftrightarrow$点$M$在圆$C$外.

其中$|MC|=\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2}$.

模板演练

➡ 答案详见 P397

1. 若直线 $y=x+b$ 与曲线 $y=3-\sqrt{4x-x^2}$ 有公共点,则 b 的取值范围是(　　).

A. $[-1,1+2\sqrt{2}]$　　B. $[1-2\sqrt{2},1+\sqrt{2}]$

C. $[1-2\sqrt{2},3]$　　D. $[1-\sqrt{2},3]$

2. 若直线 $x+y+m=0$ 与圆 $x^2+y^2=2$ 相切,则 m 的值为(　　).

A. 0 或 2　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. ±2

3. 直线 $4x-3y-2=0$ 与圆 $x^2+y^2-2ax+4y+a^2-12=0$ 总有两个交点,则 a 应满足(　　).

A. $-3<a<7$　　B. $-6<a<4$

C. $-7<a<3$　　D. $-21<a<19$

以"错"纠错,查漏补缺(一) 有人把试卷看成是一张张的网,每次考试都相当于在捕鱼. 如果发现有鱼从渔网上漏掉,就要及时修好渔网,下次捕鱼时才不至于有鱼再从这个洞里漏掉. 学习知识也是这样. 有的同学做题只重数量不重质量,做过之后不问对错就放到一边,这种做法很不科学. 做题的目的是培养能力,是寻找自己的弱点和不足.



模板 4　求圆与圆位置关系中的参数【5年4考】

模板探究

母题呈现	模板引入
已知两圆 $x^2+y^2-2x-6y-1=0$，$x^2+y^2-10x-12y+m=0$. 则 (1)m 取何值时两圆外切？ (2)m 取何值时两圆内切？	本模板解决的是“已知含参数的圆与圆满足某种位置关系时，求参数的值(取值范围)”的问题.
解：因为两圆的标准方程分别为 $(x-1)^2+(y-3)^2=11$，$(x-5)^2+(y-6)^2=61-m$，所以两圆的圆心分别为 $M(1,3)$，$N(5,6)$，半径分别为 $\sqrt{11}$ 和 $\sqrt{61-m}$. (1)当两圆外切时，由 $\sqrt{(5-1)^2+(6-3)^2}=\sqrt{11}+\sqrt{61-m}$，得 $m=25+10\sqrt{11}$. (2)当两圆内切时，因为定圆的半径 $\sqrt{11}$ 小于两圆圆心之间的距离 5， 所以只有 $\sqrt{61-m}-\sqrt{11}=5$. 解得 $m=25-10\sqrt{11}$.	第一步　将两圆方程化为标准方程，得到两圆的圆心和半径. 第二步　将两圆的位置关系转化为两圆圆心和半径的几何问题. 第三步　列出方程. 第四步　解方程，求出结果.

模板攻略

1. 模板解决思路

根据两圆位置关系求参数的值或取值范围时，一般将两圆的位置关系转化为圆心和半径的几何问题，利用距离公式列出方程(组)或不等式(组)，解出所求结果.

2. 模板解决步骤

1 第一步　将两个圆的方程写成标准方程，确定两圆的圆心和半径.

2 第二步　将两圆满足某种位置关系的问题转化成关于两圆圆心和半径的几何问题.

3 第三步　根据几何问题，列出关于参数的方程(组)或不等式(组).

4 第四步　解方程(组)或不等式(组)，求出参数的值或取值范围.

3. 典型例题

典例　(江苏高考)在平面直角坐标系 xOy 中，圆 C 的方程为 $x^2+y^2-8x+15=0$，若直线 $y=kx-2$ 上至少存在一点，使得以该点为圆心，1 为半径的圆与圆 C 有公共点，则 k 的最大值是________.

解析：由题意知圆 C 方程可转化为 $(x-4)^2+y^2=1$，　①

设圆心 $C(4,0)$ 到直线 $y=kx-2$ 的距离为 d，

则 $d=\frac{|4k-2|}{\sqrt{k^2+1}}$，由题意知问题转化为 $d\leqslant 2$，　②

即 $\frac{|4k-2|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant 2$，　③

解得 $0\leqslant k\leqslant \frac{4}{3}$，所以 $k_{max}=\frac{4}{3}$.　④

答案：$\frac{4}{3}$



凯尔微博

以“错”纠错，查漏补缺(二)　如果平时做题出错较多，只需在错题上做上标记，在旁边写上评析，然后把试卷保存好，每过一段时间，就把“错题笔记”或标记错题的试卷看一看. 在看参考书时，也可以把精彩之处或做错的题目做上标记，以后再看这本书时就会有所侧重. 查漏补缺的过程就是反思的过程. 除了把不同的问题弄懂以外，还要学会“举一反三”，及时归纳.

知识要点

1. 圆与圆的位置关系

两圆的位置关系有外离、外切、相交、内切和内含.

2. 圆与圆位置关系的判断

(1)利用两圆的交点进行判断

设两圆的方程组成的方程组为

$$\begin{cases}x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0,\\x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0.\end{cases}$$

则此方程组:

有两组不同的实数解⇔两圆相交;

有一组实数解⇔两圆外切或内切;

无实数解⇔两圆外离或内含.

(2)利用两圆的圆心距进行判断

设两圆 $C_1:(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2$,$C_2:(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$,

圆心距 $d=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2}$,则

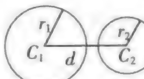
$d>r_1+r_2$⇔两圆外离;

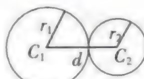
$d=r_1+r_2$⇔两圆外切;

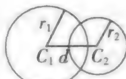
$|r_1-r_2|<d<r_1+r_2$⇔两圆相交;

$d=|r_1-r_2|$⇔两圆内切;

$d<|r_1-r_2|(r_1\neq r_2)$⇔两圆内含.


两圆外离


两圆外切


两圆相交


两圆内切


两圆内含

特别提示

圆 $C_1:x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0$ 与圆 $C_2:x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0$ 相交时,

(1)将两圆方程直接作差,得到两圆公共弦所在直线方程;

(2)两圆圆心的连线垂直平分公共弦;

(3)$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+\lambda(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$,其中 $\lambda\neq-1$,表示过两圆交点的圆系方程(不包括圆 C_2).

模板演练

➡ 答案详见 P398

1. 圆 $x^2+y^2-ax+2y+1=0$ 关于直线 $x-y=1$ 对称的圆的方程为 $x^2+y^2-1=0$,则实数 a 的值是(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. ±2

2. 若曲线 $C_1:x^2+y^2-2x=0$ 与曲线 $C_2:y(y-mx-m)=0$ 有四个不同的交点,则实数 m 的取值范围是(　　).

A. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

B. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

C. $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

D. $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$

3. 若圆 $x^2+y^2-ax+2y+1=0$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 关于直线 $y=x-1$ 对称,过点 $C(-a,a)$ 的圆 P 与 y 轴相切,则圆心 P 的轨迹方程为(　　).

A. $y^2-4x+4y+8=0$

B. $y^2+2x-2y+2=0$

C. $y^2+4x-4y+8=0$

D. $y^2-2x-y-1=0$

4. 设 $M=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant25\}$,$N=\{(x,y)|(x-a)^2+y^2\leqslant9\}$,若 $M\cup N=M$,则实数 a 的取值范围是______.

抓计算能力(一)　计算能力是高考四大能力要求之一,也是同学们的薄弱环节之一.冲刺阶段应突出练习,通过动手、动脑做题,在解题中提高运算能力.特别是培养应用知识正确运算和变形,寻求设计合理、简捷的运算途径,根据要求对数字进行估算和近似计算.每次练习都要做到"三要".



模板 5　弦长或公共弦长问题【5 年 12 考】

模板探究

母题呈现	模板引入
（安徽高考）直线 $x+2y-5+\sqrt{5}=0$ 被圆 $x^2+y^2-2x-4y=0$ 截得的弦长为(　　). A. 1　B. 2　C. 4　D. $4\sqrt{6}$	本模板解决的是“求直线被圆截得的弦长或两圆相交的公共弦长”的问题.
解析：依题意，圆的圆心为(1,2)，半径 $r=\sqrt{5}$，圆心到直线的距离 $d=\frac{\|1+4-5+\sqrt{5}\|}{\sqrt{5}}=1$，所以结合图形可知弦长的一半为 $\sqrt{r^2-d^2}=2$，故弦长为 4. **答案**：C	第一步　利用点到直线的距离公式求出弦心距的大小. 第二步　利用半径、弦长的一半及弦心距构成的直角三角形，求出弦长的一半. 第三步　得弦长.

模板攻略

1. 模板解决思路

直线被圆所截得的弦长问题是直线与圆相交时产生的问题，也是直线与圆的位置关系的一个衍生问题. 常用的方法有：一是根据平面几何知识结合坐标的方法，把弦长用圆的半径和圆心到直线的距离表示；二是通过联立直线与圆的方程，利用根与系数的关系，建立弦长与交点坐标的关系这一代数方法解决.

2. 模板解决步骤

①第一步　两圆方程相减消掉二次项，所得直线方程就是公共弦所在的直线方程，公共弦长问题转化为直线被圆截得的弦长问题.

②第二步　利用半径、弦长的一半及弦心距构成的直角三角形，将问题转化为几何问题.

③第三步　代入相关数据，求出弦长. 或利用方程和距离公式求出弦长.

3. 典型例题

典例 1　（四川高考）直线 $x-2y+5=0$ 与圆 $x^2+y^2=8$ 相交于 A,B 两点，则 $|AB|=$________.

解析：圆心到直线 $x-2y+5=0$ 的距离为

$d=\frac{5}{\sqrt{1+4}}=\sqrt{5}$，　②

则 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{8-5}=2\sqrt{3}$.　③

答案：$2\sqrt{3}$

典例 2　若圆 $x^2+y^2=4$ 与圆 $x^2+y^2+2ay-6=0(a>0)$ 的公共弦的长为 $2\sqrt{3}$，则 $a=$________.

解析：两圆的方程相减，得公共弦所在的直线方程为 $(x^2+y^2+2ay-6)-(x^2+y^2)=0-4$，即 $y=\frac{1}{a}$，　①

又 $a>0$，结合图象，再利用半径、弦长的一半及弦心距所构成的直角三角形，　②

可知 $\frac{1}{a}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$，$a=1$.　③

答案：1



抓计算能力(二)　一要熟练、准确，它是解题的基本要求；二要简捷、迅速，这是解题的进一步要求，体现思维的敏捷性和深刻性；三要注重思维过程、思维方式的科学性，在处理数量关系时，能根据题目条件寻求合理、简捷的运算途径，还要养成较强的心算和笔算速度，真正做到准确与速度、简捷与熟练有机结合.

知识要点

直线与圆相交于两点 A,B,则求弦 AB 长的方法有两种:

(1)几何方法

运用弦心距 d(即圆心到直线的距离)、弦长的一半及半径 r 构成的直角三角形计算,$|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}$.

(2)代数方法

①联立直线与圆的方程,求得 A,B 两点的坐标,再用两点间的距离公式求弦长.

②设 $A(x_A,y_A),B(x_B,y_B)$,由根与系数关系及弦长公式知,$|AB|=\sqrt{1+k^2}\ |x_A-x_B|$

$=\sqrt{(1+k^2)[(x_A+x_B)^2-4x_Ax_B]}$($k$ 为直线 AB 的斜率).

模板演练

➜ 答案详见 P398

1.(陕西高考)过原点且倾斜角为 60°的直线被圆 $x^2+y^2-4y=0$ 所截得的弦长为(　　).

A. $\sqrt{3}$　　B. 2　　C. $\sqrt{6}$　　D. $2\sqrt{3}$

2.(重庆高考)设 A,B 为直线 $y=x$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 的两个交点,则 $|AB|=$(　　).

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

3.(福建高考)直线 $x+\sqrt{3}\ y-2=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 相交于 A,B 两点,则弦 AB 的长度等于(　　).

A. $2\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 1

4.(广东高考)在平面直角坐标系 xOy 中,直线 $3x+4y-5=0$ 与圆 $x^2+y^2=4$ 相交于 A,B 两点,则弦 AB 的长等于(　　).

A. $3\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 1

5.(北京高考)直线 $y=x$ 被圆 $x^2+(y-2)^2=4$ 截得弦长为______.

6.(浙江高考)直线 $y=2x+3$ 被圆 $x^2+y^2-6x-8y=0$ 所截得的弦长等于______.

模板 6　与圆有关的最值问题 【5 年 6 考】

模板探究

母 题 呈 现	模 板 引 入
若直线 $2ax-by+2=0(a>0,b<0)$ 被圆 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 截得的弦长为 4,则 ab 的最大值是(　　). A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. 4	本模板解决的是"与圆有关的最值"的问题.
解析: 圆 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 的圆心为 $(-1,2)$,半径 $r=2$. 因为直线被截得的弦长为 4,则圆心在直线 $2ax-by+2=0$ 上,所以 $-2a-2b+2=0$,即 $a+b=1$. 所以 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号. 故 $(ab)_{max}=\frac{1}{4}$. **答案:** A	第一步　由圆的方程求出圆心、半径,可得圆的直径等于所截弦长. 第二步　由上可得圆心在直径上,代入得到 $a+b=1$. 第三步　借助基本不等式,求出 ab 的最大值.

爱你的妈妈　我妈妈的办公室有一台传真机,尽管我一再告诉她传真要快得多,便宜得多,她还是一如既往毫不气馁地给我写信. 但是,我生日的时候,妈妈表示,她终于学会用这种技术了. 她传真给我 100 元并写着:"生日快乐,宝贝. 你完全正确——传真确实比邮寄便宜得多. 爱你的妈妈."

凯尔微博



模板攻略

1. 模板解决思路

研究与圆有关的最值问题时,可借助图形的性质,利用数形结合求解. 一般地,

(1)形如 $u=\frac{y-b}{x-a}$ 型的最值问题,可转化为动直线的斜率的最值问题;

(2)形如 $t=ax+by$ 型的最值问题,可转化为动直线的截距的最值问题;

(3)形如 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 型的最值问题,可转化为动点到定点的距离的最值问题.

2. 模板解决步骤

1 第一步　审清题意,分析所求最值与已知条件的关联.

2 第二步　利用基本不等式、距离公式或有关圆的几何性质,列出关于所求最值的不等式或直接写出所求最值等式.

3 第三步　解不等式,求出最值.

3. 典型例题

典例　(天津高考)设 $m,n\in\mathbf{R}$,若直线 $l:mx+ny-1=0$ 与 x 轴相交于点 A,与 y 轴相交于点 B,且 l 与圆 $x^2+y^2=4$ 相交所得弦的长为 2,O 为坐标原点,则 $\triangle AOB$ 面积的最小值为________.

解析: 直线与两坐标轴的交点坐标为 $A\left(\frac{1}{m},0\right)$,$B\left(0,\frac{1}{n}\right)$,直线与圆相交所得的弦长为 2,圆心到直线的距离 d 满足 $d^2=r^2-1^2=4-1=3$,所以 $d=\sqrt{3}$,即圆心到直线的距离 $d=\frac{|-1|}{\sqrt{m^2+n^2}}=\sqrt{3}$,所以 $m^2+n^2=\frac{1}{3}$. 三角形的面积为 $S=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{m}\right|\left|\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{2|mn|}$, 1

又 $S=\frac{1}{2|mn|}\geqslant\frac{1}{m^2+n^2}=3$,当且仅当 $|m|=|n|=\frac{\sqrt{6}}{6}$ 时取等号,所以 $\triangle AOB$ 面积的最小值为 3. 2~3

答案:3

模板演练

➡ 答案详见 P398

1. 已知直线 $\sqrt{2}ax+by=1$(其中 a,b 是实数)与圆 $x^2+y^2=1$ 相交于 A,B 两点,O 是坐标原点,且 $\triangle AOB$ 是直角三角形,则点 $P(a,b)$与点 $M(0,1)$之间的距离的最大值为(　　).

A. $\sqrt{2}+1$　B. 2　C. $\sqrt{2}$　D. $\sqrt{2}-1$

2. 点 P 是直线 $2x+y+10=0$ 上的动点,直线 PA、PB分别与圆 $x^2+y^2=4$ 相切于 A、B 两点,则四边形$PAOB$(O 为坐标原点)的面积的最小值等于(　　).

A. 24　B. 16　C. 8　D. 4

3. 圆 $x^2+y^2=1$ 上的点与圆 $(x-3)^2+(y+4)^2=4$ 上的点的最短距离为______.

4. 若 x,y 满足 $(x-1)^2+(y+2)^2=4$,求 $S=2x+y$ 的最大值和最小值.

5. 已知实数 x,y 满足方程 $x^2+y^2-4x+1=0$,求:

(1)$\frac{y}{x}$ 的最大值;

(2)$y-x$ 的最小值.

凯尔微博



吴文俊(一)　吴文俊,中国现代数学家,1919 年 5 月 12 日生于上海. 1940 年毕业于上海交通大学数学系,1949 年在法国斯特拉斯堡大学获法国国家科学博士学位,1957 年任中国科学院学部委员,1983 年任中国科学院系统科学研究所名誉所长,1974 年当选为中国数学会理事长. 1956 年因在拓扑学的示性类与示嵌类方面的卓越成就获中国自然科学奖一等奖.

第一章 算法初步

模板1 根据程序框图写出运算结果 [5年80考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(安徽高考)如图所示,程序框图(算法流程图)的输出结果是( ). A. 3 B. 4 C. 5 D. 8 开始 → $x=1,y=1$ → $x\leqslant4$? 是 → $x=2x,y=y+1$;否 → 输出 y → 结束	本模板解决的是"包含循环结构的程序框图的运算结果"的问题.
解析:$x=1,y=1$,则第一次执行循环体:$x=2,y=2$;第二次执行循环体:$x=4,y=3$;第三次执行循环体:$x=8,y=4$,跳出循环. 故输出的结果是4. **答案**:B	第一步 确定循环结构开始前各变量的值. 第二步 写出每一次执行循环体时 x 和 y 的值,直到跳出循环. 第三步 写出输出结果是4.

模板攻略

1. 模板解决思路

算法中共包含三种逻辑结构:顺序结构、条件结构和循环结构,其中循环结构是各类考试中考查的重点. 涉及多项的求和或求积的程序框图要用到循环结构,做题时应注意三个量:循环变量的初值、终值、循环变量的增量在程序中的作用与位置. 在使用循环结构寻数时,要明确所寻找数字的结构特征,找出决定循环的终止条件与数的结构特征的关系. 在统计数时,注意要统计的数的出现次数与循环次数的区别.

2. 模板解决步骤

①第一步 弄清楚初值和循环结构开始前的各变量的值.

②第二步 根据循环的步长,每循环一次为一组,写出各组中各变量的值,直到跳出循环.

③第三步 写出运算结果.

3. 典型例题

典例1 (湖南高考)如果执行如图所示的程序框图,输入 $x=4.5$,则输出的数 $i=$_________.

思路分析:本题的循环结构是"直到型",先执行循环体,后判断.

解析:输入 $x=4.5$,初始值 $i=1$, 1

第一次 $x=4.5-1=3.5\geqslant1$,

吴文俊(二) 近20年由于在数学机器证明等方面作出了重大贡献,于2001年再次获得中国自然科学奖一等奖. 他的主要贡献为拓扑学、中国数学史、数学证明等. 在拓扑学中,他定义了吴类 V:$VX=SqV$. 这一公式和另外一个也被称为吴公式的关于Sqiw的公式,对拓扑学的发展起着巨大作用.



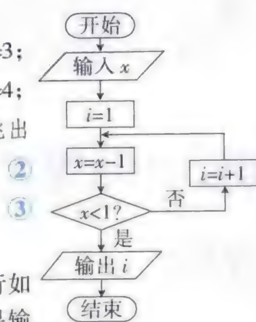
$i=2$;

第二次 $x=3.5-1=2.5\geqslant1$, $i=3$;

第三次 $x=2.5-1=1.5\geqslant1$, $i=4$;

第四次 $x=1.5-1=0.5<1$,跳出循环. ②

输出 $i=4$. ③



答案:4

典例 2 (山东高考)执行如图所示的程序框图,如果输入 $a=4$,那么输出的 n 的值为( ).

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

思路分析:本题的循环结构是"当型".先判断,再执行循环体.

解析:当 $a=4$ 时,$P=0$, $Q=1$, $n=0$. ①

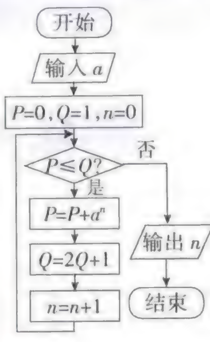
第一次 $P=0+4^0=1$, $Q=3$, $n=1$;

第二次 $P=1+4^1=5$, $Q=7$, $n=2$;

第三次 $P=5+4^2=21$, $Q=15$, $n=3$;

此时 $P\leqslant Q$ 不成立,跳出循环. ②

输出 $n=3$,故选 B. ③



答案:B

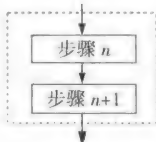
知识要点

1. 程序框图的图形符号及其作用

图形符号	名称	功能
(圆角矩形)	终端框(起止框)	表示一个算法的起始和结束
(平行四边形)	输入、输出框	表示一个算法输入和输出的信息
(矩形)	处理框(执行框)	赋值、计算
(菱形)	判断框	判断某一条件是否成立,成立时在出口处标明"是"或"Y";不成立时标明"否"或"N"
(箭头)	流程线	连接程序框
○	连接点	连接程序框图的两部分

2. 顺序结构

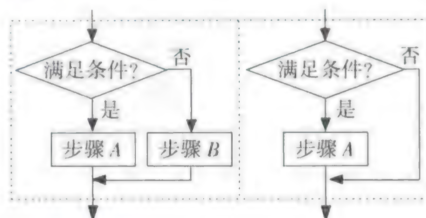
由若干个依次执行的步骤组成,是任何一个算法都离不开的基本结构.顺序结构可以用程序框图表示,如图.



3. 条件结构

在一个算法中,经常会遇到一些条件的判断,算法的流程根据条件是否成立有不同的流向.条件结构就是处理这种过程的结构.

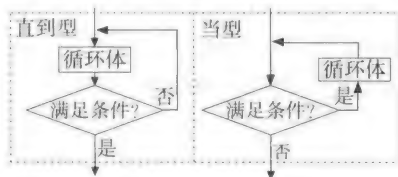
常见的条件结构可以用程序框图表示为下面两种形式:



4. 循环结构

在一些算法中,经常会出现从某处开始,按照一定的条件反复执行某些步骤的情况,这就是循环结构.反复执行的步骤称为循环体.

循环结构可以用程序框图表示为:



直到型循环结构:在执行了一次循环体后,对条件进行判断,如果条件不满足,就继续执行循环体,直到条件满足时终止循环.

当型循环结构:在每次执行循环体前,对条件进行判断,当条件满足时,执行循环体,否则终止循环.

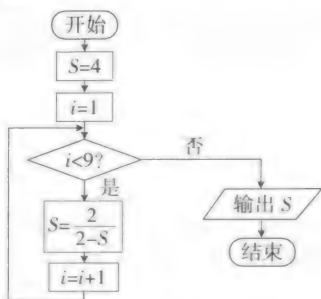
凯尔微博

吴文俊(三) 20世纪70年代初期,吴文俊开始研究中国古代数学史,20世纪70年代后期,致力于数学机械化与机械化的数学的研究,在计算机上证明了一类高难度的定理,同时发现了一些新定理.他把D·希尔伯特《几何基础》一书中的一些主要思想在计算机上加以体现,提出了机器证明与发现的新方法.2000年,吴文俊获得了国家科学技术最高奖.

模板演练

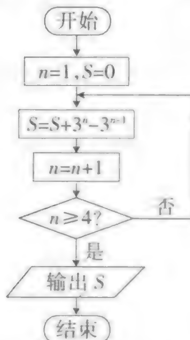
➡ 答案详见 P399

1. (辽宁高考)执行如图所示的程序框图,则输出的 S 值是(　　).



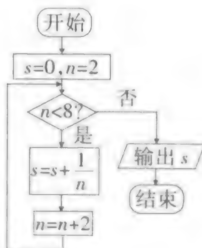
A. -1　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 4

2. (天津高考)阅读下边的程序框图,运行相应的程序,则输出 S 的值为(　　).



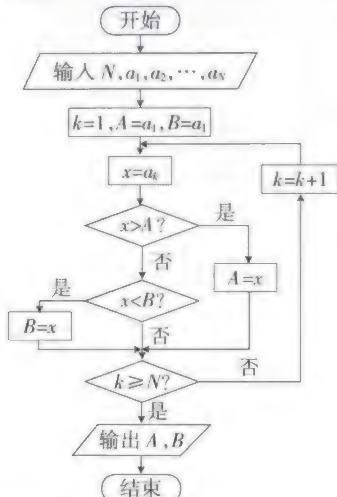
A. 8　　B. 18　　C. 26　　D. 80

3. (安徽高考)如图,程序框图(算法流程图)的输出结果是(　　).



A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{25}{24}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{11}{12}$

4. (新课标全国高考)如果执行如图所示的程序框图,输入正整数 $N(N\geqslant2)$ 和实数 $a_1,a_2,\cdots,a_N$,输出 A,B,则(　　).



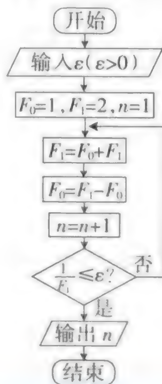
A. $A+B$ 为 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 的和

B. $\frac{A+B}{2}$ 为 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 的算术平均数

C. A 和 B 分别是 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 中最大的数和最小的数

D. A 和 B 分别是 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 中最小的数和最大的数

5. (山东高考)执行下面的程序框图,若输入的 ε 的值为 0.25,则输出的 n 的值为 ______.

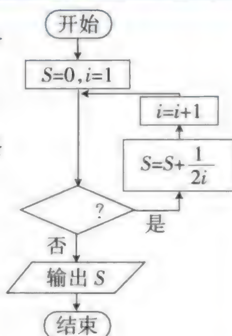


"准、快、灵"意识(一)　数学考试要做到"准、快、灵",解题时一定要切记"欲速则不达".培养"一次成功"的解题习惯应从以下四方面入手:(1)审题要准:审题时,速度不宜太快,而且最好采取二次读题的方法,第一次为泛读,大致了解题目的条件和要求;第二次为精读,根据要求找出题目的关键词语并挖掘题目的隐含条件.



模板 2　根据运算结果选择判断框内的内容 【5 年 14 考】

模板探究

母题呈现	模板引入
如图是计算 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{20}$ 的值的一个程序框图，其中在判断框内应填入的条件是(　　). A. $i\leqslant10$ B. $i>10$ C. $i\leqslant20$ D. $i>20$  	本模板解决的是“已知运算结果，选择循环结构的判断框内应填什么”的问题.
解析： 要实现所求算法，框图中最后一次执行循环体时 i 的值应为 10， 结果条件满足时执行循环体，当 $i=11>10$ 时就会终止循环，所以条件应为 $i\leqslant10$，故选 A. **答案：** A	第一步　分析题目条件，确定跳出变量执行最后一次循环体时 i 的值应为 10. 第二步　分析循环类型，确定 i 终止循环时满足的条件. 第三步　写出判断框内的条件应为 $i\leqslant10$.

模板攻略

1. 模板解决思路

当已知含有循环结构的程序框图的运算结果，需要选择判断框内的内容时，可从输出结果着手，确定跳出变量，分析循环结构类型，确定跳出循环的条件，写出判断框内的条件.

2. 模板解决步骤

1 第一步　确定跳出变量，并弄清楚循环结构是当型还是直到型.

2 第二步　根据循环的步长，每循环一次为一组，写出每组中各变量的值，直到符合已知的运算结果.

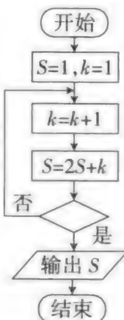
3 第三步　根据临界值，结合当型或直到型循环结构的特点，写出或选择判断框内的条件.

3. 典型例题

典例　(浙江高考)某程序框图如图所示，若输出的 $S=57$，则判断框内为(　　).

A. $k>4$?　　B. $k>5$?

C. $k>6$?　　D. $k>7$?



思路分析： 观察程序框图，找出程序框图所表达的含义，或将程序运行几次，在此过程中找出变量之间的规律，结合规律，找出循环结束的条件. 解题时要特别注意“临界值”的判断.

解析： 由程序框图可知，跳出变量应为 k，　①

$k=1$ 时，$S=1$；



“准、快、灵”意识(二)　(2)算理要清：在解题过程中不仅要明确每一种运算的基本步骤和方法，还要明确这种运算的条件是否具备.(3)跨度要小：解题过程(尤其是运算过程)的衔接要紧密，尽量不用心算代替笔算.(4)考虑要周：切忌思考问题丢三落四、想当然、麻痹大意，在平时训练时出现此种情形要特别考虑一下在知识和方法上的缺陷.

$k=2$ 时，$S=2\times1+2=4$；
$k=3$ 时，$S=2\times4+3=11$；
$k=4$ 时，$S=2\times11+4=26$；
$k=5$ 时，$S=2\times26+5=57$，　②

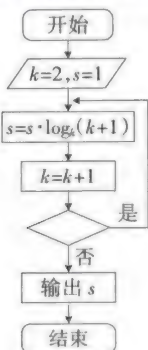
由于循环结构为直到型，且 $k=5$ 时，跳出循环，故判断框内应填“$k>4$？”，故选 A.　③

答案：A

模板演练

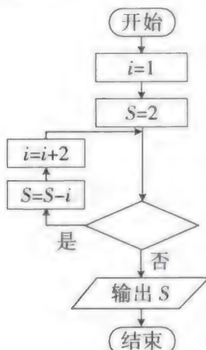
➡ 答案详见 P399

1.（重庆高考）执行如图所示的程序框图，如果输出 $s=3$，那么判断框内应填入的条件是（　　）.



A. $k\leqslant6$　　B. $k\leqslant7$　　C. $k\leqslant8$　　D. $k\leqslant9$

2. 阅读程序框图（如图），若输出 S 的值为-7，则判断框内可填写（　　）.



A. $i<3$?　　B. $i<4$?　　C. $i<5$?　　D. $i<6$?

3. 图 1 是某县参加某年高考的学生身高条形统计图，从左右到的各条形表示的学生人数依次记为 A_1、A_2、…、A_{10}（如 A_2 表示身高（单位：cm）在[150,155]内的学生人数）.图 2 是统计图 1 中身高在一定范围内学生人数的一个算法流程图.现要统计身高在 160~180cm（含 160cm，不含 180cm）的学生人数，那么在流程图中的判断框内应填写的条件是（　　）.

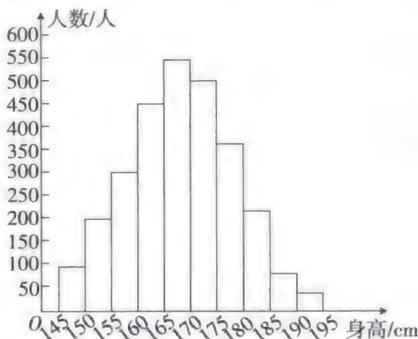


图 1

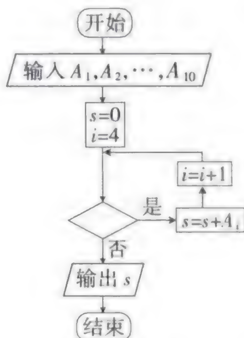


图 2

A. $i<9$　　B. $i<8$　　C. $i<7$　　D. $i<6$

模式识别意识（一） 所谓模式识别，就是指对于一些特征比较明显、综合性不是很强的问题，在看完题目的条件和结论后，能够快速反应出该题是什么问题，用什么方法求解的思维过程. 在整个数学高考过程中，考生用于读题的时间大约 15 分钟，抄写答题（含填涂答题卡）的时间不会少于 20 分钟，故用于思考和演算的时间最多只有 85 分钟.

PASS

模板 3 根据基本算法语句写出结果 【5年4考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(陕西高考)根据下列算法语句,当输入 x 为 60 时,输出 y 的值为( ). A. 25 B. 30 C. 31 D. 61 输入 x; If $x\leqslant 50$ Then $y=0.5*x$ Else $y=25+0.6*(x-50)$ End If 输出 y.	本模板解决的是"根据由基本算法语句编写的程序,写出输出结果"的问题.
解析:阅读算法语句易知,本题是一个求解分段函数 $f(x)=\begin{cases}0.5x, x\leqslant 50,\\ 25+0.6(x-50), x>50\end{cases}$ 的值的算法, $\therefore f(60)=25+0.6(60-50)=31$. **答案:**C	第一步 分析题目,可知此程序采用条件语句编写. 第二步 由条件语句可得,此程序是一个关于分段函数求值的问题并写出分段函数. 第三步 代入求值,求出结果.

必修 3

模板攻略

1. 模板解决思路

对于用算法语句编写的程序,首先要明确输入、输出、赋值、条件和循环语句的特征和作用,对于含有条件语句的程序,要按照所给条件进行分析、比较、判断,并按判断后的不同情况进行不同处理,若条件语句中有程序嵌套,应逐次进行判断,执行相应运算,而对于含有循环语句的程序,应注意 UNTIL 语句和 WHILE 语句的区别,找准判断与执行的先后顺序,然后分析程序的具体过程,明确所求问题,按程序步骤一步一步写出结果. 若语句形式较为复杂,必要时可先画出程序框图,帮助理解.

2. 模板解决步骤

1 第一步 阅读算法语句,分析语句类型.

2 第二步 写出程序所解决的具体问题,必要时可借助程序框图理解.

3 第三步 代入求值.

3. 典型例题

典例 已知程序如下:

```
INPUT  "x=";x
IF  x>0  THEN
  y=-2
ELSE
  IF  x=0  THEN
    y=0
  ELSE
    y=2
  END  IF
END  IF
PRINT  y
END
```

若输入 π,则输出的结果是( ).

A. −2 B. 0 C. π D. 2

解析:此程序采用条件语句编写,

1



模式识别意识(二) 要想在高考中取得优异成绩,数学试卷中至少要有 15 道题不应占用很多的思考时间. 在二轮复习的过程中,考生应注意把每一章的重要题型、主要解题方法和技巧、综合题型不断梳理、强化,做到烂熟于心,同时要注意这些重要题型的变化形式. 对每个重要题型(变式形式)要选择 2-3 个问题进行演练,以确保这些问题在运算时不出错误.

表示的函数为分段函数

$$y=\begin{cases}-2(x>0),\\0(x=0),\\2(x<0).\end{cases}$$ ②

故输入 π 时，$x=\pi$，$y=-2$，故选A. ③

答案：A

误区警示

解答或编写有条件语句的程序时注意条件满足与不满足所对应的不同结果，另外还要注意 IF-THEN-ELSE-END IF 的配对，尤其在嵌套结构中，一层配对就是一个完整的条件结构，在书写程序时不要漏掉某一部分.

知识要点

1. 输入语句、输出语句和赋值语句

输入语句、输出语句分别与程序框图中的输入、输出框对应，用来输入和输出信息. 赋值语句与程序框图中表示赋值的处理框对应，用来给变量赋值.

(1)输入语句

一般格式：INPUT "提示内容"；变量

(2)输出语句

一般格式：PRINT "提示内容"；表达式

(3)赋值语句

一般格式：变量=表达式

赋值语句就是将表达式所代表的值赋给变量. 赋值语句中的"="叫赋值号，它和数学中的等号不完全一样，计算机执行赋值语句时，先计算"="右边表达式的值，然后把这个值赋给"="左边的变量.

2. 条件语句

条件语句与程序框图中的条件结构相对应. 条件语句的一般格式有两种：①IF-THEN 语句；②IF-THEN-ELSE 语句.

①IF-THEN 语句

```
IF    条件    THEN
        语句体
END   IF
```

②IF-THEN-ELSE 语句

```
IF    条件    THEN
        语句体 1
ELSE
        语句体 2
END   IF
```

特别提示

在 IF-THEN-ELSE 语句中，"条件"表示判断的条件；"语句体 1"表示满足条件时执行的操作内容；"语句体 2"表示不满足条件时执行的操作内容；END IF 表示条件语句的结束. 计算机在执行时，首先对 IF 后的条件进行判断，如果条件符合，则执行 THEN 后面的语句体 1；如果条件不符合，则执行 ELSE 后面的语句体 2.

3. 循环语句

循环语句与程序框图中的循环结构相对应. 一般程序设计语言中都有直到型(UNTIL)和当型(WHILE)两种循环语句结构，分别对应于程序框图中的直到型和当型循环结构.

(1)直到型循环结构对应的 UNTIL 语句：

```
DO
    循环体
LOOP UNTIL    条件
```

(2)当型循环结构对应的WHILE语句：

```
WHILE    条件
    循环体
WEND
```

特别提示

直到型循环与当型循环的区别：

(1)直到型循环先执行循环体后判断，当型循环先判断后执行循环体.

(2)在 UNTIL 语句中，当条件不满足时执行循环体，在 WHILE 语句中，当条件满足时执行循环体.

简缩思维意识　培养简缩思维的最好方法就是进行一题多解的训练，在二轮复习阶段，考生在进行解题训练时，不要只重数量，而更应该关注"解题质量"，对每一道题目特别是重点题型要注意一题多解的，既要找到解这类题的基本方法，也要找到解这道题的特殊(简捷)的方法. 经过多次的训练，简缩思维的形成自然会水到渠成.

模板演练

➡ 答案详见 P400

1. 有以下程序：

```
A=3
B=5
A=B
B=A
PRINT  A,B
END
```

程序执行后的结果是(　　).

A. 3　5　　B. 5　3

C. 5　5　　D. 3　3

2. 下面程序运行后，输出的值是(　　).

```
i=0
DO
  i=i+1
LOOP  UNTIL  i * i>=2 000
  i=i-1
PRINT  i
END
```

A. 42　　B. 43　　C. 44　　D. 45

3. 下面程序运行后输出的结果为(　　).

```
a=0
j=1
WHILE  j<=5
   a=(a+j)MOD 5
   j=j+1
WEND
PRINT  a
END
```

A. 50　　B. 5　　C. 25　　D. 0

4. (福建高考)运行如图所示的程序，输出的结果是______.

```
a=1
b=2
a=a+b
PRINT  a
END
```

5. 以下给出了一个程序，根据该程序回答：

```
INPUT  x
IF  x<3  THEN
  y=2 * x
ELSE
  IF  x>3  THEN
    y=x * x-1
  ELSE
    y=2
  END  IF
END  IF
PRINT  y
END
```

(1)若输入 4，则输出的结果是_______；

(2)该程序表示的函数解析式为_______.

6. 下面程序运行结果输出 s 的值是_______.

```
s=0
i=1
WHILE   i<=3
   s=s+2*i
   i=i+1
WEND
PRINT   s
END
```


主动寻求解题思路(一) 不少同学有时见到一道题目一时找不到思路，就迫不及待去翻看答案，看答案时往往觉得答案的每一步都顺理成章，该用哪个定理，该用什么方法，非常简单，就自认为把题目已经理解透了. 但过几天再做这道题，还是无从下手，出现这种情况主要是由这道题的接受是一个被动的过程. 在这个过程中只是机械地看到了具体解题过程，而没有真正理解解题思路.

第二章　统　计

模板1　判断抽样方法【5年3考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(湖南高考)某学校有男、女学生各500名.为了解男、女学生在学习兴趣与业余爱好方面是否存在显著差异,拟从全体学生中抽取100名学生进行调查,则宜采用的抽样方法是(　　). A. 抽签法　　B. 随机数法 C. 系统抽样法　　D. 分层抽样法	本模板解决的是“判断选择哪种抽样方法”的问题.
解析:由该学校有男、女学生各500名可知总体是由差异明显的两部分组成.该调查是为了解男、女学生在学习兴趣与业余爱好方面是否存在显著差异,故应按性别采用分层抽样法. **答案**:D	第一步　该总体可按性别分为两部分. 第二步　由该调查是为了解男、女学生在学习兴趣和业余爱好上的差异,故采用分层抽样.

必修3

模板攻略

1. 模板解决思路

三种抽样方法的共同特点是在抽样过程中每个个体被抽取的机会相同,体现了这些抽样方法的客观性和公平性. 其中简单随机抽样是最简单和最基本的抽样方法,在进行系统抽样和分层抽样时都要用到简单随机抽样. 当总体中的个数较少时,常采用简单随机抽样;当总体中的个数较多时,常采用系统抽样;当已知总体是由差异明显的几部分组成时,常采用分层抽样.

2. 模板解决步骤

1 第一步　对总体和样本的数据进行分析.

2 第二步　若总体是由差异明显的几部分组成时,采用分层抽样;总体中的个体数较多时,采用系统抽样;总体中的个体数较少时,采用简单随机抽样.

3. 典型例题

典例　(新课标全国高考)为了解某地区的中小学生的视力情况,拟从该地区的中小学生中抽取部分学生进行调查,事先已了解到该地区小学、初中、高中三个学段学生的视力情况有较大差异,而男女生视力情况差异不大. 在下面的抽样方法中,最合理的抽样方法是(　　).

A. 简单随机抽样　　B. 按性别分层抽样

C. 按学段分层抽样　　D. 系统抽样

解析:由于小学、初中、高中三个学段的学生视力

主动寻求解题思路(二)　主动寻求解题思路法强调从简单习题入手,简单的做出来之后再由浅入深. 当遇到了难一点的题目时,有意识强迫自己不看答案、不求助于别人,而要静下心来,积极调动自己的大脑知识库,主动寻求解题思路. 这样由浅入深地训练自己,加上对常见题型的归类分析,再见到此题时就会有得心应手的感觉.



差异性比较大,可采取按照学段进行分层抽样,排除A和D.而男女生视力情况差异性不大,不能按照性别进行分层抽样,排除B.故选C. ①~②

答案:C

误区警示 每种抽样方法都有其适用的环境,在选取抽样方法时要根据问题的具体情境进行分析,不要被表面现象所迷惑.

知识要点

1. 简单随机抽样

(1)简单随机抽样的概念

一般地,设一个总体含有N个个体,从中逐个不放回地抽取n个个体作为样本($n \leq N$),如果每次抽取时总体内的各个个体被抽到的机会都相等,就把这种抽样方法叫作简单随机抽样.

(2)简单随机抽样的特点

①要求被抽取样本的总体个数N是有限的.

②是从总体中逐个抽取的.

③是一种不放回抽样.

④是一种等可能抽样(保证了抽样方法的公平性).

2. 系统抽样

当总体中的个体较多时,可将总体分成均衡的几个部分,然后按照预先定出的规则,从每一部分抽取一个个体,得到所需要的样本,这种抽样方法叫作系统抽样.

3. 分层抽样

一般地,在抽样时,将总体分成互不交叉的层,然后按照一定的比例,从各层独立地抽取一定数量的个体,将各层取出的个体合在一起作为样本,这种抽样方法叫作分层抽样.

模板演练

➡ 答案详见P400

1. 现要完成下列3项抽样调查:

①从10盒酸奶中抽取3盒进行食品卫生检查.②科技报告厅有32排,每排有40个座位,有一次报告会恰好坐满了听众,报告会结束后,为了听取意见,需要请32名听众进行座谈.③东方中学共有160名教职工,其中一般教师120名,行政人员16名,后勤人员24名.为了了解教职工对学校在校务公开方面的意见,拟抽取一个容量为20的样本.较为合理的抽样方法是(　　).

A. ①简单随机抽样,②系统抽样,③分层抽样

B. ①简单随机抽样,②分层抽样,③系统抽样

C. ①系统抽样,②简单随机抽样,③分层抽样

D. ①分层抽样,②系统抽样,③简单随机抽样

2. 三种不同的容器中分别装有同一型号的零件,其个数分别为400,200,150,现在要从这750个零件中抽取一个容量为50的样本,则应该采用的抽样方法是(　　).

A. 抽签法　　B. 随机数表法

C. 系统抽样　　D. 分层抽样

3. 某学校进行问卷调查,将全校4 200名同学分为100组,每组42人按1–42随机编号,每组的第34号同学参与调查,这种抽样方法是(　　).

A. 简单随机抽样　　B. 分层抽样

C. 系统抽样　　D. 分组抽样

4. 某学校为了调查高三年级的200名文科学生完成课后作业所需的时间,采取了两种抽样调查的方式:第一种由学生会的同学随机抽取20名同学进行调查;第二种由教务处对该年级的文科学生进行编号,从001到200,抽取编号最后一位为2的同学进行调查,则这两种抽样的方法依次为(　　).

A. 分层抽样,简单随机抽样

B. 简单随机抽样,分层抽样

C. 分层抽样,系统抽样

D. 简单随机抽样,系统抽样

总结知识点网络(一) 平时做数学题时,一些题目往往会让我们感觉到无从下手,这个时候如果我们能联想到这道题目所考查的知识点,就可以此为线索对症下药,找到解题的突破口.所谓的知识点网络总结法就是在平时做题时,如果遇到解答中出现困难的题目,就将与这道题目有关的解题方法和所考查的知识点在题目的旁边列出来.

模板2　求系统抽样中抽取的编号 [5年8考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(陕西高考)某单位有840名职工,现采用系统抽样方法抽取42人做问卷调查,将840人按1,2,…,840随机编号,则抽取的42人中,编号落入区间[481,720]的人数为(　　). A. 11　B. 12　C. 13　D. 14	本模板解决的是"在系统抽样中,已知总体个数,样本容量和其中一个抽到的编号,求其余被抽到的编号"的问题.
解析:依据系统抽样为等距抽样的特点,分42组,每组20人, 区间[481,720]包含25组到36组,每组抽1人,则抽到的人数为12. **答案**:B	第一步　由总体个数确定分段间隔为20人,分42组. 第二步　由系统抽样的抽取规则可知区间[481,720]包含25组到36组. 第三步　每组抽1人,则抽到12人.

模板攻略

1. 模板解决思路

系统抽样又称等距抽样,号码序列一确定,样本即确定了,当已知总体个数,样本容量和一个抽到的编号时,首先确定分段间隔,然后根据样本容量和已抽到的编号分析所求编号属于哪段,从而写出所求编号.

2. 模板解决步骤

1 第一步　确定分段间隔.

2 第二步　确定第1段中抽取的编号和其他编号的规则.

3 第三步　计算其余编号.

3. 典型例题

典例1　将某班60名同学编号为01,02,03,…,59,60,采用系统抽样的方法抽取一个容量为5的样本,且随机抽得的一个号码为04,则剩下的4个号码依次为____________.

解析:分段间隔$k=\frac{N}{n}=\frac{60}{5}=12$,　1

第1个编号为4,则其余编号为$4+12n(n=1,2,3,4)$,　2

即16,28,40,52.　3

答案:16,28,40,52

典例2　(山东高考)采用系统抽样方法从960人中抽取32人做问卷调查.为此将他们随机编号为1,2,…,960,分组后在第一组采用简单随机抽样的方法抽到的号码为9,抽到的32人中,编号落入区间[1,450]的人做问卷A,编号落入区间[451,750]的人做问卷B,其余的人做问卷C.则抽到的人中,做问卷B的人数为(　　).

A. 7　B. 9　C. 10　D. 15

思路分析:解题的关键是求解样本号码的计算公式.另外,注意系统抽样中"等距性"的灵活应用,因为每组只取一个样本,所以某个编号区间内的样本数量可以利用数的整除来求解.

解析:从960人中用系统抽样方法抽取32人,则每

总结知识点网络(二)　然后在本子上总结出来,这样经过一段时间的训练,在考试的时候看到题目就能联想到有关的知识点,并迅速找到相应的解题方法.使用这种方法一方面可以提高解题速度,为考生节约不少时间,另一方面做题的正确率很高,提高做题的命中率.



30人抽取一人. 1

因为第一组抽到的号码为9,则第二组抽到的号码为39,第n组抽到的号码为$a_n=9+30(n-1)=30n-21$. 2

由$451\leqslant 30n-21\leqslant 750$,得$\frac{236}{15}\leqslant n\leqslant \frac{257}{10}$,所以$n=16,17,\cdots,25$,共有$25-16+1=10$(人),故选C. 3

答案:C

知识要点

1. 系统抽样的步骤

一般地,假设要从容量为N的总体中抽取容量为n的样本,我们可以按下列步骤进行系统抽样:

(1)先将总体的N个个体编号.有时可直接利用个体自身所带的号码,如学号、准考证号、门牌号等;

(2)确定分段间隔k,对编号进行分段.当$\frac{N}{n}$(n为样本容量)是整数时,取$k=\frac{N}{n}$;

(3)在第1段用简单随机抽样确定第一个个体编号l($l\leqslant k$);

(4)按照一定的规则抽取样本.通常是将l加上间隔k得到第2个个体编号($l+k$),再加k得到第3个个体编号($l+2k$),依次进行下去,直到获取整个样本.

特别提示

如果遇到$\frac{N}{n}$不是整数的情况,可以先从总体中随机剔除几个个体,使得总体中剩余的个体数能被样本容量整除.

2. 系统抽样的特点

(1)系统抽样又称为等距抽样,系统抽样的第1段为简单随机抽样,以后为等距抽取.

(2)系统抽样适用于总体容量较大的情况;系统抽样中剔除多余个体及第1段抽样都用简单随机抽样,因而与简单随机抽样有密切联系;系统抽样是等可能抽样,每个个体被抽到的可能性都是$\frac{n}{N}$.

模板演练

➡ 答案详见P400

1. 将参加夏令营的600名学生编号为001,002,…,600,采用系统抽样方法抽取一个容量为50的样本,且随机抽得的号码为003.这600名学生分住在三个营区,从001到300在第Ⅰ营区,从301到495在第Ⅱ营区,从496到600在第Ⅲ营区,三个营区被抽中的人数依次为(　　).

A. 25,17,8　　B. 25,16,9

C. 26,16,8　　D. 24,17,9

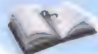
2. 要从已编号(1~50)的50枚最新研制的某型号导弹中随机抽取5枚来进行发射实验,用选取的号码间隔一样的系统抽样方法确定所选取的5枚导弹的编号可能是(　　).

A. 5,10,15,20,25　　B. 3,13,23,33,43

C. 1,2,3,4,5　　D. 2,4,8,16,32

3. 采用系统抽样从含有8 000个个体的总体(编号为0000,0001,…,7999)中抽取一个容量为50的样本,已知最后一个入样的编号为7894,则第一个入样的编号是______.

4. 某高校为了了解高一年级对教学管理的意见,打算从高一年级500名学生中抽取50名学生进行调查,将500名学生编号为001,002,…,499,500.采用系统抽样的方法,且在第一个间隔中抽到的号码是006号,则编号落入区间[465,500]的号码依次为______.



类比——解题的引路人(一) 数学家G·波利亚说:类比是一个伟大的引路人.此话一点不假,用类比思想学立体几何知识和解立体几何题有奇效.我们知道,立体几何是在平面几何的基础上发展起来的,因此它必然与平面几何有天然的联系,借助平面几何往往可以类比出许多立体几何的性质和解题方法.

模板3　求分层抽样中各层样本个数【5年27考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(四川高考)一个单位有职工800人，其中具有高级职称的160人，具有中级职称的320人，具有初级职称的200人，其余人员120人. 为了解职工收入情况，决定采用分层抽样的方法，从中抽取容量为40的样本. 则从上述各层中依次抽取的人数分别是(　　). A. 12，24，15，9　　B. 9，12，12，7 C. 8，15，12，5　　D. 8，16，10，6	本模板解决的是"已知分层抽样中各层个体数和样本容量，求各层的样本个数"的问题.
解析：抽样比例为 $\frac{40}{800}=\frac{1}{20}$， 因此，从各层中依次抽取的人数为 $160\times\frac{1}{20}=8$，$320\times\frac{1}{20}=16$，$200\times\frac{1}{20}=10$，$120\times\frac{1}{20}=6$. 故选D. **答案**：D	第一步　读题，分析总体和样本数. 第二步　求得抽样比例为 $\frac{1}{20}$. 第三步　分别计算得出各层所抽取的人数.

模板攻略

1. 模板解题思路

当总体由差异明显的几部分组成时，我们经常采用分层抽样. 求分层抽样中各层样本个数的关键是得到抽样比例，即样本容量与总体个数的比值. 然后再用此抽样比例分别乘以各层个体数，得到相应的样本数.

2. 模板解决步骤

①第一步　确定总体和各层个体数.

②第二步　计算抽样比例.

③第三步　计算各层的样本个数.

3. 典型例题

典例1　(天津高考)某地区有小学150所，中学75所，大学25所. 现采用分层抽样的方法从这些学校中抽取30所学校对学生进行视力调查，应从小学中抽取________所学校，中学中抽取________所学校.

解析：该地区共有学校：150+75+25=250(所)，　①

抽样比例为 $\frac{30}{250}=\frac{3}{25}$，　②

所以小学应抽取 $150\times\frac{3}{25}=18$(所)，

中学应抽取 $75\times\frac{3}{25}=9$(所).　③

答案：18　9

典例2　(陕西高考)某单位共有老、中、青年职工430人，其中有青年职工160人，中年职工人数是老年职工人数的2倍，为了了解职工身体状况，现采用分层抽样方法进行调查，在抽取的样本中有青年职工32人，则该样本的老年职工人数为(　　).

A. 9　　B. 18　　C. 27　　D. 36

解析：该老年职工有x人，则$160+2x+x=430$，解得

类比——解题的引路人(二)　例如，两面几何中有"两直线相交，只有一个交点". 由此类比出立体几何的"两平面相交，只有一条交线"；平面几何中有"三角形被平行于它一边的直线所截得三角形与原三角形的面积的比等于它们的对应边的比的平方"，由此类比出立体几何的"棱锥被平行它底面的平面所截得的小棱锥与原棱锥的体积的比等于它们的对应高(或对应侧棱)的比的立方".



$x=90$, ①

则青年职工所占比例为 $\frac{160}{430}=\frac{16}{43}$,

所以样本容量为 $32\div\frac{16}{43}=86$(人),

抽样比例为 $\frac{86}{430}=\frac{1}{5}$, ②

所以样本中老年职工为 $90\times\frac{1}{5}=18$(人). ③

答案:B

误区警示

利用分层抽样时,一定要注意按比例抽取,样本容量与总体的个体数之比是分层抽样的比例常数,按这个比例可以确定各层应抽取的个体数.若各层应抽取的个体数不都是整数,则应在相应层中剔除"多余"的个体.

知识要点

1. 分层抽样的步骤

(1)根据已经掌握的信息,将总体分成互不交叉的层;

(2)根据总体中的个体数 N 和样本容量 n 计算抽样比例 $k=\frac{n}{N}$;

(3)确定第 i 层应该抽取的个体数目 $n_i=N_i\times k$ (N_i 为第 i 层所包含的个体数),使得 n_i 之和为 n;

(4)按步骤(3)中确定的数目在各层中随机抽取个体,合在一起得到容量为 n 的样本.

2. 分层抽样的优点

(1)分层抽样时,每个个体被抽到的机会是均等的,由于分层抽样充分利用了已知信息,使样本具有较好的代表性,而且在各层抽样中,可以根据具体情况采取不同的抽样方法,因此分层抽样在实践中有着非常广泛的应用.

(2)分层抽样使用的前提是总体可以分层,层与层之间有明显区别,而层内个体间差异较小,每层中所抽取的个体数可按各层个体在总体上所占比例抽取.

模板演练

➜ 答案详见 P400

1.(福建高考)某校选修乒乓球课程的学生中,高一年级有 30 名,高二年级有 40 名,现用分层抽样的方法在这 70 名学生中抽取一个样本,已知在高一年级的学生中抽取了 6 名,则在高二年级的学生中应抽取的人数为(　　).

A. 6　　B. 8　　C. 10　　D. 12

2.(天津高考)一支田径队有男运动员 48 人,女运动员 36 人,若用分层抽样的方法从该队的全体运动员中抽取一个容量为 21 的样本,则抽取男运动员的人数为 ________.

3.(江苏高考)某学校高一、高二、高三年级的学生人数之比为 3∶3∶4,现用分层抽样的方法从该校高中三个年级的学生中抽取容量为 50 的样本,则应从高二年级抽取 ________ 名学生.

4.(福建高考)一支田径队有男女运动员 98 人,其中男运动员有 56 人.按男女比例用分层抽样的方法,从全体运动员中抽出一个容量为 28 的样本,那么应抽取女运动员人数是 ________.

5.(山东高考)某高校甲、乙、丙、丁四个专业分别有 150,150,400,300 名学生,为了了解学生的就业倾向,用分层抽样的方法从该校这四个专业中共抽取 40 名学生进行调查,应在丙专业抽取的学生人数为 ________.

6.(湖北高考)某市有大型超市 200 家、中型超市 400 家,小型超市 1 400 家,为掌握各类超市的营业情况,现按分层抽样方法抽取一个容量为 100 的样本,应抽取中型超市 ________ 家.

凯尔微博



类比——解题的引路人(三) 在立体几何学习中,有这样一个问题曾难倒了许多同学:"求证正四面体 $A-BCD$ 内的任意一点 P 到各个面的距离之和等于常数." 其实只要与平面几何的问题类比:"求证等边三角形内的任意一点 P 到三角形的三边的距离之和等于常数."由于平面几何中该命题的证明可采用"面积法",类似地,这个立体几何问题应采用"体积法",于是问题迎刃而解.

模板 4　用频率分布直方图估计总体 [5 年 10 考]

模板探究

母题呈现	模板引入
如图所示的是某公司(员工总人数 300 人)某年员工年薪情况的频率分布直方图,由此可知,员工中年薪在 2.4 万元~2.6 万元之间的共有 ______ 人.	本模板解决的是“已知某样本的频率分布表或频率分布直方图,求满足某种条件的样本个数”的问题.
解析:由所给图形可知,员工中年薪在 2.4 万元~2.6 万元之间的频率为 1-(0.02+0.08+0.08+0.10+0.10)×2=0.24,所以员工中年薪在 2.4 万元~2.6 万元之间的共有 300×0.24=72(人). **答案**:72	第一步　观察频率分布直方图,确定组距. 第二步　计算得出所求范围的频率. 第三步　利用总数×频率,得到所求人数.

模板攻略

1. 模板解决思路

在频率分布直方图中,各小矩形面积之和为1,频率=组距×$\dfrac{频率}{组距}$=小矩形的面积. 各小矩形的面积表示相应各组的频率. 频率分布直方图以面积的形式反映了数据落在各小组内的频率大小. 掌握好画频率分布直方图的步骤是解与频率分布直方图相关题目的基础.

2. 模板解决步骤

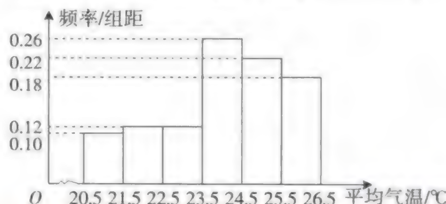
1 第一步　确定频率分布直方图的组距,以及所求值在直方图上的范围.

2 第二步　利用频率=小矩形的面积求出所求值的频率.

3 第三步　由总数×频率,求出所求值.

3. 典型例题

典例 1　(山东高考)如图是根据部分城市某年 6 月份的平均气温(单位:℃)数据得到的样本频率分布直方图,其中平均气温的范围是[20.5,26.5],样本数据的分组为[20.5,21.5),[21.5,22.5),[22.5,23.5),[23.5,24.5),[24.5,25.5),[25.5,26.5]. 已知样本中平均气温低于 22.5℃的城市个数为 11,则样本中平均气温不低于 25.5℃的城市个数为 ______.



年希尧的《视学》(一)　中国清代宫廷画师年希尧从青年时代就对数学和制图技术有兴趣. 他在北京时认识了一位意大利画家朗世宁. 年希尧向他学习了透视知识,并且从他那里得到了一本讲透视的书,爱不释手,深入钻研,他不仅洞悉原著,还延伸出了一些自己的见解. 于是他以原著为基础,加入自己的见解,并补充了大量的图形,写成了《视学》一书,于 1729 年出版.

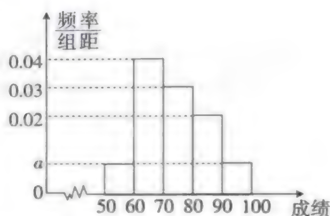


解析：设城市总数为 n，由题图可知 $(0.10+0.12)\times1=\frac{11}{n}$，所以 $n=50$. ①

故样本中平均气温不低于25.5℃的城市个数为 $50\times0.18\times1=9$. ②~③

答案：9

典例2 （广东高考）某学校100名学生期中考试语文成绩的频率分布直方图如图所示，其中成绩分组区间是：[50,60)，[60,70)，[70,80)，[80,90)，[90,100].



(1)求图中 a 的值；

(2)根据频率分布直方图，估计这100名学生语文成绩的平均分；

(3)若这100名学生语文成绩某些分数段的人数(x)与数学成绩相应分数段的人数(y)之比如下表所示，求数学成绩在[50,90)之外的人数.

分数段	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)
$x:y$	1∶1	2∶1	3∶4	4∶5

解：(1)由频率分布直方图可知 $(0.04+0.03+0.02+2a)\times10=1$，解得 $a=0.005$.

(2)该100名学生的语文成绩的平均分 $\bar{x}\approx0.05\times55+0.4\times65+0.3\times75+0.2\times85+0.05\times95=73$.

(3)由频率分布直方图及已知的语文成绩、数学成绩分布在各分数段的人数比，可得下表：

分数段	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)
x	5	40	30	20
$x:y$	1∶1	2∶1	3∶4	4∶5
y	5	20	40	25

①~②

于是数学成绩在[50,90)之外的人数为 $100-(5+20+40+25)=10$. ③

知识要点

1. 频率分布表和频率分布图

频率分布表和频率分布图是从各个小组数据在样本容量中所占比例大小的角度，来表示数据分布的规律.

2. 作频率分布直方图的步骤

(1)求极差（即一组数据中最大值与最小值的差）.

(2)决定组距与组数.将数据分组时，组数应力求合适，以使数据的分布规律能较清楚地呈现出来. 这时应注意：

①一般样本容量越大，所分组数越多；

②当样本容量不超过100时，按照数据的多少，常分成5~12组；

③为方便起见，组距的选择应力求"取整".

(3)将数据分组.

(4)计算各小组的频率，列频率分布表.

$$各小组的频率=\frac{小组频数}{样本容量}.$$

(5)画频率分布直方图. 横轴表示数据的意义，纵轴表示频率/组距. 容易知道，在频率分布直方图中，各小长方形的面积的总和等于1.

特别提示

(1)频率分布表在数量表示上比较确切，但不够直观、形象，分析数据分布的总体态势时不太方便.

(2)频率分布直方图能够很容易地表示大量数据，非常直观地表明分布的形状，使我们能够看到在分布表中看不清楚的数据模式，但是从直方图本身得不出原始的数据内容，也就是说，把数据表示成直方图后，原有的具体数据信息就被抹掉了.

凯尔微博

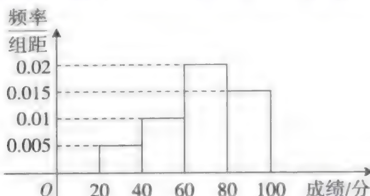


年希尧的《视学》(二) 《视学》出版之后，年希尧觉得"终不免于肤浅"，于是继续研究，一边和朗世宁"往复再四，究其源流"，一边从中国古籍中寻找相关资料，经"苦思力索，补缕五十余图，并附说"，于1735年出了修订版.《视学》一书最精彩的部分是图形. 图形分为两大类：直观图（立体图）和平面图.

模板演练

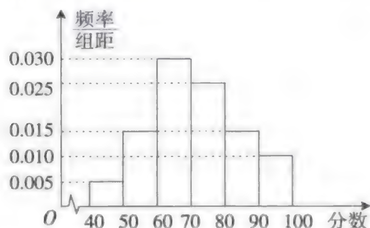
答案详见 P401

1. (辽宁高考)某班的全体学生参加英语测试,成绩的频率分布直方图如图,数据的分组依次为:[20,40),[40,60),[60,80),[80,100]. 若低于60分的人数是15,则该班的学生人数是(　　).



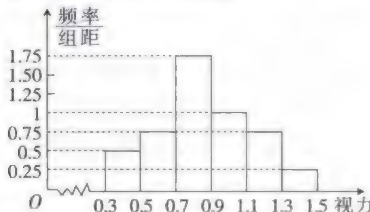
A. 45　　B. 50　　C. 55　　D. 60

2. (福建高考)某校从高一年级学生中随机抽取部分学生,将他们的模块测试成绩分成6组:[40,50),[50,60),[60,70),[70,80),[80,90),[90,100]加以统计,得到如图所示的频率分布直方图.已知高一年级共有学生600名,据此估计,该模块测试成绩不少于60分的学生人数为(　　).



A. 588　　B. 480　　C. 450　　D. 120

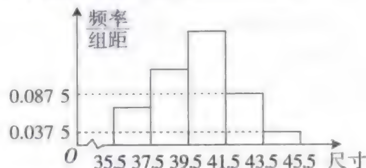
3. 从某校高三年级中随机抽取一个班,对该班50名学生的高校招生体检表中的视力情况进行统计,其频率分布直方图如图所示:



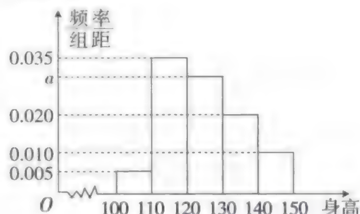
若某高校 A 专业对视力的要求在0.9以上,则该班学生中能报 A 专业的人数为(　　).

A. 10　　B. 20　　C. 8　　D. 16

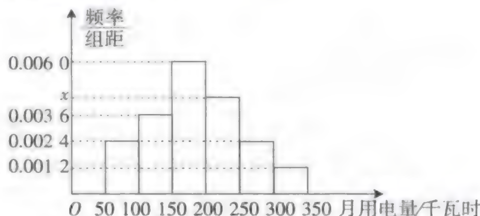
4. 为调查某旅游鞋的销售情况,随机抽取了部分顾客的购鞋尺寸,整理得如图所示的频率分布直方图,其中直方图从左至右的前3个小矩形的面积之比为1:2:3,则购鞋尺寸在[39.5,43.5)内的顾客所占百分比为________.



5. 从某小学随机抽取100名同学,将他们的身高(单位:厘米)数据绘制成频率分布直方图(如图). 由图中数据可知 a=______. 若要从身高在[120,130),[130,140),[140,150]三组内的学生中,用分层抽样的方法选取18人参加一项活动,则从身高在[140,150]内的学生中选取的人数应为______.



6. 从某小区抽取100户居民进行月用电量调查,发现其用电量都在50至350千瓦时之间,频率分布直方图如图所示:



(1)直方图中 x 的值为____________;

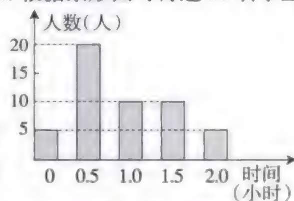
(2)在这些用户中,用电量落在区间[100,250)内的户数为____________.

年希尧的《视学》(三)　直观图从画法原理上看又分轴测图和透视图,平面图分二视图和三视图,其原理和现代工程制图完全一致. 年希尧对透视原理论述清楚,对投影关系也处理得很好,他想象一个物体悬在空中,各点投影用虚线连接,一看就知道平面上的某个点是物体上哪个点的投影. 中国古籍中也有立体图和平面图的画法,始于东汉.



模板 5 根据样本求总体的数字特征 [5年16考]

模板探究

母题呈现	模板引入
学校为了了解学生的课外阅读情况，随机调查了50名学生，得到他们在某一天各自课外阅读所用时间的数据，结果如条形图所示. 根据条形图可得这50名学生这一天平均每人课外阅读时间为（　　）.  A. 0.6小时　B. 0.9小时　C. 1.0小时　D. 1.5小时	本模板解决的是"已知某样本的条形统计图(或其他图表)，求其某个数字特征"的问题.
解析：通过条形图分析可知，平均每人的阅读时间为 $\frac{5\times0+20\times0.5+10\times1.0+10\times1.5+5\times2.0}{50}=0.9$（小时）. **答案**：B	第一步　分析条形图中的数据，确定样本数据. 第二步　代入公式计算得出平均值.

模板攻略

1. 模板解决思路

(1)对于条形图来说，条形图是用条形的长度表示各类别频数的多少，其宽度(表示类别)是固定的，但若条形图(或其他图表)中每组数据不是一个具体的数，而是一个范围，则取其中间值.

(2)利用频率分布直方图求数字特征，有：

①众数是最高的矩形的底边的中点.

②中位数左右两侧直方图的面积相等.

③平均数等于每个小矩形的面积乘以小矩形底边中点的横坐标.

2. 模板解决步骤

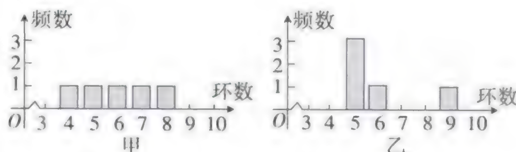
1 第一步　将条形统计图(或其他图表)转化为样本数据，如果条形统计图(或其他图表)中每组数据不是一个具体的数，而是一个范围，则取其中间值.

2 第二步　算出样本总数 n.

3 第三步　代入公式计算数字特征.

3. 典型例题

典例1　(安徽高考)甲、乙两人在一次射击比赛中各射靶5次，两人成绩的条形统计图如图所示，则（　　）.



A. 甲的成绩的平均数小于乙的成绩的平均数

B. 甲的成绩的中位数等于乙的成绩的中位数

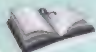
C. 甲的成绩的方差小于乙的成绩的方差

D. 甲的成绩的极差小于乙的成绩的极差

解析：由题意可知，甲的成绩为4,5,6,7,8，乙的成绩为5,5,5,6,9.

1~2

所以甲、乙的成绩的平均数均为6，A错；



年希尧的《视学》(四)　现在能看到的如北宋时《武经总要》的兵器图、《新代象法要》中的天文仪器图、《营造法式》中的建筑图等，而且画得越来越好，但是总的来说还比较粗糙，缺乏透视原理的说明，因而显得不够科学，因此，年希尧的《视学》在中国是前所未有的，在世界上也堪称早期画法几何的代表作，比法国数学家蒙日于1799年出版的名著《画法几何学》早70年.

甲、乙的成绩的中位数分别为 6,5,B 错;

甲、乙的成绩的方差分别为

甲:$\frac{1}{5}\times[(4-6)^2+(5-6)^2+(6-6)^2+(7-6)^2+(8-6)^2]=2$,

乙:$\frac{1}{5}\times[(5-6)^2+(5-6)^2+(5-6)^2+(6-6)^2+(9-6)^2]=\frac{12}{5}$,

C 对;

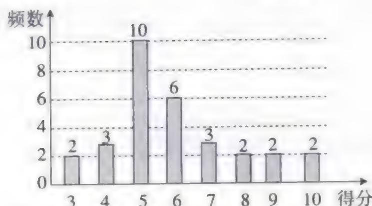
甲、乙的成绩的极差均为 4,D 错.　③

答案:C

典例 2　(江西高考)为了普及环保知识,增强环保意识,某大学随机抽取 30 名学生参加环保知识测试,得分(十分制)如图所示,假设得分值的中位数为 m_e,众数为 m_0,平均值为$\bar{x}$,则(　　).

A. $m_e=m_0=\bar{x}$　　B. $m_e=m_0<\bar{x}$

C. $m_e<m_0<\bar{x}$　　D. $m_0<m_e<\bar{x}$



解析:根据题意可知样本总量为 30,　①~②

则中位数 $m_e=\frac{5+6}{2}=5.5$,众数 $m_0=5$,平均数$\bar{x}=\frac{1}{30}\times(3\times2+4\times3+5\times10+6\times6+7\times3+8\times2+9\times2+10\times2)\approx6.0$.　③

所以 $m_0<m_e<\bar{x}$.

答案:D

知识要点

1. 众数

一组数据中,出现次数最多的数叫作众数.若有几个数据出现的次数一样,且出现的最多,这些数据都是这组数据的众数;若一组数据中,每个数据出现的次数一样多,则认为这组数据没有众数.

2. 中位数

如果将一组数据按从小到大(或从大到小)的顺序依次排列,处在中间的一个数(或最中间两个数的平均数)就是这组数据的中位数.

3. 平均数

一组数据的总和除以数据的个数所得的商就是平均数,记作$\bar{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

特别提示

平均数、中位数和众数刻画了一组数据的集中趋势,其中平均数受极端值影响大,中位数对极端值不敏感.

4. 标准差

标准差是样本数据到平均数的一种平均距离,一般用 s 表示.

$$s=\sqrt{\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]}.$$

一组数据的标准差越大,说明这组数据的离散程度越大,标准差越小,数据的离散程度越小.

5. 方差

从数学的角度考虑,有时用标准差的平方 s^2——方差来代替标准差,作为测量样本数据分散程度的工具.

$$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2].$$

特别提示

方差越小,这组数据越集中在平均数附近,方差越大,这组数据大部分偏离平均数.

模板演练

➡ 答案详见 P401

1.(江苏高考)某老师从星期一到星期五收到的信件数分别为 10,6,8,5,6,则该组数据的方差 $s^2=$______.

2.(江苏高考)抽样统计甲、乙两位射击运动员的 5

高考数学中的"四方八块"　"四方":掌握四大数学思想方法,明确驾驭数学知识的理性思维方法,其集中体现在四大数学思想方法上:①函数与方程思想;②数形结合思想;③分类讨论思想;④化归或转化思想."八块":掌握八个主干知识块:①函数;②数列;③平面向量;④不等式(解与证);⑤解析几何;⑥立体几何;⑦排列组合、概率、统计;⑧导数及应用.

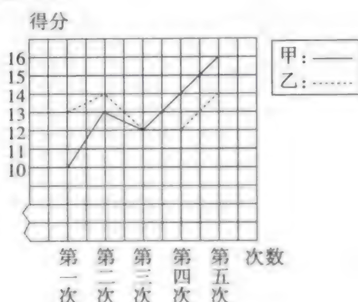


次训练成绩(单位:环),结果如下:

运动员	第1次	第2次	第3次	第4次	第5次
甲	87	91	90	89	93
乙	89	90	91	88	92

则成绩较为稳定(方差较小)的那位运动员成绩的方差为 ______.

3. 甲、乙二人参加某体育项目训练,近期的五次测试成绩如图.



(1)分别求出两人得分的平均数与方差;

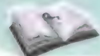
(2)根据图和(1)中算得的结果,对两人的训练成绩作出评价.

模板 6　由茎叶图计算数字特征【5年8考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(陕西高考)从甲、乙两个城市分别随机抽取16台自动售货机,对其销售额进行统计,统计数据用茎叶图表示(如图). 设甲、乙两组数据的平均数分别为$\bar{x}_甲$,$\bar{x}_乙$,中位数分别为$m_甲$,$m_乙$,则(　　). A. $\bar{x}_甲<\bar{x}_乙$,$m_甲>m_乙$ B. $\bar{x}_甲<\bar{x}_乙$,$m_甲<m_乙$ C. $\bar{x}_甲>\bar{x}_乙$,$m_甲>m_乙$ D. $\bar{x}_甲>\bar{x}_乙$,$m_甲<m_乙$ 甲 | | 乙 8 6 5 | 0 | 8 8 4 0 0 | 1 | 0 2 8 7 5 2 | 2 | 0 2 3 3 7 8 0 0 | 3 | 1 2 4 4 8 3 1 | 4 | 2 3 8	本模板解决的是“已知某样本的茎叶图,求其某个数字特征”的问题.
解析:由茎叶图可知甲数据集中在10至20之间,乙数据集中在20至40之间,明显$\bar{x}_甲<\bar{x}_乙$, 甲的中位数为20,乙的中位数为29,即$m_甲<m_乙$,故选B. **答案**:B	第一步　对茎叶图的数据进行分析,还原样本原始数据. 第二步　分析数据特点,容易看出$\bar{x}_甲<\bar{x}_乙$. 第三步　求出甲、乙中位数分别为20、29,即$m_甲<m_乙$.

凯尔微博



高明的建筑师——蜜蜂(一)　法国数学家傅里叶有一句流传至今的名言:对自然的深入研究是数学发现的最富饶的源泉. 蜂房问题就是极有趣的例子. 蜂房的结构不仅有条理、有对称性,而且最省材料,这种“最省”实际上是极值问题. 历史上不少学者注意到蜂房的奇妙结构,蜂房上有许多巢,取一个巢来看,它是正六角形的柱体,其上底由三个全等的菱形组成.

模板攻略

1. 模板解决思路

(1)由茎叶图计算数字特征，首先会制作茎叶图. 作茎叶图的步骤：①将所有两位数的十位数字作为“茎”，茎按从小到大的顺序自上而下排列，茎相同者共用一个茎，再在茎的两侧画上竖线作为分界线；②在分界线的另一侧对应茎处，记录下“叶”——个位数字，一般共茎的叶按从小到大(或从大到小)的顺序同行列出.

(2)由茎叶图可直接得出中位数、众数，也可方便地计算平均数.

2. 模板解决步骤

1 第一步　将茎叶图数据还原为样本原始数据.

2 第二步　计算样本总数 n.

3 第三步　代入公式计算数字特征.

3. 典型例题

典例　(湖南高考)如图是某学校一名篮球运动员在五场比赛中所得分数的茎叶图，则该运动员在这五场比赛中得分的方差为________.(注：方差 $s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$，其中 $\bar{x}$ 为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的平均数)

0	8　9
1	0　3　5

解析：由茎叶图知该运动员五场比赛的得分分别为 8,9,10,13,15. (1)

则平均分 $\bar{x}=\frac{1}{5}\times(8+9+10+13+15)=11$(分)，方差 $s^2=\frac{1}{5}[(8-11)^2+(9-11)^2+(10-11)^2+(13-11)^2+(15-11)^2]=6.8$. (2~3)

答案:6.8

误区警示

在使用茎叶图时，一定要注意看清楚所有的样本数据，弄清楚这个图中的数字特点，不要漏掉了数据，也不要混淆茎叶图中茎与叶的含义.

知识要点

茎叶图的定义

统计中有一种被用来表示数据的图叫作茎叶图，茎是指中间的一列数，叶就是从茎的旁边生长出来的数. 在样本数据较少时，用茎叶图表示数据的效果较好.

特别提示

茎叶图有两个优点：一是所有的信息都可以从图中找到；二是茎叶图便于记录和表示，能够表示数据的分布情况，但当样本数据较多或数据位数较多时，茎叶图就不太方便了.

模板演练

➡ 答案详见 P402

1. (福建高考)若某校高一年级 8 个班参加合唱比赛的得分如茎叶图所示，则这组数据的中位数和平均数分别是(　　).

8	9　7
9	6　1　3　4　0　2

A. 91.5 和 91.5　　B. 91.5 和 92

C. 91 和 91.5　　D. 92 和 92

2. 甲、乙两名同学在 5 次体育测试中的成绩统计数据用茎叶图表示(如图)，若甲、乙两人的平均成绩分别是 $X_甲,X_乙$，则下列结论正确的是(　　).

甲		乙
8　7　2	7	8
6	8	2　8
2	9	1　5

A. $X_甲<X_乙$；乙比甲成绩稳定

B. $X_甲>X_乙$；甲比乙成绩稳定

C. $X_甲>X_乙$；乙比甲成绩稳定

高明的建筑师——蜜蜂(二)　早期公元 300 年前后，亚历山大的巴普士就研究过蜂房的形状，他认为六棱柱的巢的结构是最经济的结构. 开普勒曾说过这种充满空间的对称的蜂房的角应该和菱形 12 面体(各个面都是菱形的 12 面体)的角一样. 18 世纪法国天文学家马拉尔弟经过实际测量后指出蜂巢顶部菱形的两角分别是 109°28′和 70°32′.

凯尔微博



D. $X_甲 < X_乙$；甲比乙成绩稳定

3. 为了了解某校教师使用多媒体进行教学的情况，采用简单随机抽样的方法，从该校400名授课教师中抽取20名，调查了他们上学期使用多媒体进行教学的次数，结果用茎叶图表示如图所示. 据此可估计该校上学期400名教师中，使用多媒体进行教学次数在[16,30)内的人数为(　　).

茎	叶
0	7 9
1	3 3 5 6 7
2	1 2 4 5 8 8
3	0 1 4 7
4	1 1 2

A. 100　　B. 160　　C. 200　　D. 280

4. 对某商店一个月内每天的顾客人数进行了统计，得到样本的茎叶图(如图)，则该样本的中位数、众数、极差分别是(　　).

茎	叶
1	2 5
2	0 2 3 3
3	1 2 4 4 8 9
4	5 5 5 7 7 8 8 9
5	0 0 1 1 4 7 9
6	1 7 8

A. 46,45,56

B. 46,45,53

C. 47,45,56

D. 45,47,53

5. (天津高考)甲、乙两人在10天中每天加工零件的个数用茎叶图表示如图，中间一列的数字表示零件个数的十位数，两边的数字表示零件个数的个位数. 则这10天甲、乙两人日加工零件的平均数分别为______和______.

甲		乙
9 8	1	9 7 1
0 1 3 2 0	2	1 4 2 4
1 1 5	3	0 2 0

6. 在如图所示的茎叶图中，甲、乙两组数据的中位数分别是______，______.

甲		乙
8	2	9
9 1	3	4 5
2 5	4	8 2 6
7 8 5	5	3 5
6	6	7

必修3

模板7　由数字特征求参数 [5年6考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(重庆高考)以下茎叶图记录了甲、乙两组各五名学生在一次英语听力测试中的成绩(单位:分). 已知甲组数据的中位数为15，乙组数据的平均数为16.8，则x,y的值分别为(　　). 甲组 | | 乙组 9 | 0 | 9 x 2 | 1 | 5 y 8 7 4 | 2 | 4 A. 2,5　B. 5,5　C. 5,8　D. 8,8	本模板解决的是“已知数据的数字特征值，求参数值”的问题.
解析：由于甲组的中位数是15，可得$x=5$. 由于乙组数据的平均数为16.8，$\frac{1}{5}(9+15+10+y+18+24)=16.8$，解得$y=8$. **答案**：C	第一步　已知甲组的中位数是15，由中位数的定义可知$x=5$. 第二步　已知乙组数据的平均数为16.8，列出关于y的方程. 第三步　解方程可算得$y=8$.

凯尔微博



高明的建筑师——蜜蜂(三)　法国自然哲学家列俄木作出一个猜想：用这样的角度来建造蜂房，在相同的容积下最节省材料. 于是他请教瑞士数学家克尼希，克尼希证实了列俄木的猜想. 但他通过数值计算推得：根据蜂房的构造法，要使表面积最省料，其上底中菱形的两个角就为109°26′和79°34′，这和马拉尔弟实际测量的数值仅有2′之差！

模板攻略

1. 模板解决思路

对于已知数据的数字特征求参数的问题，一般通过分析数据特点，结合数字特征的定义和公式解决. 按照求数字特征的过程列出方程，求得参数.

2. 模板解决步骤

①第一步　分析样本数据，确定已知数字特征和参数.

②第二步　列出关于已知数字特征的方程.

③第三步　解方程求出参数.

3. 典型例题

典例 1　一个样本数据按从小到大的顺序排列为 13，14，19，x，23，27，28，31. 其中位数为 22，则 x 的值为(　　).

A. 21　　B. 22　　C. 20　　D. 23

解析：将给出的 8 个数按从小到大的顺序排列后，中间两个数为 x，23.　①

由题意得 $\frac{x+23}{2}=22$.　②

解得 $x=21$.　③

答案：A

典例 2　某人 5 次上班途中所花时间(单位：min)分别为 x，y，10，11，9. 若这组数据的平均数为 10，方差为 2，则 $|x-y|$ 的值为______.

解析：由平均数公式，得 $(x+y+10+11+9)\times\frac{1}{5}=10$，

则 $x+y=20$；

又 ∵ 方差为 2，则 $[(x-10)^2+(y-10)^2+(10-10)^2+(11-10)^2+(9-10)^2]\times\frac{1}{5}=2$，

得 $x^2+y^2=208$，$2xy=192$，　①~②

∴ 有 $|x-y|=\sqrt{(x-y)^2}=\sqrt{x^2+y^2-2xy}=4$.　③

答案：4

必修 3

模板演练

➡ 答案详见 P402

1. (山东高考)将某选手的 9 个得分去掉 1 个最高分，去掉 1 个最低分，7 个剩余分数的平均分为 91，现场作的 9 个分数的茎叶图后来有 1个数据模糊，无法辨认，在图中以 x 表示：

茎	叶
8	7　7
9	4　0　1　0　x　9　1

则 7 个剩余分数的方差为(　　).

A. $\frac{116}{9}$　　B. $\frac{36}{7}$　　C. 36　　D. $\frac{6\sqrt{7}}{7}$

2. 某中学高三年级从甲、乙两个班级各选出 7 名学生参加数学竞赛，他们取得的成绩(满分 100分)的茎叶图如图所示，其中甲班学生的平均分是 85，乙班学生成绩的中位数是 83. 则 $x+y$ 的值为______.

甲		乙
8　9	7	6
5　x　0	8	1　1　y
6　2	9	1　1　6

3. 如图所示的茎叶图中是 7 个正整数，它们的平均数为 $\bar{x}=20$，中位数为 20，则这组数的方差为______.

茎	叶
1	9　7　8
2	d　e　3　2

4. 在“爱我海西，爱我家乡”的摄影比赛中，9 位评委为参赛作品 A 给出的分数如图. 记分员在去掉一个最高分和一个最低分后，算得平均分为 91，复核员在复核时，发现有一个数字(茎叶图中的 x)无法看清. 若记分员计算无误，则数字 x 应该是______.

	作品 A
8	8　9　9
9	2　3　x　2　1　4

高明的建筑师——蜜蜂(四)　当时人们认为：蜜蜂毕竟不懂科学，他们解决这样一个复杂的极值问题只有 2′的误差，是不足为奇的. 可是事情还没有完结. 后来，在调查一艘轮船失事原因的过程中，发现船上所使用的对数表有错误，而当时数学家克尼希进行蜂房计算时，所使用的也是同类对数表.

凯尔微博



模板 8　数字特征的实际应用【5年4考】

模板探究

母题呈现	模板引入
为了选拔一名同学参加全市中学生射击竞赛，某校对甲、乙两名同学的射击水平进行了测试. 两人在相同的条件下各射靶 10 次，统计结果如下： 甲成绩（环数）：7，8，6，8，6，5，9，10，7，4，$\bar{x}_{甲}=7$，$s_{甲}^2=3$ 乙成绩（环数）：9，5，7，8，7，6，8，6，7，7，$\bar{x}_{乙}=7$，$s_{乙}^2=?$ (1)求方差 $s_{乙}^2$； (2)比较甲、乙两同学的射击水平，谁的成绩稳定一些？你认为学校派谁参加竞赛更合适？	本模板解决的是“利用样本的数字特征解决实际应用”的问题.
解：(1) $s_{乙}^2=\frac{1}{10}[(9-7)^2+(5-7)^2+(7-7)^2+(8-7)^2+(7-7)^2+(6-7)^2+(8-7)^2+(6-7)^2+(7-7)^2+(7-7)^2]=\frac{1}{10}[4+4+0+1+0+1+1+1+0+0]=\frac{1}{10}\times12=1.2.$ (2) $\because s_{甲}^2>s_{乙}^2$，$\therefore$ 乙同学的射击水平（成绩）稳定一些，学校派乙同学参加竞赛更合适.	第一步　根据题意，利用公式求出方差 $s_{乙}^2$. 第二步　比较 $s_{甲}^2$ 与 $s_{乙}^2$ 的大小. 第三步　利用方差特点判断出乙同学的射击成绩更稳定，派乙参加竞赛更合适.

	甲 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	平均数	方差
甲成绩（环数）	7	8	6	8	6	5	9	10	7	4	$\bar{x}_{甲}=7$	$s_{甲}^2=3$
乙成绩（环数）	9	5	7	8	7	6	8	6	7	7	$\bar{x}_{乙}=7$	$s_{乙}^2=?$

模板攻略

1. 模板解决思路

众数体现了样本数据的最大集中点，但它显然因对其他数据信息的忽视使其无法客观地反映总体特征；中位数是样本数据所占频率的等分线，它不受少数几个极端值的影响；由于平均数与每一个样本的数据有关，所以任何一个样本数据的改变都会引起平均数的改变；方差则反映了一组数据围绕平均数波动的大小.为了得到以样本数据的单位表示的波动幅度通常用标准差，即样本方差的算术平方根，是样本数据到平均数的一种平均距离.

2. 模板解决步骤

①第一步　分析样本数据，利用定义或公式求得各数字特征的值.

②第二步　比较各个同名数字特征之间的大小.

③第三步　利用数字特征的性质，解决实际问题.

3. 典型例题

典例　已知甲、乙两人数学成绩记录如下：

甲：65，76，75，74，89，81，95，94，91，107，110，

乙：79，83，86，88，96，98，98，99，101，103，114.

高明的建筑师——蜜蜂（五）　于是，人们又开始怀疑克尼希计算数据的准确性. 1743 年，美国数学家马克劳林重新从理论上研究蜂巢中的极值问题，得到更惊人的结果. 他完全用初等数学方法得到菱形的钝角是 109°28′16″，与实际测量的值一致. 这 2′之差，不是蜜蜂不准，而是数学家克尼希算错了，他所用的对数表印错了.

(1)求出这两名同学的数学成绩的平均数、方差；

(2)比较两名同学的成绩，谈谈看法.

解：(1)甲的平均数

$\bar{x}_甲=\frac{1}{11}\times(65+76+75+74+89+81+95+94+91+107+110)=87.$

乙的平均数

$\bar{x}_乙=\frac{1}{11}\times(79+83+86+88+96+98+98+99+101+103+114)=95.$

甲的标准差

$s_甲^2=\frac{1}{11}\times[(65-87)^2+(76-87)^2+\cdots+(110-87)^2]=\frac{2\,016}{11}.$

乙的标准差

$s_乙^2=\frac{1}{11}\times[(79-95)^2+(83-95)^2+\cdots+(114-95)^2]=\frac{1\,026}{11}.$　①

(2)由$\bar{x}_甲<\bar{x}_乙$，且$s_甲^2>s_乙^2$知　②

甲的数学成绩不如乙的数学成绩好，且不如乙稳定.　③

模板演练

答案详见 P402

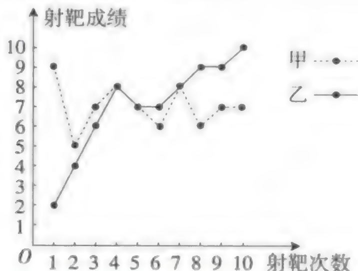
1. 为了保护学生的视力，教室内的日光灯在使用一段时间后必须更换. 已知某校使用的 100 只日光灯在必须换掉前的使用天数如下表：

天数	150~180	180~210	210~240	240~270	270~300	300~330	330~360	360~390
灯管数	1	11	18	20	25	16	7	2

(1)试估计这种日光灯的平均使用寿命；

(2)若定期更换，可选择多长时间统一更换合适？

2. 甲、乙两人在相同的条件下各射靶 10 次，每次射靶成绩(单位：环)如图所示.



(1)请填写下表：

	平均数	方差	中位数	命中 9 环及以上
甲	7	1.2		1
乙		5.4		3

(2)请从四个不同的角度对这次测试进行分析：

①从平均数和方差结合分析偏离程度；

②从平均数和中位数结合分析谁的成绩好些；

③从平均数和命中 9 环以上的次数相结合看谁的成绩好些；

④从折线图上两人射击命中环数及走势分析谁更有潜力.

解析几何的基本内容(一)　在解析几何中，首先是建立坐标系，取定两条相互垂直的具有一定方向和度量单位的直线，叫做平面上的一个直角坐标系. 利用坐标系可以把平面内的点和一对实数建立一一对应的关系，除了直角坐标系外，还有斜坐标系、极坐标系、空间直角坐标系等. 在空间坐标系中还有球坐标系和柱面坐标系.



模板 9 求线性回归方程【5年4考】

模板探究

母题呈现	模板引入
在春节期间，某市物价部门对本市五个商场销售的某商品一天的销售量及其价格进行调查，五个商场的售价 x 元和销售量 y 件之间的一组数据如下表所示： 价格 x(元)：9，9.5，10，10.5，11 销售量 y(件)：11，10，8，6，5 通过分析，发现销售量 y 与商品的价格 x 具有线性相关关系，则销售量 y 关于商品的价格 x 的线性回归方程为________.	本模板解决的是"已知一组相关数据，求其线性回归方程"的问题.
解析：$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=392$，$\bar{x}=10$，$\bar{y}=8$，$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=502.5$， 代入公式，得$\hat{b}=-3.2$，所以，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=40$， 故线性回归方程为$\hat{y}=-3.2x+40$. 答案：$\hat{y}=-3.2x+40$	第一步 计算$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i$，$\bar{x}$，$\bar{y}$，$\sum_{i=1}^{5}x_i^2$. 第二步 用最小二乘法公式求出$\hat{b}$，$\hat{a}$. 第三步 写出线性回归方程.

价格 x(元)	9	9.5	10	10.5	11
销售量 y(件)	11	10	8	6	5

模板攻略

1. 模板解决思路

求线性回归方程，一般采用最小二乘法. 求回归方程时要遇到很多复杂的计算，为准确运算，可借助计算器.

2. 模板解决步骤

1 第一步 计算平均值$\bar{x}$，$\bar{y}$和其他相关量.

2 第二步 代入公式求$\hat{b}$和$\hat{a}$.

3 第三步 写出线性回归方程.

3. 典型例题

典例 （江西高考）为了解儿子身高与其父亲身高的关系，随机抽取5对父子的身高数据如下：

父亲身高 x/cm	174	176	176	176	178
儿子身高 y/cm	175	175	176	177	177

则 y 对 x 的线性回归方程为(　　).

A. $\hat{y}=x-1$　　B. $\hat{y}=x+1$

C. $\hat{y}=\frac{1}{2}x+88$　　D. $\hat{y}=176$

解析：设线性回归方程为$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，

$\bar{x}=\frac{174+176+176+176+178}{5}=176$，

$\bar{y}=\frac{175+175+176+177+177}{5}=176$，　1

$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{1}{2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=88$，　2

∴线性回归方程为$\hat{y}=\frac{1}{2}x+88$，故选C.　3

答案：C

凯尔微博



解析几何的基本内容(二) 坐标系在几何对象和数、几何关系和函数之间建立了密切的联系，这样就可以将空间形式的研究归结成比较成熟也容易驾驭的数量关系的研究了. 用这种方法研究几何学，通常就叫做解析法. 这种解析法不但对于解析几何是重要的，就是对于几何学的各个分支的研究也是十分重要的.

知识要点

1. 回归分析

对具有相关关系的两个变量进行统计分析的方法叫回归分析. 通俗地讲,回归分析是寻找相关关系中非确定性关系的某种确定性.

2. 散点图

容量为 n 的样本的观察数据 x 和 y 总是成对出现,可以用列表的方式给出,也可以用向量(点)的形式表示为$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$. 称这样的一些点为样本点,把样本点画在平面直角坐标系上,就得到样本的散点图.

特别提示

从散点图入手,可以做出如下判断:

(1)如果所有的样本点都落在某一函数曲线上,就用该函数来描述变量之间的关系,即变量之间具有函数关系;

(2)如果所有的样本点都落在某一函数曲线附近,变量之间就有相关关系.

3. 回归直线

如果散点图中点的分布从整体上看大致在一条直线附近,就称这两个变量之间具有线性相关关系,这条直线叫作回归直线. 这条回归直线的方程简称回归方程.

4. 最小二乘法

(1)定义:使得样本数据的点到回归直线的距离的平方和最小的方法叫作最小二乘法.

(2)利用最小二乘法求回归方程.

$$\begin{cases}\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2},\\ \hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x},\end{cases}$$

这样,回归方程的斜率为$\hat{b}$,截距为$\hat{a}$,即回归方程为$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$.

模板演练

➡ 答案详见 P403

1. 已知回归直线斜率的估计值为 1.23,样本点的中心为点(4,5),则回归直线的方程为(　　).

A. $\hat{y}=1.23x+4$　　B. $\hat{y}=1.23x+5$

C. $\hat{y}=1.23x+0.08$　　D. $\hat{y}=0.08x+1.23$

2. 靠近 5 点 $A_1(2,3),A_2(4,4),A_3(5,6),A_4(6,5)$, $A_5(8,7)$的回归直线方程为 ________.

3. 两个相关变量满足如下关系:

x	10	15	20	25	30
y	1 003	1 005	1 010	1 011	1 014

两个变量的线性回归方程为 ________.

4. 某种产品的广告费支出 x(百万元)与销售额 y(百万元)之间有如下对应关系:

x	2	4	5	6	8
y	30	40	60	50	70

假定 y 与 x 之间有线性相关关系,求其回归直线方程.

解析几何的基本内容(三) 解析几何的创立,引入了一系列新的数学概念,特别是将变量引入数学,使数学进入了一个新的发展时期,这就是变量数学的时期,解析几何在数学发展中起了推动作用. 恩格斯对此曾经作过评价:"数学中的转折点是笛卡儿的变数. 有了变数,运动进入了数学;有了变数,辩证法进入了数学;微分和积分也就立刻成为必要的了……"



模板 10 利用回归直线进行估计【5年9考】

模板探究

母题呈现	模板引入
对具有线性相关关系的变量 x,y,测得一组数据如下表: x: 2, 4, 5, 6, 8 y: 20, 40, 60, 70, 80 根据上表,利用最小二乘法得它们的回归直线方程为 $\hat{y}=10.5x+\hat{a}$,据此模型来预测当 $x=20$ 时,y 的估计值为( ). A. 210 B. 210.5 C. 211.5 D. 212.5	本模板解决的是"已知某两个相关变量的样本数据,根据数据求出线性回归方程,然后对变量取其他值时进行估计"的问题.
解析:由已知得 $\bar{x}=5,\bar{y}=54$,则 $(5,54)$ 满足回归直线方程 $\hat{y}=10.5x+\hat{a}$,解得 $\hat{a}=1.5$, 因此 $\hat{y}=10.5x+1.5$. 当 $x=20$ 时,$\hat{y}=10.5\times20+1.5=211.5$. **答案**:C	第一步 求出 $\bar{x},\bar{y}$,代入回归直线方程,求得 $\hat{a}$. 第二步 得到回归直线方程. 第三步 将 $x=20$ 代入,求得 y 的估计值.

母题中的数据表:

x	2	4	5	6	8
y	20	40	60	70	80

必修3

模板攻略

1. 模板解决思路

利用回归直线,我们可以进行预测. 若回归直线方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$,则 $x=x_0$ 处的估计值为:$\hat{y}_0=\hat{b}x_0+\hat{a}$.

2. 模板解决步骤

1 第一步 求出 $\hat{b}$ 和 $\hat{a}$.

2 第二步 得到线性回归方程.

3 第三步 将估计时的 x(或 y)代入线性回归方程,得到估计值 y(或 x).

3. 典型例题

典例 1 (山东高考)某产品的广告费用 x 与销售额 y 的统计数据如下表:

广告费用 x(万元)	4	2	3	5
销售额 y(万元)	49	26	39	54

根据上表可得回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中的 $\hat{b}$ 为 9.4,据此模型预测广告费用为 6 万元时销售额为( ).

A. 63.6 万元 B. 65.5 万元

C. 67.7 万元 D. 72.0 万元

思路分析:本题中 $\hat{b}$ 已给出,不需再计算,只需利用 $(\bar{x},\bar{y})$ 在直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 上将 $\hat{a}$ 求出即可.

解析:由表可计算 $\bar{x}=\frac{4+2+3+5}{4}=\frac{7}{2}$,$\bar{y}=\frac{49+26+39+54}{4}=42$,因为点 $\left(\frac{7}{2},42\right)$ 在回归直线 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 上,且 $\hat{b}$ 为 9.4,所以 $42=9.4\times\frac{7}{2}+\hat{a}$,解得 $\hat{a}=9.1$, ①

故回归方程为 $\hat{y}=9.4x+9.1$, ②

令 $x=6$ 得 $\hat{y}=65.5$,故选 B. ③

答案:B

凯尔微博



解析几何的应用(一) 解析几何分平面解析几何和空间解析几何. 在平面解析几何中,除了研究直线和有关直线的性质外,还研究圆锥曲线(圆、椭圆、抛物线、双曲线)的有关性质. 在空间解析几何中,除了研究平面、直线的有关性质外,还研究柱面、锥面、旋转曲面. 椭圆、双曲线、抛物线的有关性质,在生产或生活中被广泛应用.

典例2　(安徽高考)某地最近十年粮食需求量逐渐上升,下表是部分统计数据.

年　份	2002	2004	2006	2008	2010
需求量/万吨	236	246	257	276	286

(1)利用所给数据求年需求量与年份之间的回归直线方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$;

(2)利用(1)中所求出的直线方程预测该地2012年的粮食需求量.

解:(1)由所给数据可以看出,年需求量与年份之间是近似直线上升,为此对数据预处理如下表:

年份−2006	−4	−2	0	2	4
需求量−257	−21	−11	0	19	29

对预处理后的数据,容易算得

$\bar{x}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i=0,\bar{y}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}y_i=3.2,$

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\frac{260}{40}=6.5,$$

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=3.2,$　①

所求的回归直线方程为$\hat{y}-257=\hat{b}(x-2\ 006)+\hat{a}=6.5(x-2\ 006)+3.2,$

即$\hat{y}=6.5(x-2\ 006)+260.2.$　②

(2)该地2012年的粮食需求量,即$x=2\ 012$时,

$\hat{y}=6.5\times(2\ 012-2\ 006)+260.2=299.2,$　③

即预测该地2012年的粮食需求量是299.2万吨.

误区警示

求回归直线方程,关键在于正确地求出系数$\hat{a},\hat{b}$,由于$\hat{a},\hat{b}$的计算量大,可借助计算器,避免失误.

模板演练

➡ 答案详见P403

1. 某产品在某零售摊位上的零售价x(单位:元)与每天的销售量y(单位:个)的统计资料如下表所示:

x	16	17	18	19
y	50	34	41	31

由上表,可得回归直线方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$中的$\hat{b}=-4$,据此模型预计零售价定为15元时,每天的销售量为(　　).

A. 48个　　B. 49个　　C. 50个　　D. 51个

2. (广东高考)某数学老师身高176cm,他爷爷、父亲和儿子的身高分别是173cm,170cm和182cm.因儿子的身高与父亲的身高有关,该老师用线性回归分析的方法预测他孙子的身高为______cm.

3. 已知算得某工厂在某年里每月产品的总成本y(万元)与该月产量x(万件)之间的回归方程为$\hat{y}=1.215x+0.974$,计算当$x=2$时,总成本y的估计值为________.

4. 弹簧长度y(cm)随所挂物体重量x(g)的不同而变化的情况如下表所示:

x	5	10	15	20	25	30
y	7.25	8.12	8.95	9.90	10.96	11.80

(1)画出散点图;

(2)求y与x的回归直线方程;

(3)预测所挂物体重量为27g时的弹簧长度(精确到0.01cm).

解析几何的应用(二)　比如电影放映机的聚光灯泡的反射面是椭圆面,灯丝在一个焦点上,影片门在另一个焦点上;探照灯、聚光灯、太阳灶、雷达天线、卫星的天线、射电望远镜等都是利用抛物线的原理制成的.总的来说,解析几何运用坐标法可以解决两类基本问题:一是满足给定条件点的轨迹,通过坐标系建立它的方程;另一类是通过方程的讨论,研究方程所表示的曲线的性质.



第三章 概 率

模板 1 用频率估计概率【5年16考】

模板探究

母题呈现	模板引入
某射击运动员在同一条件下进行练习,结果如表所示: （表见下） (1)计算表中击中 10 环的频率; (2)根据表中数据,估计该运动员射击一次命中 10 环的概率.	本模板解决的是"已知某样本各部分频数,求满足某条件的概率"的问题.
解:(1) 击中 10 环的频率依次为 0.8,0.85,0.88,0.93,0.89,0.906. (2)随着试验次数的增加,频率在常数 0.9 附近摆动,所以估计该运动员射击一次命中 10 环的概率约为 0.9.	第一步 由击中 10 环的次数求出击中 10 环的频率. 第二步 观察频数的变化规律. 第三步 根据频率估计出所求概率.

射击次数 n	10	20	50	100	200	500
击中 10 环次数 m	8	17	44	93	178	453
击中 10 环频率						

模板攻略

1. 模板解决思路

频率随着试验次数的变化而变化,而概率却是一个常数,它是频率的科学抽象,当试验次数越来越多时,频率向概率靠近. 频率是概率的近似值.

2. 模板解决步骤

1 第一步 根据频数求出各部分频率.

2 第二步 将满足某条件的事件表示成各部分的组合形式.

3 第三步 算出满足某条件的频率.

4 第四步 用频率估计概率.

3. 典型例题

典例 1 (新课标全国高考)某种产品的质量以其质量指标值衡量,质量指标值越大表明质量越好,且质量指标值大于或等于 102 的产品为优质产品,现用两种新配方(分别称为 A 配方和 B 配方)做试验,各生产了 100 件这种产品,并测量了每件产品的质量指标值,得到下面试验结果:

A 配方的频数分布表

指标值分组	[90,94)	[94,98)	[98,102)	[102,106)	[106,110)
频数	8	20	42	22	8

B 配方的频数分布表

指标值分组	[90,94)	[94,98)	[98,102)	[102,106)	[106,110)
频数	4	12	42	32	10

(1)分别估计用 A 配方,B 配方生产的产品的优质

凯尔微博


解析几何的应用(三) 运用坐标法解决问题的步骤是:首先在平面上建立坐标系,把已知点的轨迹的几何条件"翻译"成代数方程;然后运用代数工具对方程进行研究;最后把代数方程的性质用几何语言叙述,从而得到原先几何问题的答案. 坐标法的思想促使人们运用各种代数的方法解决几何问题,先前被看作几何学中的难题,运用代数方法后就变得平淡无奇了.

品率；

(2)已知用B配方生产的一件产品的利润y(单位：元)与其质量指标值t的关系式为

$$y=\begin{cases}-2,t<94,\\2,94\leqslant t<102,\\4,t\geqslant 102.\end{cases}$$

估计用B配方生产的一件产品的利润大于0的概率，并求用B配方生产的上述100件产品平均一件的利润.

解：(1)由试验结果知，用A配方生产的产品中优质品的频率为$\frac{22+8}{100}=0.3$，①~③

所以用A配方生产的产品的优质品率的估计值为0.3. ④

由试验结果知，用B配方生产的产品中优质品的频率为$\frac{32+10}{100}=0.42$，①~③

所以用B配方生产的产品的优质品率的估计值为0.42. ④

(2)由条件知，用B配方生产的一件产品的利润大于0，当且仅当其质量指标值$t\geqslant 94$，由试验结果知，$t\geqslant 94$的频率为0.96，所以用B配方生产的一件产品的利润大于0的概率估计值为0.96.

用B配方生产的上述100件产品平均一件的利润为$\frac{1}{100}\times[4\times(-2)+54\times 2+42\times 4]=2.68$(元).

典例2　(湖南高考)某超市为了解顾客的购物量及结算时间等信息，安排一名员工随机收集了在该超市购物的100位顾客的相关数据，如下表所示：

一次购物量	1至4件	5至8件	9至12件	13至16件	17件及以上
顾客数(人)	x	30	25	y	10
结算时间(分钟/人)	1	1.5	2	2.5	3

已知这100位顾客中一次购物量超过8件的顾客占55%.

(1)确定x,y的值，并估计顾客一次购物的结算时间的平均值；

(2)求一位顾客一次购物的结算时间不超过2分钟的概率.(将频率视为概率)

解：(1)由已知得$25+y+10=55$，$x+30=45$，所以$x=15$，$y=20$.

该超市所有顾客一次购物的结算时间组成一个总体，所收集的100位顾客一次购物的结算时间可视为总体的一个容量为100的简单随机样本，顾客一次购物的结算时间的平均值可用样本平均数估计，其估计值为

$$\frac{1\times 15+1.5\times 30+2\times 25+2.5\times 20+3\times 10}{100}=1.9(\text{分钟}).$$

(2)记事件A为"一个顾客一次购物的结算时间不超过2分钟"，A_1,A_2,A_3分别表示事件"该顾客一次购物的结算时间为1分钟"，"该顾客一次购物的结算时间为1.5分钟"，"该顾客一次购物的结算时间为2分钟".

将频率视为概率得$P(A_1)=\frac{15}{100}=\frac{3}{20}$，$P(A_2)=\frac{30}{100}=\frac{3}{10}$，$P(A_3)=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$. ①

因为$A=A_1\cup A_2\cup A_3$，且A_1,A_2,A_3是互斥事件，②

所以$P(A)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{3}{20}+\frac{3}{10}+\frac{1}{4}=\frac{7}{10}$. ③

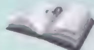
故一位顾客一次购物的结算时间不超过2分钟的概率为$\frac{7}{10}$. ④

知识要点

1. 频率与概率

(1)频数与频率：在相同的条件S下重复n次试验，观察某一事件A是否出现，称n次试验中事件A出现的次数n_A为事件A出现的频数，称事件A出现的比例$f_n(A)=\frac{n_A}{n}$为事件A出现的频率，

选择题的题型特点　(1)概念性强：数学中的每个术语符号，乃至习惯用语，往往都有明确具体的含义，这个特点反映到选择题中就是试题的概念性强.(2)充满思辨性：这个特点源于数学的高度抽象性、系统性和逻辑性.(3)形数兼备.(4)解法多样化：数学选择题的备选项往往给试题的解答提供了丰富的有用信息，有相当大的提示性.



且$0\leqslant\frac{n_A}{n}\leqslant1$.

(2)概率:对于给定的随机事件A,由于事件A发生的频率$f_n(A)$随着试验次数的增加稳定于某个常数上,把这个常数记作$P(A)$,称为事件A的概率,简称为A的概率.用概率度量随机事件发生的可能性大小能为我们的决策提供关键性的依据.

2. 事件关系

(1)并(和)事件:若某事件发生当且仅当事件A发生或事件B发生,则称此事件为事件A与事件B的并事件(或和事件),记作$A\cup B$(或$A+B$).

(2)交(积)事件:若某事件发生当且仅当事件A发生且事件B发生,则称此事件为事件A与事件B的交事件(或积事件),记作$A\cap B$(或AB).

(3)互斥事件:若$A\cap B$为不可能事件($A\cap B=\varnothing$),那么称事件A与事件B互斥,其含义是:事件A与事件B在任何一次试验中不会同时发生.

(4)对立事件:若$A\cap B$为不可能事件,$A\cup B$为必然事件,那么称事件A与事件B互为对立事件,其含义是:事件A与事件B在任何一次试验中有且仅有一个发生.

3. 概率的几个基本性质

(1)任何事件的概率在0~1之间,即$0\leqslant P(A)\leqslant1$.

(2)必然事件的概率为1,不可能事件的概率为0.

(3)若$A\subseteq B$,则$P(A)\leqslant P(B)$.

(4)概率的加法公式:如果事件A与事件B互斥,则$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

特别地,若事件A与事件B为对立事件,则$A\cup B$为必然事件,$P(A\cup B)=1$,$P(A)=1-P(B)$.

特别提示

(1)求复杂事件的概率通常有两种方法:一是将所求事件转化为彼此互斥的事件的和;二是先去求对立事件的概率,进而再求所求事件的概率,即$P(A)=1-P(\overline{A})$.

(2)如果事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$彼此互斥,那么$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$,即彼此互斥的事件的和的概率等于各事件概率的和.

模板演练

➡ 答案详见P404

1. (湖南高考)某河流上的一座水力发电站,每年六月份的发电量Y(单位:万千瓦时)与该河上游在六月份的降雨量X(单位:毫米)有关.据统计,当$X=70$时,$Y=460$;X每增加10,Y增加5.已知近20年X的值为:140,110,160,70,200,160,140,160,220,200,110,160,160,200,140,110,160,220,140,160.

(1)完成如下的频率分布表:

近20年六月份降雨量频率分布表

降雨量	70	110	140	160	200	220
频率	$\frac{1}{20}$		$\frac{4}{20}$			$\frac{2}{20}$

(2)假定今年六月份的降雨量与近20年六月份降雨量的分布规律相同,并将频率视为概率,求今年六月份该水力发电站的发电量低于490(万千瓦时)或超过530(万千瓦时)的概率.

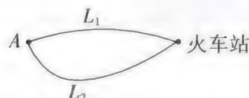
2. (陕西高考)如图,A地到火车站共有两条路径L_1和L_2,现随机抽取100位从A地到达火车站

凯尔微博



填空题的题型特点(一) 填空题和选择题同属客观性试题,考查目标集中,答案简短、明确、具体,不必填写解答过程.填空题在能力要求上会比选择题高一些,答对率一直低于选择题,填空题的结构,往往是在一个正确的命题或断言中,抽去其中的一些内容(既可以是条件,也可以是结论),考查方法比较灵活.在对题目的阅读理解上,较之选择题,有时会显得较为费劲.

的人进行调查,调查结果如下:



所用时间(分钟)	10~20	20~30	30~40	40~50	50~60
选择 L_1 的人数	6	12	18	12	12
选择 L_2 的人数	0	4	16	16	4

(1)试估计 40 分钟内不能赶到火车站的概率;

(2)分别求通过路径 L_1 和 L_2 所用时间落在上表中各时间段内的频率;

(3)现甲、乙两人分别有 40 分钟和 50 分钟时间用于赶往火车站,为了尽最大可能在允许的时间内赶到火车站,试通过计算说明,他们应如何选择各自的路径.

3. (新课标全国高考)某花店每天以每枝 5 元的价格从农场购进若干枝玫瑰花,然后以每枝 10 元的价格出售. 如果当天卖不完,剩下的玫瑰花作垃圾处理.

(1)若花店一天购进 17 枝玫瑰花,求当天的利润 y(单位:元)关于当天需求量 n(单位:枝,$n\in\mathbf{N}$)的函数解析式;

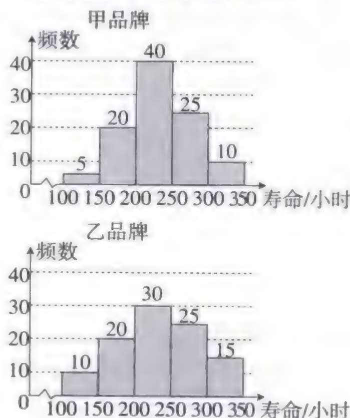
(2)花店记录了 100 天玫瑰花的日需求量(单位:枝),整理得下表:

日需求量 n	14	15	16	17	18	19	20
频数	10	20	16	16	15	13	10

①假设花店在这 100 天内每天购进 17 枝玫瑰花,求这 100 天的日利润(单位:元)的平均数;

②若花店一天购进 17 枝玫瑰花,以 100 天记录的各需求量的频率作为各需求量发生的概率,求当天的利润不少于 75 元的概率.

4. (陕西高考)假设甲、乙两种品牌的同类产品在某地区市场上销售量相等,为了解他们的使用寿命,现从这两种品牌的产品中分别随机抽取 100 个进行测试,结果统计如图:



(1)估计甲品牌产品寿命小于 200 小时的概率;

(2)这两种品牌产品中,某个产品已使用了 200 小时,试估计该产品是甲品牌的概率.

填空题的题型特点(二) 填空题的考点少,目标集中,这是因为:填空题要是考点多,解答过程长,影响结论的因素多,那么对于答错的考生便难以知道其出错的真正原因,有的可能是一窍不通,入手就错了,有的可能只是到了最后一步才出错,但他们在答卷上表现出来的情况一样,得相同的成绩,而事实上的水平存在很大的差异.



模板 2　求古典概型的概率【5 年 43 考】

模板探究

母 题 呈 现	模 板 引 入
(安徽高考)袋中共有 6 个除了颜色外完全相同的球，其中有 1 个红球、2 个白球和 3 个黑球. 从袋中任取两球，两球颜色为一白一黑的概率等于(　　). A. $\frac{1}{5}$　B. $\frac{2}{5}$　C. $\frac{3}{5}$　D. $\frac{4}{5}$	本模板解决的是“已知某试验为古典概型，求其中某类事件 A 的概率”的问题.
解析：标记红球为 A，白球分别为 B_1,B_2，黑球分别为 C_1,C_2,C_3，记事件 M 为“取出的两球一白一黑”. 则基本事件有 $(A,B_1),(A,B_2),(A,C_1),(A,C_2),(A,C_3),(B_1,B_2),(B_1,C_1),(B_1,C_2),(B_1,C_3),(B_2,C_1),(B_2,C_2),(B_2,C_3),(C_1,C_2),(C_1,C_3),(C_2,C_3)$，共 15 个，其中事件 M 包含的基本事件有 $(B_1,C_1),(B_1,C_2),(B_1,C_3),(B_2,C_1),(B_2,C_2),(B_2,C_3)$，共 6 个. 则 $P(M)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$. **答案：**B	第一步　设未知数，列举出所有基本事件，共 15 个. 第二步　计算出事件 M 包含的事件数. 第三步　由公式 $P(A)=\frac{m}{n}$，求出事件 M 的概率.

模板攻略

1. 模板解决思路

列举基本事件、随机事件，从中找出基本事件的总数、随机事件所含有的基本事件的个数是解决古典概型的基本方法. 列举基本事件时要分清两个问题：(1)是否有顺序，有序的和无序的是有区别的；(2)是否允许重复，即放回的还是不放回的，放回的取元素是允许重复的，不放回的取元素是不允许重复的.

2. 模板解决步骤

①第一步　将试验分成有限个基本事件，计算基本事件的个数 n.

②第二步　将事件 A 分成若干个基本事件，计算 A 包含的基本事件的个数 m.

③第三步　代入公式 $P(A)=\frac{m}{n}$，求出 A 的概率.

对事件 A 中包含“至少”“至多”等字样的，也可以先求 A 的对立事件$\overline{A}$的概率，然后利用 $P(A)=1-P(\overline{A})$求 A 的概率.

3. 典型例题

典例　(山东高考)袋中有五张卡片，其中红色卡片三张，标号分别为 1,2,3；蓝色卡片两张，标号分别为 1,2.

(1)从以上五张卡片中任取两张，求这两张卡片颜色不同且标号之和小于 4 的概率；

(2)向袋中再放入一张标号为 0 的绿色卡片，从这六张卡片中任取两张，求这两张卡片颜色不同且标号之和小于 4 的概率.

解：(1)标号为 1,2,3 的三张红色卡片分别记为 A，B，C，标号为 1,2 的两张蓝色卡片分别记为 D，E，



解答题的题型特点　解答题与填空题比较，同属提供型的试题，但也有本质的区别. 首先，解答题解答时，考生不仅要提供出最后的结论，还得写出或说出解答过程的主要步骤，提供合理、合法的说明. 其次，试题内涵，解答题比起填空题要丰富得多，解答题的考点相对较多，综合性强，难度较高. 解答题成绩的评定不仅看最后的结论，还要看其推演和论证过程，分情况评定分数.

从五张卡片中任取两张的所有可能的结果为：$(A,B),(A,C),(A,D),(A,E),(B,C),(B,D),(B,E),(C,D),(C,E),(D,E)$，共 10 种. ①

由于每一张卡片被抽取的机会均等，因此这些基本事件的出现是等可能的.

从五张卡片中任取两张，这两张卡片颜色不同且它们的标号之和小于 4 的结果为：$(A,D),(A,E),(B,D)$，共 3 种. ②

所以这两张卡片颜色不同且它们的标号之和小于 4 的概率为 $\frac{3}{10}$. ③

(2)记 F 为标号为 0 的绿色卡片，从六张卡片中任取两张的所有可能的结果为：$(A,B),(A,C),(A,D),(A,E),(A,F),(B,C),(B,D),(B,E),(B,F),(C,D),(C,E),(C,F),(D,E),(D,F),(E,F)$，共 15 种. ①

由于每一张卡片被取到的机会均等，因此这些基本事件的出现是等可能的. 从六张卡片中任取两张，这两张卡片颜色不同且它们的标号之和小于 4 的结果为：$(A,D),(A,E),(B,D),(A,F),(B,F),(C,F),(D,F),(E,F)$，共 8 种. ②

所以这两张卡片颜色不同且它们的标号之和小于 4 的概率为 $\frac{8}{15}$. ③

知识要点

1. 基本事件

(1)基本事件的定义

一次试验中可能出现的每一个结果称为一个基本事件.

(2)基本事件的特点

①任何两个基本事件是互斥的；

②任何事件(除不可能事件外)都可以表示成基本事件的和.

2. 古典概型

(1)古典概型的定义

①试验中所有可能出现的基本事件只有有限个.

②每个基本事件出现的可能性相等.

我们将具有这两个特点的概率模型称为古典概率模型，简称古典概型.

(2)古典概型的概率公式

对于古典概型，如果随机事件 A 包含的基本事件个数为 m，基本事件的总数为 n，则

$$P(A)=\frac{A\text{ 包含的基本事件的个数}}{\text{基本事件的总数}}=\frac{m}{n}.$$

模板演练

➡ 答案详见 P404

1. (新课标全国高考)有 3 个兴趣小组，甲、乙两位同学各自参加其中一个小组，每位同学参加各个小组的可能性相同，则这两位同学参加同一个兴趣小组的概率为(　　).

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

2. (安徽高考)从正六边形的 6 个顶点中随机选择 4 个顶点，则以它们作为顶点的四边形是矩形的概率等于(　　).

A. $\frac{1}{10}$　　B. $\frac{1}{8}$　　C. $\frac{1}{6}$　　D. $\frac{1}{5}$

3. (辽宁高考)三张卡片上分别写上字母 E,E,B，将三张卡片随机地排成一行，恰好排成英文字母 BEE 的概率为 ________.

4. (浙江高考)从边长为 1 的正方形的中心和顶点这五点中，随机(等可能)取两点，则该两点间的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的概率是 ________.

5. (天津高考)编号为 $A_1,A_2,\cdots,A_{16}$ 的 16 名篮球

考查能力是永恒主题　能力的培养首先应重视知识与技能的学习、思想方法的渗透. 其次，注意多题一解、一题多解和一题多变. 多题一解有利于培养学生的求同思维；一题多解有利于培养学生的求异思维；一题多变有利于培养学生思维的灵活性与深刻性. 第三，重视审题与解题后的总结、反思，不断积累正、反两个方面的经验，这是提高解题能力的有效途径.



运动员在某次训练比赛中的得分记录如下：

运动员编号	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
得分	15	35	21	28	25	36	18	34
运动员编号	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}
得分	17	26	25	33	22	12	31	38

(1)将得分在对应区间内的人数填入相应的空格；

区间	[10,20)	[20,30)	[30,40)
人数			

(2)从得分在区间[20,30)内的运动员中随机抽取2人，

①用运动员的编号列出所有可能的抽取结果；

②求这2人得分之和大于50的概率.

6. (福建高考)某日用品按行业质量标准分成五个等级，等级系数 X 依次为1,2,3,4,5. 现从一批该日用品中随机抽取20件，对其等级系数进行统计分布，得到频率分布表如下：

X	1	2	3	4	5
f	a	0.2	0.45	b	c

(1)若所抽取的20件日用品中，等级系数为4的恰有3件，等级系数为5的恰有2件，求 a, b, c 的值；

(2)在(1)的条件下，将等级系数为4的3件日用品记为 x_1,x_2,x_3，等级系数为5的2件日用品记为 y_1,y_2，现从 x_1,x_2,x_3,y_1,y_2 这5件日用品中任取两件(假定每件日用品被取出的可能性相同)，写出所有可能的结果，并求这两件日用品的等级系数恰好相等的概率.

模板3　求几何概型的概率 [5年24考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(湖南高考)在区间[-1,2]上随机取一个数 x，则 $\|x\|\leq 1$ 的概率为________.	本模板解决的是"求符合几何概型的事件发生的概率"的问题.
解析：∵ 区间[-1,2]长度为3，由 $\|x\|\leq 1$ 得 $x\in[-1,1]$，而区间[-1,1]长度为2，x 取每个值为随机的. ∴ 在[-1,2]上取一个数 x，$\|x\|\leq 1$ 的概率 $P=\frac{2}{3}$. **答案**：$\frac{2}{3}$	第一步　将问题转化为与长度有关的几何问题. 第二步　求出区间[-1,2]和 $\|x\|\leq 1$ 的区域长度. 第三步　由几何概型的概率公式求得 $P=\frac{2}{3}$.

凯尔微博


该以怎样的心态进入考场？如何调整心态？(一)　1.排除干扰思绪，提前进入状态. 考前要抛弃各种杂念，排除干扰思绪，创设数学情境，进而酝酿数学思维，提前进入"角色". 2.一张一弛，集中注意，消除焦虑怯场，集中注意力是考试成功的保证，一定的神经亢奋和紧张，能加速神经联系，有益于积极思维，能使注意力高度集中，思维异常积极.

模板攻略

1. 模板解决思路

用几何概型求解的概率问题和古典概型的思路是相同的,同属于"比例解法". 即随机事件 A 的概率可以用"事件 A 包含的基本事件所占的区域测度"与"试验的基本事件所占区域测度"之比来表示.

2. 模板解决步骤

1 第一步　将问题转化为几何问题.

2 第二步　求出事件 A 和试验全部结果构成的区域长度(角度、面积或体积等).

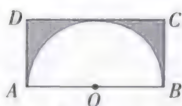
3 第三步　代入公式求出概率 $P(A)$.

3. 典型例题

典例　(辽宁高考)四边形 $ABCD$ 为长方形,$AB=2$,$BC=1$,O 为 AB 的中点. 在长方形 $ABCD$ 内随机取一点,取到的点到 O 的距离大于 1 的概率为(　　).

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $1-\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{8}$　　D. $1-\frac{\pi}{8}$



解析:如图所示,当取到的点位于阴影区域时满足条件,　1

$\therefore P=\frac{1\times2-\frac{1}{2}\times\pi\times1^2}{1\times2}=1-\frac{\pi}{4}$. 故选 B.　2~3

答案:B

温馨提示

正确确定基本事件所占有的空间位置和随机事件在这个位置中的情况,然后计算相关的量,再根据几何概型的公式计算概率.

知识要点

1. 几何概型的定义

如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度(面积或体积)成比例,则称这样的概率模型为几何概率模型,简称为几何概型.

2. 几何概型的特点

(1)试验中所有可能出现的结果(基本事件)有无限多个.

(2)每个基本事件出现的可能性相等.

3. 几何概型的概率公式

$P(A)=\frac{\text{构成事件}A\text{的区域长度(面积或体积)}}{\text{试验的全部结果所构成的区域长度(面积或体积)}}$.

4. 古典概型与几何概型的联系和区别

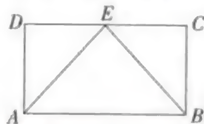
联系:每个基本事件的发生都是等可能的.

区别:古典概型的试验结果是有限的,而几何概型的试验结果是无限的.

模板演练

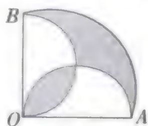
➜ 答案详见 P405

1. (福建高考)如图,矩形 $ABCD$ 中,点 E 为边 CD 的中点. 若在矩形 $ABCD$ 内部随机取一个点 Q,则点 Q 取自 $\triangle ABE$ 内部的概率等于(　　).



A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

2. (湖北高考)如图,在圆心角为直角的扇形 OAB 中,分别以 OA,OB 为直径作两个半圆. 在扇形 OAB 内随机取一点,则此点取自阴影部分的概率是(　　).



该以怎样的心态进入考场?如何调整心态?(二)　3.紧张程度过重,则会走向反面,形成怯场,产生焦虑,会抑制思维. 4. 沉着应战,不要担心,拿到试题后,不要立即下手解题,而应通览一遍整套试题,摸透题情,然后稳操一两个易题熟题,给自己一些信心,以振奋精神,很快进入最佳思维状态,之后做一题得一题,不断产生激励,稳拿中低,见机攀高.



A. $1-\frac{2}{\pi}$ B. $\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}$

C. $\frac{2}{\pi}$ D. $\frac{1}{\pi}$

3.（辽宁高考）在长为 12cm 的线段 AB 上任取一点C. 现作一矩形，邻边长分别等于线段 AC，CB 的长，则该矩形面积大于 20cm^2 的概率为（ ）.

A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{4}{5}$

4.（北京高考）设不等式组 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2,\\0\leqslant y\leqslant 2\end{cases}$ 表示的平面区域为 D. 在区域 D 内随机取一个点，则此点到坐标原点的距离大于 2 的概率是（ ）.

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi-2}{2}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{4-\pi}{4}$

5. 在$[-2,3]$上随机取了一个数 x，则$(x+1)(x-3)\leqslant 0$ 的概率为（ ）.

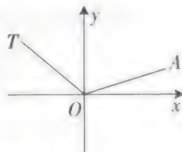
A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

6.（湖南高考）已知圆 $C:x^2+y^2=12$，直线 $l:4x+3y=25$.

（1）圆 C 的圆心到直线 l 的距离为 ________.

（2）圆 C 上任意一点 A 到直线 l 的距离小于 2的概率为 ________.

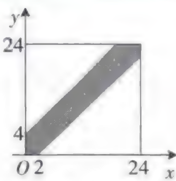
7. 如图所示，在平面直角坐标系 xOy 内，射线 OT 落在 $135°$角的终边上，以 O 为起点，任作一条射线OA，则射线 OA 落在 $\angle xOT$ 内的概率是 ________.



必修3

模板 4 几何概型的实际应用 【5 年 2 考】

模板探究

母题呈现	模板引入
两艘轮船都要停靠同一个泊位，它们可能在昼夜的任意时刻到达. 甲、乙两船停靠泊位的时间分别为 4 小时与 2 小时，求有一艘船停靠泊位时必须等待一段时间的概率.	本模板解决的是“利用几何概型解决实际应用”的问题.
解：以 x 和 y 分别表示甲、乙两船到达泊位的时间，则有一艘船停靠泊位时须等待一段时间等价于$-4\leqslant x-y\leqslant 2$，在如图所示的平面直角坐标系内，$(x,y)$ 的所有可能结果是边长 24 的正方形，而事件 A “有一艘船停靠泊位时必须等待一段时间”的可能结果由阴影部分表示.由几何概型概率公式得  $P(A)=\dfrac{24^2-\frac{1}{2}\times 22^2-\frac{1}{2}\times 20^2}{24^2}=\dfrac{67}{288}$. 所以有一艘船停靠泊位时必须等待一段时间的概率是 $\frac{67}{288}$.	第一步 将实际问题转化为几何概型中的面积问题. 第二步 利用平面直角坐标系求出表示试验全部结果的区域面积和事件 A 的区域面积. 第三步 由几何概型的概率计算公式，得 $P(A)=\frac{67}{288}$.



保持内紧外松的临战状态(一) 考生在考试前一、二周陆续放松，进入临战状态，并进行生物钟的调节，让自己的作息时间安排得与高考同步. 在这段时间内，要保持情绪的稳定、降低学习的强度，增加睡眠时间，进行轻微的活动，避免做难题，加班加点. 考试离家前，要按预先列好的清单带好所需用具，如准考证、文具等，否则进入考场后又为忘这忘那引起不必要的焦虑和恐慌.

模板攻略

1. 模板解决思路

利用几何概型解决实际问题的关键是将实际问题转化为几何概型中相应的长度、角度、面积、体积等问题. 然后利用几何概型的概率公式求解即可. 求解过程中注意实际问题中等可能性的判断.

2. 模板解决步骤

1 第一步 将实际问题转化为几何概型中的长度、角度、面积、体积等问题.

2 第二步 根据已知,求出相应的试验全部结果构成的区域测度和所求事件的区域测度.

3 第三步 由几何概型的概率公式求出所求概率.

3. 典型例题

典例 甲、乙两人相约 12:00~13:00 在某地会面,假定每人在这段时间内的每个时刻到达会面地点的可能性是相同的,先到者等 20 分钟后便离去,试求两人能会面的概率.

解:在平面上建立如图所示的直角坐标系,直线 $x=60$,直线 $y=60$,x 轴、y 轴围成一个正方形区域 G. 设甲 12时 x 分钟到达会面地点,乙 12 时 y 分到达会面地点,这个结果与平面上的点(x,y)对应. 于是试验的所有可能结果就与 G 中的所有点一一对应. 由题意知,每一个试验结果出现的可能性是相同的,因此,试验属于几何概型. ①

甲、乙两人能会面,当且仅当他们到达会面地点的时间差不超过 20 分钟,即 $|y-x|\leq 20$,$x-20\leq y\leq x+20$,因此,图中的阴影区域 M 就表示"甲、乙能会面". 易求得 M 的面积为 60^2-40^2,即 2 000,G 的面积为 3 600, ②

由几何概型的概率计算公式得,"甲、乙能会面"的概率为 $P(\text{甲、乙能会面})=\dfrac{M\text{ 的面积}}{G\text{ 的面积}}=\dfrac{5}{9}$. ③

模板演练

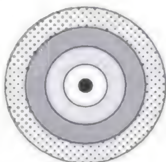
➡ 答案详见 P406

1. (江西高考)小波通过做游戏的方式来确定周末活动,他随机地往单位圆内投掷一点,若此点到圆心的距离大于 $\frac{1}{2}$,则周末去看电影;若此点到圆心的距离小于 $\frac{1}{4}$,则去打篮球;否则,在家看书. 则小波周末不在家看书的概率为 ______.

2. 一海豚在水池中自由游弋,水池为长 40m、宽30m 的长方形,则此海豚嘴尖离岸边不超过 2m 的概率是 ______.

3. 一个路口的信号灯,红灯亮的时间间隔为 30 秒,绿灯亮的时间间隔为 40 秒,如果你到达路口时,遇到红灯的概率为 $\frac{2}{5}$,那么黄灯亮的时间间隔为 ______ 秒.

4. 射箭比赛的箭靶涂有 5 个彩色的分环,从外向内为白色、黑色、蓝色、红色,靶心为金色. 金色靶心叫"黄心",奥运会的比赛靶面直径是 122cm,靶心直径 12.2cm,运动员在 70m 外射箭. 假设都能中靶,且射中靶面内任一点是等可能的,那么射中"黄心"的概率是多少?



必修3

保持内紧外松的临战状态(二) 考试过程中要放得开,精神集中,心态平和,善于暗示自我,还要认识到个别题目不会做,个别科目未能发挥应有的水平都是正常现象,不必大惊小怪,要保持良好的心态,坚持做好每一题,用好每一分每一秒,不到时间决不放弃,树立"我难、你难、他也难,大家都难不算难"的全局意识.



第一章 三角函数

模板 1 三角式的化简求值 【5年8考】

模板探究

母题呈现	模板引入
已知$\frac{\tan\alpha}{\tan\alpha-1}=-1$,求下列各式的值. (1)$\frac{\sin\alpha-3\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$;(2)$\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+2$.	本模板解决的是“已知某角的某个三角函数值,求关于此角的某个三角式的值”的问题.
解:由已知得$\tan\alpha=\frac{1}{2}$,所以 (1)$\frac{\sin\alpha-3\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha-3}{\tan\alpha+1}$ $=\frac{\frac{1}{2}-3}{\frac{1}{2}+1}=-\frac{5}{3}$. (2)$\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+2=\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)$ $=\frac{3\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{3\tan^2\alpha+\tan\alpha+2}{\tan^2\alpha+1}$ $=\frac{3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}=\frac{13}{5}$.	第一步 利用关于正切的关系式转换或将正切值求出来. 第二步 将正、余弦的三角函数关系式化成分式形式(利用$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$),然后分子、分母同除以$\cos^2\alpha$,得到关于$\tan\alpha$的关系式. 第三步 将关于$\tan\alpha$的关系式化简,并代入$\tan\alpha$求值.

模板攻略

1. 模板解决思路

此模板的关键是将三角式化简成关于某一个三角函数的代数式,然后利用已知的三角函数值将所需的三角函数求出,代入三角式可得结果.

2. 模板解决步骤

1 第一步 求出三角函数值或关系式.

2 第二步 化简三角式,使之只包含已求得值或关系式三角函数.

3 第三步 将三角函数值或关系式代入,求出结果.

3. 典型例题

典例 1 已知$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)=a(a\neq\pm1,a\neq0)$.

求$\cos\left(\alpha+\frac{14\pi}{5}\right)\tan\left(\alpha-\frac{11\pi}{5}\right)+\frac{\tan\left(\alpha+\frac{9\pi}{5}\right)}{\cos\left(\frac{26\pi}{5}-\alpha\right)}$的值.

解:$\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)=1-\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)=1-a^2$, ①

$\cos\left(\alpha+\frac{14\pi}{5}\right)\tan\left(\alpha-\frac{11\pi}{5}\right)+\frac{\tan\left(\alpha+\frac{9\pi}{5}\right)}{\cos\left(\frac{26\pi}{5}-\alpha\right)}$



保持最佳的复习心态(一) 心态甚至比学习方法更重要,学习心态是学生学习时的心理状态,成功的数学活动往往是伴随着最佳心态产生的.那么怎样形成复习时的最佳心态呢?我们必须在复习的过程中不断地给自己创造一种轻松感、愉悦感、严谨感和成功感.愉悦感是最佳心态的催化剂.学习中有了愉悦感,学习起来就会兴趣十足、积极主动,思维机制的运转就会加速.

$=-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)+\frac{\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)}{-\cos\left(\frac{\pi}{5}-\alpha\right)}$

$=-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)-\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)}{\cos^2\left(\alpha-\frac{\pi}{5}\right)}=-a-\frac{a}{1-a^2}=\frac{a^3-2a}{1-a^2}$. ②～③

典例 2　已知 $\sin\alpha,\cos\alpha$ 是关于 x 的一元二次方程 $2x^2+(\sqrt{2}+1)x+\frac{2\sqrt{2}-1}{4}=0$ 的两根，求 $\frac{\cos\alpha}{1-\cot^2\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ 的值.

解：由韦达定理可得 $\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}+1}{2}$，$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}-1}{8}$.　①

$\frac{\cos\alpha}{1-\cot^2\alpha}+\frac{\sin\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{1-\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}+\frac{\sin\alpha}{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}$

$=\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$　②

$=\frac{\frac{2\sqrt{2}-1}{8}}{-\frac{\sqrt{2}+1}{2}}=\frac{3\sqrt{2}-5}{4}$.　③

知识要点

1. 三角函数在各象限的符号



特别提示

记忆口诀："一全正，二正弦，三正切，四余弦."即第一象限三角函数值均为正，第二象限正弦值为正，第三象限正切值为正，第四象限余弦值为正，其余均为负.

2. 同角三角函数的平方关系

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

3. 同角三角函数的商数关系

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha\left(\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right)$.

(1)同角三角函数基本关系的等价形式：$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$，$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$，$\sin\alpha=\cos\alpha\tan\alpha$，$\cos\alpha=\frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}$.

(2)$\sin\alpha+\cos\alpha$，$\sin\alpha-\cos\alpha$，$\sin\alpha\cos\alpha$ 之间的关系：

$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha$；

$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha$；

$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$.

由以上关系，可知对于 $\sin\alpha+\cos\alpha$，$\sin\alpha-\cos\alpha$，$\sin\alpha\cos\alpha$ 可以"知一求二"，也就是已知这三个三角函数式中任意一个式子的值，就能求其他两个三角函数式的值.

模板演练

➡ 答案详见 P406

1. 已知 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$，则 $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=$(　　).

A. -3　　B. $-\frac{1}{3}$　　C. 3　　D. $\frac{1}{3}$

2. 已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{2}$，则 $\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}=$(　　).

A. -4　　B. 4　　C. -8　　D. 8

3. 已知 $\tan\alpha=2$，则 $3\sin^2\alpha-\cos\alpha\sin\alpha+1=$(　　).

A. 3　　B. -4　　C. -3　　D. 4

4. 已知 $\tan\alpha=\sqrt{3}$，$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，求 $\sin\alpha-\cos\alpha$ 的值.

保持最佳的复习心态(二)　严谨感是学习过程的监控器，它能让我们在解题过程中思路清晰、因果分明、准确规范，不应有任何遗漏与含糊之处，即"会做的要得满分". 成功感是学习的"内动力"，对自己的成绩有一种独特的成功快乐和自我欣赏与陶醉，能使自己保持积极的进取心态.



必修4

模板 2　三角等式的证明

模板探究

母 题 呈 现	模 板 引 入
已知 $\tan^2\alpha=2\tan^2\beta+1$. 求证：$\sin^2\beta=2\sin^2\alpha-1$.	本模板解决的是“证明三角等式成立”的问题.
证明：$\because \tan^2\alpha=2\tan^2\beta+1$，$\therefore \tan^2\beta=\frac{\tan^2\alpha-1}{2}$. $\because \tan^2\beta=\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}=\frac{\sin^2\beta}{1-\sin^2\beta}$，$\therefore \sin^2\beta=\frac{\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}$. $\therefore \sin^2\beta=\frac{\frac{\tan^2\alpha-1}{2}}{1+\frac{\tan^2\alpha-1}{2}}=\frac{\tan^2\alpha-1}{\tan^2\alpha+1}=\frac{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-1}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1}$ $=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=2\sin^2\alpha-1$.	第一步　化简已知条件，得出 $\tan^2\beta=\frac{\tan^2\alpha-1}{2}$，确定从左向右证明. 第二步　化正弦为正切，得出 $\sin^2\beta=\frac{\tan^2\beta}{1+\tan^2\beta}$. 第三步　代入 $\tan^2\beta=\frac{\tan^2\alpha-1}{2}$ 并化简计算，得出结论.

模板攻略

1. 模板解决思路

证明三角等式，一般是按“化繁为简”的方式进行证明，若两边都比较复杂，则可考虑证明“左边−右边=0”. 证明过程中，先将角化成同角，再将函数名化为同名，最后利用通分，合并同类项等方式得出结果.

2. 模板解决步骤

1 第一步　确定证明方向，按照“化繁为简”的方式进行证明，若左右两边都比较繁琐，可证明“左边−右边=0”或“$\frac{左边}{右边}=1$”.

2 第二步　将角化成同角，函数名化成相同的.

3 第三步　利用通分，合并同类项等方式化简，得到证明. 其中，注意 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 的使用.

3. 典型例题

典例　证明：$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$.

思路分析：本题中左边相对更复杂，因此可按照“从左到右”的方式证明，也可以选择证明“左−右=0”.

证明：证法一：左边$=\frac{\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin\alpha-\sin^2\alpha}{(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)}$　1

$=\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)(1+\sin\alpha+\cos\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)(1+\sin\alpha+\cos\alpha)}{1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha+2\cos\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}$

$=\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)(1+\sin\alpha+\cos\alpha)}{(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$

$=\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}=$右边.　3

$\therefore$ 原式成立.

证法二：左边−右边$=\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}-\frac{2(\cos\alpha-\sin\alpha)}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$　1

$=\frac{1}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}\left(\cos\alpha+\frac{\cos^2\alpha}{1+\sin\alpha}-\sin\alpha-\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}-2\cos\alpha+2\sin\alpha\right)$

$=\frac{1}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}(-\cos\alpha+1-\sin\alpha+\sin\alpha-1+\cos\alpha)$

$=0$.　3

$\therefore$ 原式成立.

凯尔微博



加强体育锻炼，保持乐观心境　英国教育家斯宾认为“健康的人格寓于健康的身体”，只有保持身体健康才会保证心理健康. 有许多紧张、压抑者通过体育锻炼，出一身汗，精神就轻松多了. 科学研究证明，一些呼吸性的锻炼，例如散步、慢跑、游泳等，可使人信心倍增，精力充沛. 因为这些活动让人肌体彻底放松，从而消除紧张和焦虑的情绪.

模板演练

➡ 答案详见 P407

1. 已知 α 为第二象限角,证明:$\cos\alpha\sqrt{1+\tan^2\alpha}+\sin\alpha\cdot\sqrt{1+\frac{1}{\tan^2\alpha}}=0$.

2. 若 $\sin\alpha+\sin^2\alpha=1$,证明:$\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=1$.

3. 在△ABC 中,证明:$\cos^2\frac{A+B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=1$.

4. 求证:$\frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}$.

模板3　求一个角的三角函数值 【5年13考】

模板探究

母 题 呈 现	模 板 引 入
(全国高考)记 $\cos(-80°)=k$,那么 $\tan100°=$(　　). A. $\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$　B. $-\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$ C. $\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$　D. $-\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$	本模板解决的是"已知 α 的一个三角函数式,求 β 的三角函数值,其中 α 和 β 的和或差是 $\frac{\pi}{2}$ 的整数倍"的问题.
解析:$\because\cos(-80°)=\cos80°=k$, $\therefore\sin80°=\sqrt{1-\cos^2 80°}=\sqrt{1-k^2}$, $\therefore\tan80°=\frac{\sin80°}{\cos80°}=\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$. 而 $\tan100°=\tan(180°-80°)=-\tan80°=-\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}$. **答案**:B	第一步　求出 $\cos80°=k$. 第二步　求出 $\tan80°$的值. 第三步　利用 $\tan100°=-\tan80°$求出 $\tan100°$的值.

不断进行自我激励(一)　美国哈佛大学心理学家威廉·詹姆士研究发现,一个没有受到激励的人,仅能发挥其能力的 20%~30%,而当他受到激励时,其能力可以发挥至 80%~90%. 这就是说,同样一个人,在通过充分激励后,所发挥的作用相当于激励前的 3 至 4 倍. 下面介绍六个自我激励的步骤:1. 在心里确定你希望考出的分数.



模板攻略

1. 模板解决思路

针对所给的三角函数式，首先将其化简，最好能求出一个三角函数值，然后寻找所求三角函数与已得三角函数的关系. 常用的工具有诱导公式和同角三角函数之间的关系.

2. 模板解决步骤

1 第一步　通过 α 的三角函数式，求出 α 的一个三角函数值.

2 第二步　求出 α 的其他三角函数值.

3 第三步　利用诱导公式求出 β 的待求三角函数值.

3. 典型例题

典例 1　sin585°的值为（　　）.

A. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析：显然 $\sin45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$.　①

$\sin585°=\sin(360°+225°)=\sin225°=\sin(180°+45°)$

$=-\sin45°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.　③

答案：A

典例 2　若 $\sin(\pi-\alpha)=\log_8\frac{1}{4}$，且 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，则 $\cos(2\pi-\alpha)$的值是 ________.

思路分析：由 $\sin(\pi-\alpha)$ 可得 $\sin\alpha$，然后可利用 α 的范围得 $\cos\alpha$，最后可得 $\cos(2\pi-\alpha)$.

解析：由 $\sin(\pi-\alpha)=\log_8\frac{1}{4}=\frac{\log_2\frac{1}{4}}{\log_2 8}=-\frac{2}{3}$，

则 $\sin\alpha=\sin(\pi-\alpha)=-\frac{2}{3}$，　①

因为 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，所以 $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，　②

$\cos(2\pi-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$.　③

答案：$\frac{\sqrt{5}}{3}$

误区警示

根据 α 的范围，可以得出 $\cos\alpha$ 的准确值，而不是两个值. 因此，最后的结果也只有一个值，而不是两个值.

知识要点

三角函数的诱导公式

公式一：$\sin(\alpha+k\cdot2\pi)=\sin\alpha$，$k\in\mathbf{Z}$

$\cos(\alpha+k\cdot2\pi)=\cos\alpha$，$k\in\mathbf{Z}$

$\tan(\alpha+k\cdot2\pi)=\tan\alpha$，$k\in\mathbf{Z}$

公式二：$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$　$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$

$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$

公式三：$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$　$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$

$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$

公式四：$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$　$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$

$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$

公式五：$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$　$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$

公式六：$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$　$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$

特别提示

记忆口诀："奇变偶不变，符号看象限". 即公式中除 α 以外的角是 $\frac{\pi}{2}$ 的奇数倍则变，为角 α 的相应的余名三角函数；是 $\frac{\pi}{2}$ 的偶数倍则不变，为角 α 的同名三角函数；等号后面的符号是把 α 看成锐角时等号左边的三角函数值的符号.

凯尔微博



不断进行自我激励（二）　2. 确确实实地决定，你将会付出什么努力与花多少代价去换取你想得到的分数. 3. 规定一个固定的日期，一定要在这日期之前把你要做的做完. 4. 拟定一个实现你理想的可行性计划，并马上进行. 5. 将以上四点清楚地写下来，一定要白纸黑字. 6. 不妨每天两次，大声朗诵你写的计划的内容，一次在晚上就寝之前，另一次在早上起床之后.

模板演练

➡ 答案详见 P407

1. (辽宁高考)已知$\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2}$,$\alpha\in(0,\pi)$,则$\tan\alpha=$(　　).

A. -1　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 1

2. $\cos300°$等于(　　).

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 已知$\tan\alpha=-a$,则$\tan(\pi-\alpha)$的值等于(　　).

A. a　　B. $-a$　　C. $\frac{1}{a}$　　D. $-\frac{1}{a}$

4. (重庆高考)若$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$,且$\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$,则$\tan\alpha=$______.

5. 已知$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$,$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$,则$\cos(\pi-\alpha)$的值为______.

6. 若$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$,求$\frac{\cos(\pi-\theta)}{\cos\theta\left[\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)-1\right]}+\frac{\cos(2\pi-\theta)}{\cos(\pi+\theta)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)}$的值.

模板4　三角函数性质的应用 [5年30考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(天津高考)函数$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最小值为(　　). A. -1　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　D. 0	本模板解决的是“已知与三角函数相关的函数$y=f(x)(x\in D)$,求其定义域、值域、单调区间或最值”等问题.
解析:由已知$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,得$2x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$,所以$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$,故函数$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最小值为$-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **答案:**B	第一步　由$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$得出$2x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$. 第二步　得出$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$的范围. 第三步　得出$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最小值.

检票问题(一)　旅客在车站候车室等候检票,并且排队的旅客按照一定的速度在增加,检票速度一定,当车站开放一个检票口,半小时可将旅客全部检票进站;同时开放两个检票口,只需十分钟便可将旅客检票全部进站,现有一班增开列车过境载客,必须在5分钟内将旅客全部检票进站,问此车站同时开放几个检票口?

凯尔微博



模板攻略

1. 模板解决思路

三角函数 $\sin x,\cos x,\tan x$ 的定义域、值域及相关性质已有结论,因此与它们相关的函数,关键是搞清楚这些函数的复合方式,然后利用复合函数的方法解决相关性质.

2. 模板解决步骤

1 第一步　由 $x\in D$ 求出函数名后整体相应的范围.

2 第二步　由三角函数的性质,得出关于自变量的方程或不等式(组).

3 第三步　解方程或不等式(组),得相应的值或取值范围.

3. 典型例题

典例 1　(山东高考)函数 $y=2\sin\left(\frac{\pi x}{6}-\frac{\pi}{3}\right)(0\leqslant x\leqslant 9)$的最大值与最小值之和为(　　).

A. $2-\sqrt{3}$　　　　B. 0

C. -1　　　　D. $-1-\sqrt{3}$

思路分析:利用x的范围可求出$\frac{\pi x}{6}-\frac{\pi}{3}$的范围,然后可得函数值域,即最大值和最小值可得.

解析:由$0\leqslant x\leqslant 9$,得$-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi x}{6}-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{7\pi}{6}$,　①

$\therefore\sin\left(\frac{\pi x}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$,　②

$\therefore 2\sin\left(\frac{\pi x}{6}-\frac{\pi}{3}\right)\in[-\sqrt{3},2]$,

$\therefore$函数的最大值与最小值之和为$2-\sqrt{3}$.　③

答案:A

典例 2　求函数 $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的定义域、周期和单调区间.

思路分析:根据正切函数的定义域、周期和单调性求解.

解:函数的自变量x应满足:$2x-\frac{\pi}{3}\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

即$x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$.　①~②

$\therefore$函数的定义域为$\left\{x\middle|x\in\mathbf{R}且x\neq\frac{k\pi}{2}+\frac{5\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})\right\}$.　③

由于函数最小正周期为$\frac{\pi}{2}$,　②

因此函数 $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$的周期为$\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z}且k\neq 0)$.　③

由于$y=\tan x$在$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$上是增函数,

因此$-\frac{\pi}{2}+k\pi<2x-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,　①

即$-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$.　②

因此,函数的单调递增区间为$\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$.　③

知识要点

1. 正弦函数、余弦函数的性质

(1)定义域:$\mathbf{R}$. 值域:$[-1,1]$.

(2)周期性

正弦函数、余弦函数都是周期函数,$2k\pi(k\in\mathbf{Z}$且$k\neq 0)$都是它们的周期,最小正周期是2π.

(3)奇偶性

正弦函数是奇函数,余弦函数是偶函数.

(4)单调性

正弦函数在每一个闭区间$\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$上都是增函数,其值从$-1$增大到$1$;在每一个闭区间$\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$上都是减函数,其值从1减小到$-1$.

余弦函数在每一个闭区间$[-\pi+2k\pi,2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上都是增函数,其值从$-1$增大到1;在每一个闭区间$[2k\pi,\pi+2k\pi](k\in\mathbf{Z})$上都是减函数,其值从1减小到$-1$.

凯尔微博



检票问题(二)　分析:(1)本题是一个贴近实际的应用题.仔细阅读后发现涉及的量为:原排队人数,旅客按一定速度增加的人数,每个检票口检票的速度等.(2)给分析出的量一个代表符号:设检票开始时等候检票的旅客人数为x人,排队队伍每分钟增加y人,每个检票口每分钟检票z人,最少同时开n个检票口,旅客就可在5分钟全部检票进站.

(5)最大值与最小值

正弦函数当且仅当$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时取得最大值1,当且仅当$x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时取得最小值-1;余弦函数当且仅当$x=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时取得最大值1,当且仅当$x=\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时取得最小值-1.

(6)对称轴

正弦曲线的对称轴:$x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

余弦曲线的对称轴:$x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

(7)对称中心

正弦曲线的对称中心$(k\pi,0),k\in\mathbf{Z}$.

余弦曲线的对称中心$\left(\frac{\pi}{2}+k\pi,0\right),k\in\mathbf{Z}$.

特别提示

探究$y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$的性质时,可利用换元思想,将$\omega x+\varphi$看作一个整体,结合$y=\sin x$的性质求解.函数$y=A\cos(\omega x+\varphi)$,$y=A\tan(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0)$性质的探究方法相同.

2. 正切函数的图象与性质

函数	$y=\tan x$
定义域	$\left\{x\mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$
值域	实数集$\mathbf{R}$
图象	正切曲线　y　$-\pi$　$\frac{\pi}{2}$　π　$-\frac{3\pi}{2}$　$-\frac{\pi}{2}$　O　$\frac{3\pi}{2}$　x
周期	是周期函数,$k\pi(k\in\mathbf{Z}$且$k\neq0)$是周期,最小正周期是π
奇偶性	奇函数
单调性	在开区间$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$内都是增函数
对称中心	$\left(\frac{k\pi}{2},0\right),k\in\mathbf{Z}$

特别提示

(1)$y=\tan x$无单调递减区间.

(2)$y=\tan x$在整个定义域内不单调.

模板演练

➜ 答案详见 P407

1. 求下列函数的定义域.

(1)$y=\frac{\sqrt{-2\sin x-\sqrt{3}}}{1+\tan x}$;(2)$y=\lg\sin(\cos x)$.

2. 求下列函数的单调递增区间.

(1)$y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$;(2)$y=3\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)$.

3. 求下列函数的最大值和最小值.

(1)$y=\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin x}$;(2)$y=3+2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

4. 已知函数$f(x)=-2\sin(2x+\varphi)(|\varphi|<\pi)$,若$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=-2$,求$f(x)$的单调递减区间.

检票问题(三) (3)把本质的内容翻译成数学语言:开放一个检票口,需半小时检完,则$x+30y=30z$,开放两个检票口,需10分钟检完,则$x+10y=2\times10z$,开放n个检票口,最多需5分钟检完,则$x+5y\leqslant n\times5z$,可解得$x=15z,y=0.5z$,将以上两式代入不等式得$n\geqslant3.5$,则$n=4$.所以,至少要同时开放4个检票口.

凯尔微博



模板5 利用函数性质求参数【5年18考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(新课标全国高考)已知 $\omega>0$,函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减,则 ω 的取值范围是( ). A. $\left[\frac{1}{2},\frac{5}{4}\right]$ B. $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$ C. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ D. $(0,2]$	本模板解决的是"已知关于三角函数的函数 $y=f(x)$满足某种性质 p,求其中参数的值或取值范围"的问题.
解析:由 $\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$得 $x\in\left[\frac{\pi}{4\omega}+\frac{2k\pi}{\omega},\frac{5\pi}{4\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\right](k\in\mathbf{Z})$, 可知 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{4\omega}+\frac{2k\pi}{\omega},\frac{5\pi}{4\omega}+\frac{2k\pi}{\omega}\right](k\in\mathbf{Z})$, 又 $\because f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减, $\therefore\begin{cases}\frac{\pi}{4\omega}\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \frac{5\pi}{4\omega}\geqslant\pi,\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{2}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{4}$. **答案**:A	第一步 由单调递减区间得出 x 的范围. 第二步 利用条件得出关于 ω 的不等式. 第三步 解出 ω 的取值范围.

模板攻略

1. 模板解决思路

函数 $y=f(x)$满足某种性质 p,可以按上一个模板的方法对 $y=f(x)$的性质进行讨论,由于其中含参数,将讨论得到的性质与性质 p 进行对照,可以得到关于参数的方程或不等式(组),解之可得结果.

2. 模板解决步骤

1 第一步 将性质 p 转化为关于参数的条件.

2 第二步 得到关于参数的方程或不等式(组).

3 第三步 求出参数的值或取值范围.

3. 典型例题

典例1 (山东高考)若函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增,在区间$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减,则 ω=( ).

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 2 D. 3

解析:$\because f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增,在区间$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减,



凯尔微博

进考场前10分钟 入场前提醒自己做到"四心":一是保持"静心"——自我暗示:"我很沉着,很放松","该掌握的我都掌握了";二是增强"信心"——暗示自己:"我正常发挥会比别人强";三是做题"专心"——排除杂念,如眨眨眼,暗示自己"我要专心";四是考试"细心"——暗示自己"考试时我能做到读题一字不漏,一字不多,下笔慎重".

$\therefore$ 函数在 $x=\frac{\pi}{3}$ 处取得最大值.

$\therefore \frac{\omega\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$. (1~2)

$\therefore \omega=6k+\frac{3}{2}$,

$\therefore k=0$ 时, $\omega=\frac{3}{2}$. (3)

答案:B

典例 2　求当函数 $y=\sin^2x+a\cos x-\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}$ 的最大值为 1 时, a 的值.

解: $y=-\cos^2x+a\cos x-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}=-\left(\cos x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}$.

设 $\cos x=t$, $\because -1\leqslant\cos x\leqslant1$, $\therefore -1\leqslant t\leqslant1$.

$\therefore$ 求函数 $y=-\left(\cos x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}$ 的最大值为 1 时 a 的值等价于求闭区间上的二次函数 $y=-\left(t-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}(-1\leqslant t\leqslant1)$ 的最大值为 1 时 a 的值. (1)

(1)当 $\frac{a}{2}<-1$, 即 $a<-2$ 时,

$t=-1$, y 有最大值为 $-\frac{3}{2}a-\frac{3}{2}$,

由题设可知 $-\frac{3}{2}a-\frac{3}{2}=1$, $\therefore a=-\frac{5}{3}>-2$(舍去).

(2)当 $-1\leqslant\frac{a}{2}\leqslant1$, 即 $-2\leqslant a\leqslant2$ 时, $t=\frac{a}{2}$, y 有最大值为 $\frac{a^2}{4}-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}$,

由题设可知 $\frac{a^2}{4}-\frac{a}{2}-\frac{1}{2}=1$,

解得 $a=1-\sqrt{7}$, 或 $a=1+\sqrt{7}$(舍去).

(3)当 $\frac{a}{2}>1$ 时, 即 $a>2$ 时, $t=1$, y 有最大值为 $\frac{a}{2}-\frac{3}{2}$,

由题设可知 $\frac{a}{2}-\frac{3}{2}=1$, $\therefore a=5$.

综上可得 $a=1-\sqrt{7}$ 或 $a=5$. (2~3)

模板演练

➡ 答案详见 P408

1. (全国高考)若函数 $f(x)=\sin\frac{x+\varphi}{3}$ ($\varphi\in[0,2\pi]$) 是偶函数,则 $\varphi=$(　　).

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{2\pi}{3}$　　C. $\frac{3\pi}{2}$　　D. $\frac{5\pi}{3}$

2. 已知函数 $y=\sin(\omega x+\theta)$ $(0<\theta<\pi, \omega>0)$ 为偶函数,则 $\theta=$(　　).

A. $2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$　　B. $k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$

C. $\frac{\pi}{2}$　　D. π

3. 已知函数 $y=\tan\omega x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内为减函数,则(　　).

A. $0<\omega\leqslant1$　　B. $-1\leqslant\omega<0$

C. $\omega\geqslant1$　　D. $\omega\leqslant-1$

4. 已知函数 $y=\sin(2x+\varphi)$ 的图象过点 $\left(\frac{\pi}{12},0\right)$,则 φ 可以是(　　).

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $-\frac{\pi}{6}$　　C. $-\frac{\pi}{12}$　　D. $\frac{\pi}{12}$

5. 若函数 $f(x)=2\sin\omega x$ $(0<\omega<1)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上的最大值为 $\sqrt{2}$,求 ω 的值.

必修 4

化归与转化(一)　将未知的解法或难以解决的问题通过观察、分析、类比、联想等思维过程,选择运用恰当的数学方法进行变换,化归为在已知知识范围内已经解决或容易解决的问题的思想叫做化归与转化的思想. 化归与转化思想的实质是揭示联系,实现转化. 除极简单的数学问题外,每个数学问题的解决都是通过转化为已知的问题实现的.

凯尔微博



模板 6　三角函数不等式的解法 [5年6考]

模板探究

母题呈现	模板引入
满足 $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\geqslant\frac{1}{2}$ 的 x 的集合是(　　). A. $\left\{x\left\|2k\pi+\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{13\pi}{12},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$ B. $\left\{x\left\|2k\pi-\frac{\pi}{12}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{7\pi}{12},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$ C. $\left\{x\left\|2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$ D. $\left\{x\left\|2k\pi+\frac{5\pi}{6}\leqslant x\leqslant (2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}\right.\right\}$	本模板解决的是“已知某三角函数不等式，求使不等式成立的 x 的范围”的问题.
解析：作出 $y=\sin t$ 的图象及直线 $y=\frac{1}{2}$. 由图得 $2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant t\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$， 即 $2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x-\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$， $\therefore 2k\pi+\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{13\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$. **答案**：A	第一步　转化为 $\sin t\geqslant\frac{1}{2}$. 第二步　求出 t 的范围. 第三步　由 $t=x-\frac{\pi}{4}$ 得到 $x-\frac{\pi}{4}$ 的范围. 第四步　解出 x 的范围.

模板攻略

1. 模板解决思路

解关于三角函数的不等式，首先是整理化简不等式，然后得出 $\sin t\geqslant a$ 的类似形式，解出其中 t 的范围，最后利用 t 的范围得出自变量的取值范围.

2. 模板解决步骤

1 第一步　整理化简，得出关于 $\sin t(t=\varphi(x))$ 的简单不等式.

2 第二步　解出 t 的范围.

3 第三步　得出关于 x 的不等式.

4 第四步　解出自变量 x 的范围.

3. 典型例题

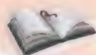
典例 1　已知函数 $y=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)(x\in\mathbf{R})$，求满足 $y\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的 x 的取值范围.

解：$y=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$

$=2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

$=\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$.

凯尔微博



化归与转化(二)　从这个意义上讲，解决数学问题就是从未知向已知转化的过程. 化归与转化的思想是解决数学问题的根本思想. 数学中的转化比比皆是，如未知向已知转化，复杂问题向简单问题转化，新知识向旧知识的转化，命题之间的转化，数与形的转化，空间向平面的转化，多元向一元的转化，高次向低次的转化，函数与方程的转化等. 都是转化思想的体现.

令 $t=\frac{\pi}{3}-x$，即求 $\sin t\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的解集. ①

由正弦函数的图象及性质得，

$\frac{\pi}{4}+2k\pi\leq t\leq\frac{3\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$. ②

$\therefore\frac{\pi}{4}+2k\pi\leq\frac{\pi}{3}-x\leq\frac{3\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$. ③

$\therefore-\frac{5\pi}{12}+2k\pi\leq x\leq\frac{\pi}{12}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$. ④

故 x 的取值范围是 $\left[-\frac{5\pi}{12}+2k\pi,\frac{\pi}{12}+2k\pi\right], k\in\mathbf{Z}$.

典例 2　已知函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，$0<\varphi<\pi$，若 $f(x)\leq\left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，求满足 $f(x)\geq\frac{1}{2}$ 的 x 的取值范围.

解：由 $f(x)\leq\left|f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right|$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，$2\times\frac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，得 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ 或 $2k\pi-\frac{5\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$.

$\because 0<\varphi<\pi$，

$\therefore\varphi=\frac{\pi}{6}$.

令 $t=2x+\frac{\pi}{6}$.

$\therefore\sin t\geq\frac{1}{2}$. ①

解得 $\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq t\leq\frac{5\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$. ②

$\therefore\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq 2x+\frac{\pi}{6}\leq\frac{5\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z}.)$. ③

$\therefore k\pi\leq x\leq\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$. ④

故 x 的取值范围是 $\left[k\pi,\frac{\pi}{3}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

模板演练

➡ 答案详见 P408

1. 设函数 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{5}\right)$，求满足 $f(x)\leq\frac{1}{2}f\left(\frac{3}{5}\right)$ 的 x 的取值范围.

2. 已知函数 $f(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+b$，$f(0)=1$，求使 $f(x)<\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ 成立的 x 的取值范围.

3. 已知函数 $f(x)=A\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$，若 $f(x)$ 的最大值为 3，求使 $f(x)>\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 成立的 x 的取值范围.

4. 解满足 $y=\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\pi\right)(x\in[0,2\pi))$ 中 $y\geq\frac{1}{2}$ 的 x 的取值范围.

化归与转化(三)　转化分为等价转化和非等价转化. 等价转化前后是充要条件，所以尽可能使转化具有等价性；在不得已的情况下，进行不等价转化，应附加限制条件，以保持等价性，或对所得结论进行必要的验证. 熟练、扎实地掌握基础知识、基本技能和基本方法是转化的基础；丰富的联想、机敏细微的观察、比较、类比是实现转化的桥梁.



模板 7　求三角函数的周期或对称轴(中心)（5年19考）

模板探究

母题呈现	模板引入
求函数 $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}+4x\right)+\cos\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的周期和对称轴.	本模板解决的是"已知三角函数 $f(x)$,求其周期、对称轴或对称中心"的问题.
解:$\because \cos\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-4x\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}+4x\right)\right]$ $=\sin\left(\frac{\pi}{3}+4x\right)$. 从而原式就是 $y=2\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$, 则此函数的周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$. 令 $4x+\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$, 即对称轴为 $x=\frac{k}{4}\pi+\frac{\pi}{24}(k\in\mathbf{Z})$.	第一步　将函数整理成 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ 的形式. 第二步　代入函数周期和对称轴性质公式. 第三步　求出周期和对称轴.

模板攻略

1. 模板解决思路

解此类问题首先将函数化成 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ 的形式,然后按照性质得到关于 $\omega x+\varphi$ 的等式,最后解出要求的结果即可.

2. 模板解决步骤

1 第一步　将 $f(x)$ 化成 $A\sin(\omega x+\varphi)+b$ 或 $A\cos(\omega x+\varphi)+b$ 或 $A\tan(\omega x+\varphi)+b$ 的形式.

2 第二步　将 $\omega x+\varphi$ 视作一个整体,按 $\sin x$,$\cos x$,$\tan x$ 的性质写出周期、对称轴或对称中心满足的条件.

3 第三步　解出 x 的值,写出相应的周期、对称轴或对称中心.

3. 典型例题

典例 1　(福建高考)函数 $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象的一条对称轴是(　　).

A. $x=\frac{\pi}{4}$　　B. $x=\frac{\pi}{2}$　　C. $x=-\frac{\pi}{4}$　　D. $x=-\frac{\pi}{2}$

解析:$y=\sin x$ 的对称轴为 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$. 则 $f(x)$ 的对称轴为 $x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.　2

即 $x=\frac{3}{4}\pi+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.　3

经检验,各选项中只有 C:$x=-\frac{\pi}{4}$ 符合.

答案:C

典例 2　求函数 $y=3\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的对称中心的坐标.

解:令 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,　2

得 $x=\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$.

$\therefore$ 原函数的对称中心坐标为 $\left(\frac{k\pi}{4}-\frac{\pi}{6},0\right)(k\in\mathbf{Z})$.　3

凯尔微博



保持高考良好心态的七种武器(一)　武器一:不要牺牲睡眠时间来学习——因为睡眠过程是大脑合成记忆蛋白的过程,只有睡眠充足,才能提高记忆能力和学习效率,减轻焦虑. 武器二:不能过分要面子——高考是手段,继续深造才是目的. 不要想着我必须考上某大学超过某同学才有面子,这样会增加紧张和焦虑.

知识要点

1. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的特征

振幅：$|A|$　　　周期：$T=\frac{2\pi}{|\omega|}$

频率：$f=\frac{1}{T}=\frac{|\omega|}{2\pi}$　　相位：$\omega x+\varphi$　　初相：φ

2. 三角函数的周期的规律

(1)形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$，$y=A\cos(\omega x+\varphi)$的函数的周期为 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$；

(2)如果函数形如 $y=|A\sin(\omega x+\varphi)|$，$y=|A\cos(\omega x+\varphi)|$，则周期减半，即 $T=\frac{\pi}{|\omega|}$；

(3)形如 $y=A\tan(\omega x+\varphi)$的函数的周期为 $T=\frac{\pi}{|\omega|}$.

> 对于函数 $y=f(\omega x)$(其中 $\omega\neq 0$)，如果存在非零常数 T，使得 $f(\omega x+T)=f(\omega x)$对定义域内的任何值都成立，那么这个函数的一个周期 $T'=\left|\frac{T}{\omega}\right|$.

3. 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$图象的对称性

(1)对称轴方程：$x=\frac{k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{2\omega}-\frac{\varphi}{\omega}(k\in\mathbf{Z})$.

(2)对称中心坐标：$\left(\frac{k\pi-\varphi}{\omega},0\right)(k\in\mathbf{Z})$.

模板演练

➜ 答案详见 P409

1. (湖北高考)函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$，$x\in\mathbf{R}$的最小正周期为(　　).

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. π

C. 2π　　D. 4π

2. 函数 $y=\tan\frac{2}{3}x$ 的最小正周期是(　　).

A. $\frac{2\pi}{3}$　　B. $\frac{3\pi}{2}$

C. 2π　　D. 3π

3. 函数 $y=-3\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$的周期、振幅依次是(　　).

A. $4\pi,-3$　　B. $4\pi,3$

C. $\pi,3$　　D. $\pi,-3$

4. 函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象(　　).

A. 关于点$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$对称

B. 关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$对称

C. 关于点$\left(\frac{\pi}{8},0\right)$对称

D. 关于直线 $x=\frac{\pi}{8}$对称

5. 函数 $y=\left|\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$的最小正周期是______.

6. 求下列函数的最小正周期、对称轴和对称中心.

(1)$y=2\sin\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6}\right)$；

(2)$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(2x-\frac{3\pi}{10}\right)$

必修 4

保持高考良好心态的七种武器(二)　武器三：适当参加体育活动——体育活动可增强神经系统功能，提高神经系统的兴奋性、灵活性，同时可增加记忆蛋白合成，提高学习效率. 武器四：自我放松训练——可靠坐在沙发上，先紧握双拳，全身肌肉绷紧，然后开始放松训练，由前臂开始，依次放松面部、颈、肩、背、胸腹、四肢，每次 10~20 分钟，对抗焦虑有良好的效果.



模板 8 由三角函数的周期性或对称性求参数 [5年10考]

模板探究

母题呈现	模板引入
函数 $y=2\sin(3x+\varphi)\left(\|\varphi\|<\frac{\pi}{2}\right)$的一条对称轴为 $x=\frac{\pi}{12}$，则 φ=(　　). A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $-\frac{\pi}{4}$	本模板解决的是"已知含参数的三角函数的周期或对称轴(中心)，求参数的值"的问题.
解析：由$y=\sin x$的对称轴为$x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$， 可得 $3\times\frac{\pi}{12}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$， 则 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$， 又$\|\varphi\|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore k=0$，故 $\varphi=\frac{\pi}{4}$. **答案：**C	第一步　用 $3x+\varphi$ 表示出对称轴. 第二步　对比条件"对称轴为 $x=\frac{\pi}{12}$"，得关于 φ 的等式. 第三步　解出 φ 的值.

必修4

模板攻略

1. 模板解决思路

利用三角函数的周期性或对称性，可以得到关于参数的等式，将之视为参数的方程，解之可得参数的值. 需要注意的是，要注意题目中是否有带范围的量.

2. 模板解决步骤

1 第一步　将三角函数写成 $A\sin(\omega x+\varphi)+b$或$A\cos(\omega x+\varphi)+b$ 或 $A\tan(\omega x+\varphi)+b$ 的形式，将周期性或对称性用参数表示出来.

2 第二步　利用已知条件中的周期性或对称性，得到关于参数的方程(组).

3 第三步　解方程(组)，得到参数的值.

3. 典型例题

典例 1　(浙江高考)若函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)$，$x\in\mathbf{R}$(其中 $\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$)的最小正周期是 π，且 $f(0)=\sqrt{3}$，则(　　).

A. $\omega=\frac{1}{2}$，$\varphi=\frac{\pi}{6}$　　B. $\omega=\frac{1}{2}$，$\varphi=\frac{\pi}{3}$

C. $\omega=2$，$\varphi=\frac{\pi}{6}$　　D. $\omega=2$，$\varphi=\frac{\pi}{3}$

解析：$\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，$\therefore\omega=2$.又 $\because f(0)=\sqrt{3}$，$\therefore\sqrt{3}=2\sin\varphi$.　1~2

$\because|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\varphi=\frac{\pi}{3}$.　3

答案：D

典例 2　(陕西高考)函数 $f(x)=A\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)+1$ $(A>0,\omega>0)$的最大值为 3，其图象相邻两条对称轴之间的距离为$\frac{\pi}{2}$.

(1)求函数 $f(x)$的解析式；

(2)设 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2$，求 α 的值.

思路分析：求 $f(x)$的解析式即求参数 A 和 ω 的值.

凯尔微博



保持高考良好心态的七种武器(三)　武器五：听音乐——音乐可使人们被压抑的欲望释放出来，取得心理平衡，消除紧张焦虑. 武器六：登高远望——若在楼上居住，焦虑时可临窗远眺，心情可很快改善. 武器七：加强营养——要及时补充，供应大脑能量必需的蛋白质、葡萄糖、维生素等，含有这类物质的食物正确配比，可增强脑功能.

解:(1)∵函数 $f(x)$ 的最大值为 3,∴$A+1=3$,即 $A=2$,

$f(x)$ 的周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$,　①

∵函数图象的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$,

∴最小正周期 $T=2\times\frac{\pi}{2}=\pi$,即 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$,　②

∴$\omega=2$,　③

∴函数 $f(x)$ 的解析式为 $y=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)+1$.

(2)∵$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+1=2$,即 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$,

∵$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,∴$-\frac{\pi}{6}<\alpha-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$,∴$\alpha-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$,∴$\alpha=\frac{\pi}{3}$.

模板演练

➡ 答案详见 P409

1. (新课标全国高考)已知 $\omega>0$,$0<\varphi<\pi$,直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 和 $x=\frac{5\pi}{4}$ 是函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 图象的两条相邻的对称轴,则 $\varphi=$(　　).

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{3\pi}{4}$

2. (福建高考)已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 最小正周期为 π,则该函数的图象(　　).

A. 关于点 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$ 对称

B. 关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称

C. 关于点 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 对称

D. 关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称

3. 若函数 $y=\cos\left(\frac{1}{k}x+\frac{\pi}{6}\right)(k\in(0,+\infty))$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{3}$,则实数 $k=$(　　).

A. $\frac{1}{12}$　　B. $\frac{1}{6}$

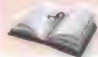
C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

4. (江苏高考)$f(x)=\cos\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$ 最小正周期为 $\frac{\pi}{5}$,其中 $\omega>0$,则 $\omega=$______.

5. 为了使函数 $y=\sin\omega x(\omega>0)$ 在区间 $[0,1]$ 上至少出现 50 次最大值,求 ω 的最小值.

6. 已知函数 $f(x)=3\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$ 和函数 $g(x)=2\cos(2x+\varphi)+1$ 的图象的对称轴完全相同,且 $\varphi\in[0,\pi]$,求 φ 的值.

中国数学界的伯乐——熊庆来(一)　人们在赞美千里马时,总会记起识马的伯乐.中国科学界在赞美华罗庚时,也不会忘记他的老师、中国近代数学的先驱——熊庆来.熊庆来,字迪之,云南弥勒人,18 岁考入云南省高等学堂,20 岁赴比利时学采矿,后到法国留学,并获博士学位.他主要从事函数论方面的研究,定义了一个"无穷级函数",国际称为"熊氏无穷级数".



模板 9　利用周期性求函数值【5年11考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(山东高考)定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+6)=f(x)$. 当 $-3\leqslant x<-1$ 时, $f(x)=-(x+2)^2$; 当 $-1\leqslant x<3$ 时, $f(x)=x$. 则 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\,012)=($　　$)$. A. 335　　B. 338　　C. 1 678　　D. 2 012	本模板解决的是"已知周期函数在某周期上满足条件 p, 求 $f(x_0)$ 的值"的问题.
解析: 由 $f(x+6)=f(x)$ 可知, 函数 $f(x)$ 的周期为 6, 所以 $f(-3)=f(3)=-1, f(-2)=f(4)=0, f(-1)=f(5)=-1$, $f(0)=f(6)=0, f(1)=1, f(2)=2$, 所以在一个周期内有 $f(1)+f(2)+\cdots+f(6)=1+2-1+0-1+0=1$, 所以 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2\,012)=f(1)+f(2)+335\times1=1+2+335=338$, 故选 B. **答案**: B	第一步　确定 $f(x)$ 的周期和一个周期内的解析式. 第二步　求出 $f(1), f(2), \cdots, f(6)$ 的值. 第三步　求出 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2012)$ 的值.

模板攻略

1. 模板解决思路

关于周期性的求函数值的问题, 条件中一般已知某个周期上的解析式或某些特殊的函数值, 解决要求的函数值的关键是利用周期性建立所求与已知的联系.

2. 模板解决步骤

1 第一步　求出 $f(x)$ 的周期和在一个周期 T 内的解析式.

2 第二步　利用周期性, 寻找 $\alpha\in T$, 使 $f(x_0)=f(\alpha)$.

3 第三步　求出 $f(\alpha)$ 的值, 即 $f(x_0)$ 的值.

3. 典型例题

典例 1　(四川高考)设定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\cdot f(x+2)=13$. 若 $f(1)=2$, 则 $f(99)=($　　$)$.

A. 13　　B. 2　　C. $\frac{13}{2}$　　D. $\frac{2}{13}$

解析: 由 $f(x)\cdot f(x+2)=13$, 得 $f(x+2)=\frac{13}{f(x)}$, $f(x+4)=f[(x+2)+2]=\frac{13}{f(x+2)}=f(x)$, 即 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数,　1

而 $4\times25-1=99$,　2

因此 $f(99)=f(-1)=\frac{13}{f(1)}=\frac{13}{2}$.　3

答案: C

典例 2　已知 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数, $g(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数, 且 $g(x)=f(x-1)$, 则 $f(2\,013)+f(2\,015)$ 的值为(　　).

A. -1　　B. 1　　C. 0　　D. 无法计算

解析: 由题意, 得 $g(-x)=f(-x-1)$, 因为 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的偶函数, $g(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数, 所以 $g(-x)=-g(x), f(-x)=f(x)$. 所以 $f(x-1)=-f(x+1)$.

所以 $f(x)=-f(x+2)$. 所以 $f(x)=f(x+4)$.

所以 $f(x)$ 的周期为 4.　1

所以 $f(2\,013)=f(1), f(2\,015)=f(3)=f(-1)$. 因为 $f(1)=f(-1)=g(0)=0$,　2

所以 $f(2\,013)+f(2\,015)=0$.　3

答案: C

中国数学界的伯乐——熊庆来(二)　熊庆来热爱教育事业, 为培养中国的科学价值规律, 做出了卓越的贡献. 1930 年, 他在清华大学当数学系主任时, 从学术杂志上发现了华罗庚的名字, 了解到华罗庚的自学经历和数学才华以后, 毅然打破常规, 请只有初中文化程度的 19 岁的华罗庚到清华大学. 在熊庆来的培养下, 华罗庚后来成为著名的数学家.

知识要点

1. 周期函数和最小正周期

对于函数$f(x)$，如果存在一个非零常数T，使得当x取定义域内的每一个值时，都有$f(x+T)=f(x)$，那么函数$f(x)$就叫作周期函数，非零常数T叫作这个函数的周期.

如果在周期函数$f(x)$的所有周期中存在一个最小的正数，那么这个最小正数就叫作$f(x)$的最小正周期.

不是所有的周期函数都有最小正周期. 例如，常数函数就不存在最小正周期.

2. 常见的周期函数的条件

(1)若函数$f(x)$满足$f(x+a)=f(x-a)$，则$2a$是$f(x)$的一个周期.

(2)若函数$f(x)$满足$f(x+a)=-f(x)$，则$2a$是$f(x)$的一个周期.

(3)若函数$f(x)$满足$f(x+a)=\frac{1}{f(x)}$，则$2a$是$f(x)$的一个周期.

(4)若函数$f(x)$满足$f(x+a)=-\frac{1}{f(x)}$，则$2a$是$f(x)$的一个周期.

(5)若函数$f(x)$关于直线$x=a$和直线$x=b$对称，则函数$f(x)$必为周期函数，$2|a-b|$是它的一个周期.

(6)若函数$f(x)$关于点$(a,0)$和点$(b,0)$对称，则函数$f(x)$必为周期函数，$2|a-b|$是它的一个周期.

(7)若函数$f(x)$关于点(a,c)和直线$x=b$对称，则函数$f(x)$必为周期函数，$4|a-b|$是它的一个周期.

模板演练

➡ 答案详见 P410

1. (全国高考)设$f(x)$是周期为2的奇函数，当$0\leq x\leq 1$时，$f(x)=2x(1-x)$，则$f\left(-\frac{5}{2}\right)=$(　　)

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

2. $f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，且对任意$x\in\mathbf{R}$，总有$f(x+2)=-f(x)$成立，则$f(19)=$

A. 0　　B. 1　　C. 18　　D. 19

3. 已知$f(x)$在$\mathbf{R}$上是奇函数，且满足$f(x+4)=f(x)$，当$x\in(0,2)$时，$f(x)=2x^2$，则$f(2\,015)=$(　　).

A. -2　　B. 2　　C. -98　　D. 98

4. 已知定义在$\mathbf{R}$上的奇函数$f(x)$满足$f(x-4)=-f(x)$，且在区间$[0,2]$上是增函数，则(　　).

A. $f(-25)<f(11)<f(80)$

B. $f(80)<f(11)<f(-25)$

C. $f(11)<f(80)<f(-25)$

D. $f(-25)<f(80)<f(11)$

5. 已知函数$f(x)$满足：$f(1)=\frac{1}{4}$，$4f(x)\cdot f(y)=f(x+y)+f(x-y)(x,y\in\mathbf{R})$，求$f(100)$的值.

6. 定义在$\mathbf{R}$上的函数$f(x)$满足$f(x)=\begin{cases}\log_2(1-x),x\leq 0,\\ f(x-1)-f(x-2),x>0,\end{cases}$求$f(2\,015)$的值.

中国数学界的伯乐——熊庆来(三)　我国许多著名的科学家都是他的学生. 熊庆来在70多岁高龄时虽半身不遂，还抱病指导两个研究生，他们就是青年数学家杨乐和张广厚. 熊庆来爱惜和培养人才的高尚品格，深受人们的赞扬和敬佩. 早在1921年，他在东南大学(南京大学前身)当教授时，发现一个叫刘光的学生很有才华，经常指点他读书、研究.



模板 10　由函数变换求参数 [5年16考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(新课标全国高考)函数 $y=\cos(2x+\varphi)(-\pi\leqslant\varphi<\pi)$的图象向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位后,与函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的图象重合,则 $\varphi=$_______.	本模板解决的是"已知三角函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$ 或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)+b$ 或 $y=A\tan(\omega x+\varphi)+b$ 经过某些变换后满足条件 p,求参数的取值范围"的问题.
解析:将 $y=\cos(2x+\varphi)$的图象向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位后得到 $y=\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\varphi\right]$的图象,化简得 $y=-\cos(2x+\varphi)$,又可变形为 $y=\sin\left(2x+\varphi-\frac{\pi}{2}\right)$. 由题意可知 $\varphi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,所以 $\varphi=\frac{5\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,结合$-\pi\leqslant\varphi<\pi$知 $\varphi=\frac{5\pi}{6}$. **答案:**$\frac{5\pi}{6}$	第一步　求出变换后的解析式. 第二步　根据图象重合得关于参数 φ 的方程. 第三步　求出方程的解,即参数 φ 的值.

必修4

模板攻略

1. 模板解决思路

解决此类问题的关键是搞清楚函数变换对应的解析式的变化. 利用变换后的解析式与条件对照后得到关于参数的方程(组)或不等式(组),解之可得参数的值或取值范围.

2. 模板解决步骤

1 第一步　求出变换后的三角函数.

2 第二步　利用条件 p,得到关于参数的方程(组)或不等式(组).

3 第三步　解方程(组)或不等式(组),得到参数的值或取值范围.

3. 典型例题

典例 1　(天津高考)将函数 $f(x)=\sin\omega x$(其中 $\omega>0$)的图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位长度,所得图象经过点$\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$,则 ω 的最小值是(　　).

A. $\frac{1}{3}$　　B. 1　　C. $\frac{5}{3}$　　D. 2

解析:根据题意平移后函数的解析式为

$y=\sin\left[\omega\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$,　1

将$\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$代入得 $\sin\frac{\omega\pi}{2}=0$,　2

则 $\omega=2k,k\in\mathbf{Z}$,且 $\omega>0$,

故 ω 的最小值为 2.　3

答案:D

典例 2　(福建高考)将函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$的图象向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位,若所得图象与原图象重合,则 ω 的值不可能等于(　　).

凯尔微博



中国数学界的伯乐——熊庆来(四)　后来又和一位教过刘光的教授,共同资助家境贫寒的刘光出国深造,并且按时给他寄生活费. 有一次,熊庆来甚至卖掉自己身上穿的皮袍子,给刘光寄钱. 刘光成为著名物理学家后,经常满怀热情地提起这段往事,他说:"教授为我卖皮袍子的事,十年之后才听到,当时,我感动得热泪盈眶. 这件事对我是刻骨铭心的,永生不能忘怀!"

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 12

思路分析:向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位,所得图象与原图象重合,即$\frac{\pi}{2}$是$f(x)$的周期(不一定是最小正周期).

解析:将$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$的图象向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位,若与原图象重合,

则$\frac{\pi}{2}$为函数$f(x)$的周期的整数倍,不妨设$\frac{\pi}{2}=k\cdot\frac{2\pi}{|\omega|}(k\in\mathbf{Z})$,　1~2

得$|\omega|=4k$,即ω为4的倍数,故选项B不可能.　3

答案:B

知识要点

1. 函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$的图象

(1)φ对$y=\sin(x+\varphi),x\in\mathbf{R}$的图象的影响

$y=\sin(x+\varphi)$(其中$\varphi\neq0$)的图象,可以看作是把正弦曲线上所有的点向左(当$\varphi>0$时)或向右(当$\varphi<0$时)平行移动$|\varphi|$个单位长度而得到.

(2)$\omega(\omega>0)$对$y=\sin(\omega x+\varphi)$的图象的影响

函数$y=\sin(\omega x+\varphi)$的图象,可以看作是把$y=\sin(x+\varphi)$的图象上所有点的横坐标缩短(当$\omega>1$时)或伸长(当$0<\omega<1$时)到原来的$\frac{1}{\omega}$倍(纵坐标不变)而得到.

(3)$A(A>0)$对$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象的影响

函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象,可以看作是把$y=\sin(\omega x+\varphi)$上所有点的纵坐标伸长(当$A>1$时)或缩短(当$0<A<1$时)到原来的$A$倍(横坐标不变)而得到.

(4)b对$y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$的图象的影响

函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$的图象,可以看作是把$y=A\sin(\omega x+\varphi)$上所有点向上(当$b>0$时)或向下(当$b<0$时)平行移动$|b|$个单位而得到.

2. $y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$(其中$A>0,\omega>0$)的图象的基本变换

(1)先平移后伸缩

$y=\sin x\xrightarrow[\text{平移}|\varphi|\text{个单位长度}]{\text{向左}(\varphi>0)\text{或向右}(\varphi<0)}y=\sin(x+\varphi)$

$\xrightarrow[\text{到原来的}\frac{1}{\omega}\text{倍(纵坐标不变)}]{\text{横坐标伸长}(0<\omega<1)\text{或缩短}(\omega>1)}y=\sin(\omega x+\varphi)$

$\xrightarrow[\text{为原来的}A\text{倍(横坐标不变)}]{\text{纵坐标伸长}(A>1)\text{或缩短}(0<A<1)}y=A\sin(\omega x+\varphi)$

$\xrightarrow[\text{平移}|b|\text{个单位长度}]{\text{向上}(b>0)\text{或向下}(b<0)}y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$

(2)先伸缩后平移

$y=\sin x\xrightarrow[\text{到原来的}\frac{1}{\omega}\text{倍(纵坐标不变)}]{\text{横坐标伸长}(0<\omega<1)\text{或缩短}(\omega>1)}y=\sin\omega x$

$\xrightarrow[\text{平移}\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|\text{个单位长度}]{\text{向左}(\varphi>0)\text{或向右}(\varphi<0)}y=\sin(\omega x+\varphi)$

$\xrightarrow[\text{为原来的}A\text{倍(横坐标不变)}]{\text{纵坐标伸长}(A>1)\text{或缩短}(0<A<1)}y=A\sin(\omega x+\varphi)$

$\xrightarrow[\text{平移}|b|\text{个单位长度}]{\text{向上}(b>0)\text{或向下}(b<0)}y=A\sin(\omega x+\varphi)+b$

模板演练

➡ 答案详见P411

1. (福建高考)将函数$f(x)=\sin(2x+\theta)\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$的图象向右平移$\varphi(\varphi>0)$个单位长度后得到函数$g(x)$的图象,若$f(x),g(x)$的图象都经过点$P\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,则$\varphi$的值可以是(　　).

A. $\frac{5\pi}{3}$　　B. $\frac{5\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\pi}{6}$

2. (辽宁高考)设$\omega>0$,函数$y=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)+2$的图象向右平移$\frac{4\pi}{3}$个单位后与原图象重合,则$\omega$

希尔伯特(一)　希尔伯特,德国数学家,生于柯尼斯堡,卒于格丁根.1880年入柯尼斯堡大学,1885年获博士学位.1893年任柯尼斯堡大学教授.1895年任格丁根大学教授,直到退休.自1902年起,一直是德国《数学年刊》的主编之一.希尔伯特是20世纪最伟大的数学家之一.他的数学贡献是巨大的和多方面的.

的最小值是(　　).

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 3

3. (湖南高考)将函数 $y=\sin x$ 的图象向左平移 φ $(0\leqslant\varphi<2\pi)$ 个单位后,得到函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象,则 φ 等于(　　).

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{5\pi}{6}$　　C. $\frac{7\pi}{6}$　　D. $\frac{11\pi}{6}$

4. (全国高考)若将函数 $y=\tan\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后,与函数 $y=\tan\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象重合,则 ω 的最小值为(　　).

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

5. (天津高考)已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(x\in\mathbf{R},\omega>0)$ 的最小正周期为 π,为了得到函数 $g(x)=\cos\omega x$ 的图象,只要将 $y=f(x)$ 的图象(　　).

A. 向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度

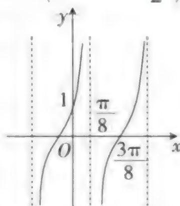
B. 向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度

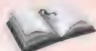
C. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

D. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

模板 11　由函数图象求解析式 [5年10考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(辽宁高考)已知函数 $f(x)=A\tan(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,\lvert\varphi\rvert<\frac{\pi}{2}\right)$, $y=f(x)$ 的部分图象如图所示,则 $f\left(\frac{\pi}{24}\right)=$(　　).  A. $2+\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $2-\sqrt{3}$	本模板解决的是“已知 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+b$, $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)+b$ 或 $f(x)=A\tan(\omega x+\varphi)+b$ 的图象,求 $f(x)$ 的解析式”的问题. 也可以在求出解析式之后求一些特殊点的值等其他问题.
解析: 由图形知, $T=\frac{\pi}{\omega}=2\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\pi}{2}$, $\therefore\omega=2$. 由 $2\times\frac{3\pi}{8}+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$, $\lvert\varphi\rvert<\frac{\pi}{2}$, 知 $\varphi=\frac{\pi}{4}$, 由 $A\tan\left(2\times0+\frac{\pi}{4}\right)=1$, 知 $A=1$, $\therefore f(x)=\tan\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$, $\therefore f\left(\frac{\pi}{24}\right)=\tan\left(2\times\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$. **答案:** B	第一步　求出 ω. 第二步　求出 φ. 第三步　求出 A. 第四步　将 $x=\frac{\pi}{24}$ 代入 $f(x)$ 的解析式,求出 $f\left(\frac{\pi}{24}\right)$.



凯尔微博

希尔伯特(二)　他解决了代数不变式问题,采用直接的、非算法的方法,证明了不变式系的有限整基的存在定理. 1898 年,他在论文《相对阿贝尔域理论》中概括地提出了类域论,后经高木贞治、阿廷等人发展成一门完整的学科. 1899 年,希尔伯特出版《几何基础》一书,其中第一次给出了完备的欧几里得几何公理体系,奠定了现代公理化方法的基础.

模板攻略

1. 模板解决思路

求解析式就是求其中参数 A,ω,φ,b 的值,根据各参数的几何意义,结合图象,先后求出各参数的值即可,一般先求 A,b,然后求 ω,最后求 φ.

2. 模板解决步骤

1 第一步 求 A,b. 先确定函数的最大值 M 和最小值 m,则 $A=\frac{M-m}{2}$, $b=\frac{M+m}{2}$.

2 第二步 求 ω. 相邻的最高点与最低点之间的距离为 $\frac{T}{2}$;相邻的两个最高点(或最低点)之间的距离为 T,再根据 $T=\frac{2\pi}{\omega}$,确定 ω.

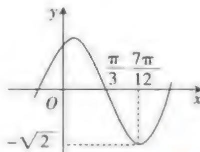
3 第三步 求 φ. 常用的方法有:

a. 代入法:把图象上的一个已知点代入(此时 A,ω,b 已知)或代入图象与直线 $y=b$ 的交点求解(此时要注意交点在增区间上还是在减区间上).

b. 五点法:确定 φ 值时,往往以寻找"五点法"中的一个点为突破口."第一点"(即图象上升时与 x 轴的交点)时 $\omega x+\varphi=0$;"第二点"(即图象的"峰点")时 $\omega x+\varphi=\frac{\pi}{2}$;"第三点"(即图象下降时与 x 轴的交点)时 $\omega x+\varphi=\pi$;"第四点"(即图象的"谷点")时 $\omega x+\varphi=\frac{3\pi}{2}$;"第五点"时 $\omega x+\varphi=2\pi$. 另外,要特别注意已知条件中所给的 φ 的范围.

3. 典型例题

典例 1 (江苏高考)函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$($A,\omega,\varphi$ 为常数,$A>0,\omega>0$)的部分图象如图所示,则 $f(0)$ 的值是 ________.



解析: 根据图象可知 $A=\sqrt{2}$, 1

又 $\frac{T}{4}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}$,所以周期 $T=\pi$,$\omega=\frac{2\pi}{T}=2$. 2

又因为函数图象过最低点 $\left(\frac{7\pi}{12},-\sqrt{2}\right)$, 可知 $2\times\frac{7\pi}{12}+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

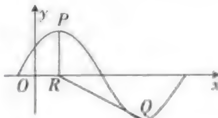
解得 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,令 $k=0$ 得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,

所以解析式为 $f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$, 3

所以 $f(0)=\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

答案: $\frac{\sqrt{6}}{2}$

典例 2 (浙江高考)已知函数 $f(x)=A\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\varphi\right)$,$x\in\mathbf{R}$,$A>0$,$0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,$y=f(x)$ 的部分图象如图所示,P,Q 分别为该图象的最高点和最低点,点 P 的坐标为 $(1,A)$.



(1)求 $f(x)$ 的最小正周期及 φ 的值.

(2)若点 R 的坐标为 $(1,0)$,$\angle PRQ=\frac{2\pi}{3}$,求 A 的值.

思路分析:(1)利用点 $P(1,A)$ 在图象上可求出 φ.

(2)$\angle PRQ=\frac{2\pi}{3}$ 意味着直线 RQ 的倾斜角可求. 即点 Q 的坐标可用 A 表示出来,代入函数可得 A.

解:(1)由题意得 $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}}=6$.

因为 $P(1,A)$ 在 $y=A\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\varphi\right)$ 的图象上,

所以 $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=1$.

又因为 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$. 1~2

(2)设点 $Q(x_0,-A)$. 由题意可知 $x_0=1+\frac{T}{2}=1+3=4$,

所以 $Q(4,-A)$.

由题意知 $PR\perp x$ 轴,$\angle PRQ=\frac{2\pi}{3}$,所以直线 RQ 的倾斜角为 $\frac{5\pi}{6}$,

直线 RQ 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-1)$,将 $Q(4,-A)$ 代入得:$-A=-\frac{\sqrt{3}}{3}(4-1)$,$A=\sqrt{3}$. 3

必修4

希尔伯特(三) 希尔伯特用对角线方法证明了狄利克雷原理,丰富了变分法的经典理论. 希尔伯特对积分方程及无穷维空间理论也有深入的工作,建立了所谓的希尔伯特空间理论. 1909 年,他证明了数论中的华林猜想. 1912—1922 年,希尔伯特曾专注于理论物理领域,其目标是用公理化方法整理近代物理的重要部分,获得很多成果.

凯尔微博


知识要点

函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的物理意义

物理学中，简谐运动的图象所对应的函数解析式有如下形式：

$y=A\sin(\omega x+\varphi),x\in[0,+\infty)$，其中 $A>0,\omega>0$.

A 就是这个简谐运动的振幅，它是做简谐运动的物体离开平衡位置的最大距离；

这个简谐运动的周期是 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，这是做简谐运动的物体往复运动一次所需要的时间；

这个简谐运动的频率由公式 $f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$ 给出，它是做简谐运动的物体在单位时间内往复运动的次数；

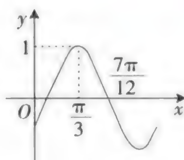
$\omega x+\varphi$ 称为相位；

$x=0$ 时的相位 φ 称为初相.

模板演练

➡ 答案详见 P411

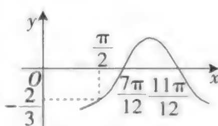
1. (重庆高考)已知函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则(　　).



A. $\omega=1,\varphi=\frac{\pi}{6}$　　B. $\omega=1,\varphi=-\frac{\pi}{6}$

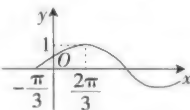
C. $\omega=2,\varphi=\frac{\pi}{6}$　　D. $\omega=2,\varphi=-\frac{\pi}{6}$

2. (辽宁高考)已知函数 $f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)$ 的图象如图所示，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{3}$，则 $f(0)=$(　　).



A. $-\frac{2}{3}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

3. 若函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象如图所示，则 ω 和 φ 的取值可以是(　　).



A. $\omega=1,\varphi=\frac{\pi}{3}$　　B. $\omega=1,\varphi=-\frac{\pi}{3}$

C. $\omega=\frac{1}{2},\varphi=\frac{\pi}{6}$　　D. $\omega=\frac{1}{2},\varphi=-\frac{\pi}{6}$

4. 若函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi),x\in\mathbf{R}\left(其中\ \omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小正周期是 π，且 $f(0)=\sqrt{3}$，则 $f(x)$ 取得最大值时 x 的取值集合为(　　).

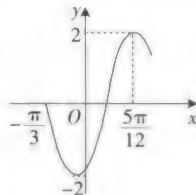
A. $\left\{x\middle|x=k\pi-\frac{5\pi}{12},k\in\mathbf{Z}\right\}$

B. $\left\{x\middle|x=2k\pi+\frac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}\right\}$

C. $\left\{x\middle|x=2k\pi-\frac{5\pi}{12},k\in\mathbf{Z}\right\}$

D. $\left\{x\middle|x=k\pi+\frac{\pi}{12},k\in\mathbf{Z}\right\}$

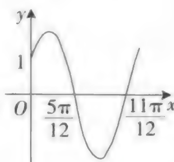
5. (四川高考)函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示，则 ω,φ 的值分别是(　　).



A. $2,-\frac{\pi}{3}$　　B. $2,-\frac{\pi}{6}$

C. $4,-\frac{\pi}{6}$　　D. $4,\frac{\pi}{3}$

6. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(x\in\mathbf{R},\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如图所示. 则函数 $f(x)$ 的解析式为________.



必修4

希尔伯特(四)　1918 年以后，希尔伯特发展了早期关于几何基础的工作，其主要思想被概括为所谓"形式主义计划". 1918 年以后，他提出了证明论(或称元数学)，成为数理逻辑五大主要部分之一. 这方面的代表作是与伯奈斯合著的《数学基础》. 1900 年，希尔伯特在巴黎举行的国际数学家大会上发表演说，提出了 20 世纪数学面临的 23 个问题.



模板 12　三角函数模型的应用

模板探究

母题呈现	模板引入
已知直径为 20cm 的滑轮每秒钟旋转 45°，则滑轮上一点经过 5 秒钟转过的弧长是 ______cm.	本模板解决的是“用与三角函数相关的知识解决实际问题”的问题.
解析：滑轮5秒钟转过的角度的大小为$45°\times5=225°=\frac{5\pi}{4}$，故转过的弧长为$\frac{5\pi}{4}\times10=\frac{25}{2}\pi$. **答案**：$\frac{25}{2}\pi$	第一步　阅读理解，弄清题意. 第二步　计算转过的角度. 第三步　代入弧长公式，求出结果. 第四步　将结果转化为实际问题的答案.

模板攻略

1. 模板解决思路

同用其他函数解决实际问题一样. 三角函数模型的应用也是以三角函数的知识为桥梁，先将实际问题转化为三角函数相关问题，然后用三角函数的知识求出结果后，再将结果转化为实际问题的结果.

2. 模板解决步骤

1 第一步　阅读理解，审清题意.

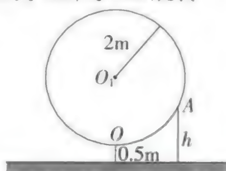
2 第二步　建立函数模型，将实际问题转化为数学问题.

3 第三步　利用三角函数相关知识，求得数学问题的解.

4 第四步　将数学问题的解转化成实际问题的答案.

3. 典型例题

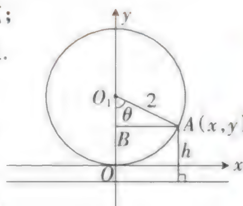
典例　如图，某大风车的半径为 2m，每 12s 旋转一周，它的最低点 O 离地面 0.5m. 风车圆周上一点 A 从最低点 O 开始，运动 t(s) 后与地面的距离为 h(m).



(1)求函数 $h=f(t)$ 的关系式；

(2)画出函数 $h=f(t)$ 的图象.

解：(1)如图，以 O 为原点，过点 O 的圆的切线为 x 轴，建立平面直角坐标系. 1



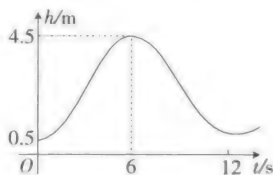
设点 A 的坐标为 (x,y)，则 $h=y+0.5$.

设 $\angle OO_1A=\theta$，则 $\cos\theta=\frac{2-y}{2}$，$y=-2\cos\theta+2$. 2

又 $\theta=\frac{2\pi}{12}\times t$，即 $\theta=\frac{\pi t}{6}$，所以 $y=-2\cos\frac{\pi t}{6}+2$，

$h=f(t)=-2\cos\frac{\pi}{6}t+2.5$. 3

(2)函数 $h=-2\cos\frac{\pi}{6}t+2.5$ 的图象如下图所示. 4



希尔伯特(五)　对这些问题的研究有力地推动了 20 世纪数学发展的进程. 希尔伯特还是一位出色的教师，讲课富有魅力，体现了重视基础和技巧的特点. 希尔伯特为人正直，受到普遍的尊敬. 他曾拒绝在德国政府为发动第一次世界大战辩护的宣言上签名，后来又对希特勒的排犹暴行表示了极大愤慨.



知识要点

1. 解答三角函数应用问题的基本步骤

(1)审题

审题是解题的基础,它包括阅读理解、翻译、挖掘等,通过阅读,真正理解实际问题的类型、思想内涵、问题的实质,有些问题中采用即时定义解释某些概念或专业术语,要仔细阅读,准确把握,同时,在阅读过程中,注意挖掘一些隐含条件.

(2)建模

在细心阅读与深入理解题意的基础上,引进数学符号,将题中的非数学语言转化为数学语言,然后根据题意,列出数量关系——建立三角函数模型.这时要注意三角函数的定义域应符合实际问题要求,这样便将实际问题转化成了纯数学问题.

(3)解模

运用三角函数的有关知识进行推理、运算,使问题得到解决.

(4)还原评价

应用问题不是单纯的数学问题,既要符合数学科学,又要符合实际背景,因此,对于解出的结果要代入原问题中进行检验、评价.

2. 三角函数模型常见的类型

(1)根据图象建立解析式或根据解析式作出图象;

(2)将实际问题抽象为与三角函数有关的简单函数模型;

(3)利用收集到的数据作出散点图,并根据散点图进行函数拟合,得到函数模型并求解.

模板演练

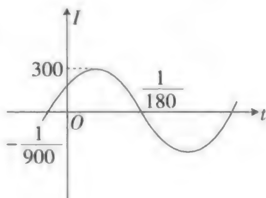
➡ 答案详见 P412

1. 某动物种群数量 1 月 1 日低至 700,7 月 1 日高至 900,其总量在此两值之间依正弦曲线变化.

(1)画出种群数量关于时间变化的图象;

(2)求出种群数量关于时间 t 的函数表达式.(其中 t 以年初以来的月为计量单位)

2. 已知电流 I 与时间 t 的关系式为 $I=A\sin(\omega t+\varphi)(A>0,\omega>0)$. 如图是在一个周期内的图象,根据图中数据求:



(1)$I=A\sin(\omega t+\varphi)$的解析式;

(2)如果 t 在任意一段 $\frac{1}{150}$ 秒的时间内,电流 $I=A\sin(\omega t+\varphi)$都能取得最大值和最小值,那么 ω 的最小正整数值是多少?

凯尔微博



希尔伯特(六) 希尔伯特的学派在纳粹统治时期遭到了严重迫害.由于希尔伯特和 G. F. 克莱因的努力,使格丁根在 20 世纪初 30 年间成了国际数学研究与教育的中心.希尔伯特生前享有很高的国际声誉,1910 年荣获匈牙利科学院的波尔约数学奖.他是许多国家科学院的院士或荣誉院士.希尔伯特的主要论文收在 3 卷《论文集》中.

第二章 平面向量

模板 1 用已知向量表示其他向量【5年13考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(全国高考)$\triangle ABC$中,点D在边AB上,CD平分$\angle ACB$.若$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$,$\lvert\boldsymbol{a}\rvert=1$,$\lvert\boldsymbol{b}\rvert=2$,则$\overrightarrow{CD}=$(　　). A. $\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$　B. $\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$ C. $\frac{3}{5}\boldsymbol{a}+\frac{4}{5}\boldsymbol{b}$　D. $\frac{4}{5}\boldsymbol{a}+\frac{3}{5}\boldsymbol{b}$	本模板解决的是"在一个平面图形中,已知一些向量和数量关系,求用已知向量表示某未知向量"的问题.
解析:如图所示,$\angle 1=\angle 2$, C a b 1 2 B D A $\therefore \frac{\lvert\overrightarrow{CB}\rvert}{\lvert\overrightarrow{CA}\rvert}=\frac{\lvert\overrightarrow{BD}\rvert}{\lvert\overrightarrow{DA}\rvert}=\frac{1}{2}$, $\therefore \overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB})=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$, $\therefore \overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$. **答案:**B	第一步　用$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$表示$\overrightarrow{BD}$. 第二步　用$\boldsymbol{a}$和$\overrightarrow{BD}$表示$\overrightarrow{CD}$. 第三步　化简、求出结果.

模板攻略

1. 模板解决思路

根据平面向量基本定理,平面内的任一向量都可由两个不共线的向量线性表示,且表示方法唯一. 因此,将未知向量用已知向量表示的关键是一步步寻找向量之间的关系.

2. 模板解决步骤

1 第一步　将题目中与已知向量直接相关的量表示出来.

2 第二步　将所求量用已知量或与已知量相关的量表示出来.

3 第三步　化简,得出结果.

3. 典型例题

典例 1　(广东高考)在平行四边形$ABCD$中,AC与BD交于点O,E是线段OD的中点,AE的延长线与CD交于点F,若$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{AF}=$(　　).

A. $\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　B. $\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$

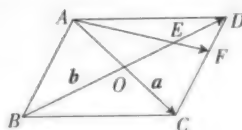
C. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$　　D. $\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$

解析:如图,在$\triangle AOE$中,$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$.　①

鬼谷算(一)　我国汉代有位大将,名叫韩信.他每次集合部队,只要求部下先后按1~3、1~5、1~7报数,然后再报告一下各队每次报数的余数,他就知道到底有多少人.他的这种巧妙算法,人们称为鬼谷算,也叫隔墙算,或称为韩信点兵,外国人还叫它为"中国剩余定理".到了明代,数学家程大位用诗歌概括了这一算法.

凯尔微博





$\because E$ 是 OD 的中点，

$\therefore \overrightarrow{OE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$.

又 $\because \triangle ABE \backsim \triangle FDE$，

$\therefore \frac{AE}{EF}=\frac{BE}{DE}=\frac{3}{1}$.

$\therefore \overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{EF}$，$\therefore \overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AF}$. ②

$\therefore \overrightarrow{AF}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$. ③

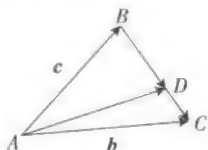
答案：B

求向量的线性表达式，可直接运用三角形法则与平行四边形法则来求，在做向量的减法时，要特别注意差向量的方向指向被减向量的终点，另外还要注意平面几何中图形的性质、定理等的应用.

典例 2 （全国高考）在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，若点 D 满足 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，则 $\overrightarrow{AD}=$（　　）.

A. $\frac{2}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$　　B. $\frac{5}{3}\boldsymbol{c}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$

C. $\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$　　D. $\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$



解析：如图，在 $\triangle ABC$ 中，

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$.

又 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，$\therefore \overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

$\because \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$， ①

$\therefore \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

$=\boldsymbol{c}+\frac{2}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\frac{2}{3}\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}\boldsymbol{c}$. ②~③

答案：A

知识要点

1. 向量的加法

求两个向量和的运算，叫作向量的加法.

2. 向量加法的三角形法则

如图，已知非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在平面内任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

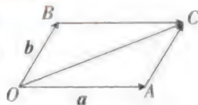


这种求向量和的方法，称为向量加法的三角形法则.

（1）向量加法的三角形法则适用于向量首尾相接的情况.

（2）向量加法的三角形法则可以推广到两个以上的非零向量相加. 特别地，$\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{B_2B_3}+\cdots+\overrightarrow{B_{n-1}B_n}+\overrightarrow{B_nB}=\overrightarrow{AB}$.

3. 向量加法的平行四边形法则



如图，以同一点 O 为起点的两个已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边作 ▱$OACB$，则以 O 为起点的对角线 $\overrightarrow{OC}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和. 把这种作两个向量和的方法叫作向量加法的平行四边形法则.

（1）当两向量不共线时，向量加法的三角形法则和平行四边形法则是一致的. 当两向量平行时，平行四边形法则不适用，但三角形法则仍然适用.

（2）对于零向量与任一向量 $\boldsymbol{a}$，规定 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$.

（3）平行四边形法则适用于向量有共同起点的情况.

4. 向量加法的运算律

（1）交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

（2）结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

凯尔微博



鬼谷算（二） 他写道：三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，七子团圆月正半，除百零五便得知. 这首诗的意思是：用3除所得的余数乘上70，加上用5除所得的余数乘上21，再加上用7除所得的余数乘上15，结果大于105就减去105的倍数，这样就知道所求的数了.

5. 相反向量

规定，与 $\boldsymbol{a}$ 长度相等，方向相反的向量，叫作 $\boldsymbol{a}$ 的相反向量，记作 $-\boldsymbol{a}$. 由于方向反转两次仍回到原来的方向，因此 $\boldsymbol{a}$ 和 $-\boldsymbol{a}$ 互为相反向量. 于是 $-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$.

规定，零向量的相反向量仍是零向量.

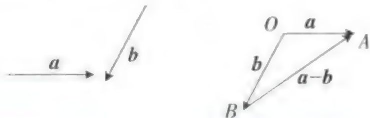
任一向量与其相反向量的和是零向量，即 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=(-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

6. 向量的减法

我们定义 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，即减去一个向量相当于加上这个向量的相反向量.

7. 向量减法的几何意义

如图，已知 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，在平面内任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 可以表示为从向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点指向向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点的向量.



特别提示

共起点，连终点，指向被减.

8. 向量的数乘

我们规定实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积是一个向量，这种运算叫作向量的数乘，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的长度与方向规定如下：

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

(2) 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反. 由(1)可知，当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

9. 向量数乘的运算律

设 λ,μ 为实数，那么：

(1) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$——结合律；

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$——第一分配律；

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$——第二分配律.

特别地，$(-\lambda)\boldsymbol{a}=-(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda(-\boldsymbol{a})$，$\lambda(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$.

10. 平面向量基本定理

如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任意向量 $\boldsymbol{a}$，有且只有一对实数 λ_1,λ_2，使 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$.

我们把不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 叫作表示这一平面内所有向量的一组基底.

必修4

模板演练

➡ 答案详见 P412

1. (辽宁高考)已知 O、A、B 是平面上的三个点，直线 AB 上有一点 C，满足 $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{0}$，则 $\overrightarrow{OC}=$ (　　).

A. $2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$　　B. $-\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}$

C. $\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$　　D. $-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

2. (安徽高考)在平行四边形 $ABCD$ 中，AC 为一条对角线，若 $\overrightarrow{AB}=(2,4)$，$\overrightarrow{AC}=(1,3)$，则 $\overrightarrow{BD}=$ (　　).

A. $(-2,-4)$　　B. $(-3,-5)$

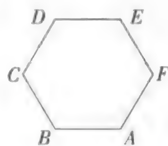
C. $(3,5)$　　D. $(2,4)$

3. (安徽高考)在平面直角坐标系中，$O(0,0)$，$P(6,8)$，将向量 $\overrightarrow{OP}$ 按逆时针旋转 $\frac{3\pi}{4}$ 后，得向量 $\overrightarrow{OQ}$，则点 Q 的坐标是(　　).

A. $(-7\sqrt{2},-\sqrt{2})$　　B. $(-7\sqrt{2},\sqrt{2})$

C. $(-4\sqrt{6},-2)$　　D. $(-4\sqrt{6},2)$

4. (四川高考)如图，正六边形 $ABCDEF$ 中，$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=$ (　　).



A. $\boldsymbol{0}$　　B. $\overrightarrow{BE}$

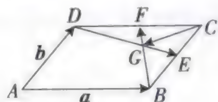
C. $\overrightarrow{AD}$　　D. $\overrightarrow{CF}$

鬼谷算(三)　比如，一篮鸡蛋，三个三个地数余 1，五个五个地数余 2，七个七个地数余 3，篮子里的鸡蛋一定是 52 个. 算式是：1×70+2×21+3×15=157，157−105=52(个). 请你根据这一算法计算下面的题目：某小学订了若干张报纸，如果三张三张地数，余数为 1 张；五张五张地数，余数为 2 张；七张七张地数，余数也为 2 张，那么该小学订了多少张报纸呢？答案：37 张.



5. 平行四边形 $OADB$ 的对角线交点为 C，$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{CN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{ON}$，$\overrightarrow{MN}$.

6. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别是 BC，DC 的中点，G 为 BF，DE 的交点，若$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 来表示$\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{BF}$，$\overrightarrow{CG}$.

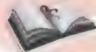


模板 2　向量的数量积运算【5年51考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(陕西高考)在△ABC 中，M 是 BC 的中点，$AM=1$，点 P 在 AM 上且满足$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PM}$，则$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$等于(　　). A. $-\frac{4}{9}$　B. $-\frac{4}{3}$　C. $\frac{4}{3}$　D. $\frac{4}{9}$	本模板解决的是“在一个平面图形中，已知满足一些向量关系，求某个数量积的运算”的问题.
解析：由 $AM=1$ 得$\overrightarrow{AM}^2=1$，又 M 是 BC 的中点，则$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=\overrightarrow{PA}\cdot 2\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AP}=-(\overrightarrow{PA})^2=-\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{MA}\right)^2=-\frac{4}{9}$. **答案：**A	第一步　由 $AM=1$ 得到$\overrightarrow{AM}^2=1$. 第二步　将$\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 转化为与$\overrightarrow{AM}$相关的运算. 第三步　代入$\overrightarrow{AM}^2=1$，得出结果.

凯尔微博



区分算法学习和程序语言的学习(一)　算法与程序语言密切相关，所设计的算法是否正确要通过编程并且运行程序进行验证，借助于程序语言可以使算法得以实现；反之，算法学习是程序语言学习的基础，程序语言的学习是算法学习的必要延续，两者相辅相成. 学习的重点在于：体现算法思想——程序思想，培养逻辑思维能力，培养思维的条理性.

模板攻略

1. 模板解决思路

平面向量的数量积的运算有两种形式:一是根据长度和夹角计算;二是利用坐标来计算.对于第一种形式,要注意确定这两个向量的夹角,若夹角不易求或者不可求,可通过选择易求夹角和模的基底进行转化.对于第二种形式,可通过建立坐标系,确定相关向量的坐标再求解.

2. 模板解决步骤

1 第一步　利用已知条件得到相关的数量积、模或夹角的关系.

2 第二步　将要求的数量积转化为已知的数量积、模或夹角的运算.

3 第三步　代入化简,求出结果.

3. 典型例题

典例 1　在 Rt△ABC 中,$\angle C=90°$,$AB=13$,$AC=12$,求$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

解:$\because\angle C=90°$,$AB=13$,$AC=12$,

$\therefore BC=5$,$\therefore\cos\angle ABC=\frac{5}{13}$.

$\because\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\rangle=\pi-\angle ABC$,

$\therefore\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\rangle=-\cos\angle ABC=-\frac{5}{13}$,　①

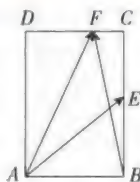
$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\rangle$　②

$=13\times5\times\left(-\frac{5}{13}\right)=-25.$　③

误区警示

在涉及有关向量夹角的计算时,要特别注意两向量的夹角的确定,必要时可画出图形,借助图形确定.

典例 2　(江苏高考)如图,在矩形 $ABCD$ 中,$AB=\sqrt{2}$,$BC=2$,点 E 为 BC 的中点,点 F 在边 CD 上,若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=\sqrt{2}$,则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}$的值是 ________.



解析:以 A 为原点,AB,AD 所在直线分别为 x 轴、y 轴建系,则$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2},0)$,设$\overrightarrow{AF}=(x,2)$,由$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}=\sqrt{2}$,　①

得 $\sqrt{2}x=\sqrt{2}$,$x=1$,则 $F(1,2)$,$\overrightarrow{AE}=(\sqrt{2},1)$,$\overrightarrow{BF}=(1-\sqrt{2},2)$,　②

$\therefore\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BF}=\sqrt{2}$.　③

答案:$\sqrt{2}$

知识要点

1. 平面向量的数量积(内积)

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,我们把数量 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 叫作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积(或内积),记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$.其中 θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,$|\boldsymbol{a}|\cos\theta$($|\boldsymbol{b}|\cos\theta$)叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上($\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上)的投影.

规定:零向量与任一向量的数量积为 0.

2. 平面向量数量积的几何意义

数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{a}$ 的长度 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$的方向上的投影 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 的乘积.

3. 平面向量数量积的性质

设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 都是非零向量,则

(1)如果 $\boldsymbol{e}$ 是单位向量,则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$.

(2)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

(3)当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$;

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

特别地,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ 或 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}$.

(4)$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$.

区分算法学习和程序语言的学习(二)　而程序语言的学习却是计算机语言的学习.学习的重点是编程,两者各有特色,互相联系,在算法学习时可以结合程序语言学习,学习时也要尽可能地把自己的算法在计算机上实现.但不可本末倒置,不要把算法内容简单处理成程序语言的学习或程序设计.



(5)$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$(当且仅当$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$时,等号成立).

特别提示

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$不能推出$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$或$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,因为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$时,有可能$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

4. 平面向量数量积的运算律

已知向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$和实数$\lambda,\mu$,则

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2)$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$;

(3)$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=\lambda\mu\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$;

(4)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$;

(5)$(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\pm2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$;

(6)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$.

特别提示

(1)一般地,$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$不成立.因为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$是一个数量,所以$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$表示一个与$\boldsymbol{c}$共线的向量,同理,右边$(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$表示一个与$\boldsymbol{a}$共线的向量,而$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{c}$不一定共线,故一般情况下,$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}\neq(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$.

(2)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0})$不能推出$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,即消去律不成立.

5. 平面向量数量积的坐标表示及运算

已知非零向量$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,则

(1)$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$;

(2)$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}$;

(3)$\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$;

(4)$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$;

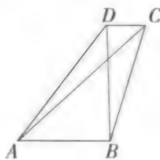
(5)$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$;

(6)如果表示向量$\boldsymbol{a}$的有向线段的起点和终点的坐标分别为$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$,则$\boldsymbol{a}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$,$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

模板演练

答案详见P413

1. (重庆高考)如图,在四边形$ABCD$中,$|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BD}|+|\overrightarrow{DC}|=4$,$|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BD}|+|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{DC}|=4$,$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DC}=0$,则$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})\cdot\overrightarrow{AC}$的值为(　　).



A. 2　　B. $2\sqrt{2}$

C. 4　　D. $4\sqrt{2}$

2. (湖北高考)设$\boldsymbol{a}=(1,-2),\boldsymbol{b}=(-3,4),\boldsymbol{c}=(3,2)$,则$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=$(　　).

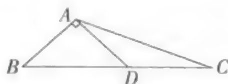
A. $(-15,12)$　　B. 0

C. -3　　D. -11

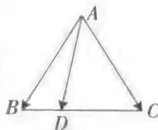
3. (天津高考)在平行四边形$ABCD$中,$\overrightarrow{AC}=(1,2)$,$\overrightarrow{BD}=(-3,2)$,则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=$_______.

4. (江西高考)直角坐标平面内三点$A(1,2),B(3,-2),C(9,7)$,若E,F为线段BC的三等分点,则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=$_______.

5. (天津高考)如图,在$\triangle ABC$中,$AD\perp AB$,$\overrightarrow{BC}=\sqrt{3}\,\overrightarrow{BD}$,$|\overrightarrow{AD}|=1$,则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=$_______.



6. (上海高考)在正三角形ABC中,D是BC上的点,若$AB=3,BD=1$,则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=$_______.





凯尔微博

中国现代数学一百年(一) 中国古代直到14世纪初叶以前,一直是数学大国,以刘徽和祖冲之为代表的中国古代数学家,曾经创造出许多领先于当时世界的数学成就.但是,从14世纪中叶以后,中国传统数学逐渐衰落了.从17世纪到19世纪,欧洲人发明以解析几何、微积分为代表的变量数学.接着创立了群论、非欧几何,使数学发展进入现代数学时期.

模板 3　求向量的坐标 [5年8考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(浙江高考)已知向量 $a=(1,2)$，$b=(2,-3)$，若向量 c 满足 $(c+a)\parallel b$，$c\perp(a+b)$，则 $c=($　　$)$. A. $\left(\frac{7}{9},\frac{7}{3}\right)$ B. $\left(-\frac{7}{3},-\frac{7}{9}\right)$ C. $\left(\frac{7}{3},\frac{7}{9}\right)$ D. $\left(-\frac{7}{9},-\frac{7}{3}\right)$	本模板解决的是"已知几个向量满足条件 p，求其中未知向量的坐标"的问题.
解析：不妨设 $c=(m,n)$， 则 $a+c=(1+m,2+n)$，由于 $(c+a)\parallel b$，则有 $-3(1+m)=2(2+n)$；又 $c\perp(a+b)$，且 $a+b=(3,-1)$，则有 $3m-n=0$， 联立得 $\begin{cases}-3(1+m)=2(2+n),\\3m-n=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-\frac{7}{9},\\n=-\frac{7}{3}.\end{cases}$ **答案**：D	第一步　设 $c=(m,n)$. 第二步　根据 $(c+a)\parallel b$ 和 $c\perp(a+b)$ 得出关于 m,n 的方程组. 第三步　解出 m,n 的值，得到 c 的坐标.

模板攻略

1. 模板解决思路

求向量的坐标，若所给条件比较简单，可先将向量用其他已知坐标的向量表示出来，然后代入坐标计算可得. 而对于所给条件较复杂的，一般是用待定系数法，先设出坐标，然后利用条件得出关于参数的方程(组)，最后解出来可得.

2. 模板解决步骤

1 第一步　设出向量的坐标.

2 第二步　根据条件 p，列出关于坐标的方程(组).

3 第三步　解方程(组)，得向量的坐标.

3. 典型例题

典例 1　(湖南高考)设向量 a,b 满足 $|a|=2\sqrt{5}$，$b=(2,1)$，且 a 与 b 的方向相反，则 a 的坐标为______.

解析：$\because a$ 与 b 方向相反，$\therefore$ 设 $a=\lambda b(\lambda<0)$，$\therefore a=\lambda(2,1)=(2\lambda,\lambda)$.　1

由 $|a|=\sqrt{5\lambda^2}=2\sqrt{5}$，　2

解得 $\lambda=-2$，或 $\lambda=2$(舍)，故 $a=(-4,-2)$.　3

答案：$(-4,-2)$

误区警示

解决平面向量基本定理与坐标表示问题时要高度关注：(1)不要遗漏零向量，零向量与任一向量平行.(2)不要混淆向量方向相同(相反)与向量共线的条件.

典例 2　(湖北高考)设 $a=(4,3)$，a 在 b 上的投影为 $\frac{5}{2}\sqrt{2}$，b 在 x 轴上的投影为 2，且 $|b|\leqslant14$，则 b 为(　　).

中国现代数学一百年(二)　中国却因明清两代改朝换代、清代的闭关政策，错过了发展近现代数学的大好机会. 近现代数学进入中国，才不过是一百年的事情. 然而从 20 世纪初叶开始，中国数学家进入现代数学研究领域以后，很快就表现出卓越的数学创造能力. 在现代数学的各个领域里，都做出了自己的贡献.

凯尔微博



A. (2,14)　B. $\left(2,-\frac{2}{7}\right)$　C. $\left(-2,\frac{2}{7}\right)$　D. (2,8)

解析:设 $\boldsymbol{b}=(m,n)$, ①

则 $\begin{cases}\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{5}{2}\sqrt{2},\\ m=2,\end{cases}$ ②

$\therefore\begin{cases}m=2,\\ n=-\frac{2}{7}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=2,\\ n=14.\end{cases}$ 又 $|\boldsymbol{b}|\leqslant 14$,

$\therefore\boldsymbol{b}=\left(2,-\frac{2}{7}\right)$,选B. ③

答案:B

知识要点

平面向量的坐标表示

向量的加、减法	若 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$,$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$. 这就是说,两个向量和(差)的坐标分别等于这两个向量相应坐标的和(差)
实数与向量的积	若 $\boldsymbol{a}=(x,y)$,$\lambda\in\mathbf{R}$,则 $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x,\lambda y)$. 这就是说,实数与向量的积的坐标等于用这个实数乘原来向量的相应坐标
向量的坐标	若 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$. 因此,一个向量的坐标等于表示此向量的有向线段的终点的坐标减去始点的坐标

特别提示

(1)相等向量的坐标相同,坐标相同的向量是相等向量.

(2)向量的坐标与表示该向量的有向线段的始点、终点的具体位置无关,只与其相对位置有关系.

(3)两向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$,$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$ 相等的充要条件是它们的对应坐标分别相等,利用向量相等可列出方程组求其中的未知量,从而解决求字母取值、求点的坐标及向量的坐标等问题.

模板演练

➔ 答案详见 P414

1. (辽宁高考)已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1)$,$\boldsymbol{b}=(2,x)$,若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$,则 $x=$(　　).

A. -1　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

2. 已知 O 为坐标原点,且点 $A(1,\sqrt{3})$,则与 $\overrightarrow{OA}$ 同向的单位向量的坐标为(　　).

A. $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　B. $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

C. $\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　D. $\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3. 与向量 $\boldsymbol{a}=(12,5)$ 共线的单位向量为(　　).

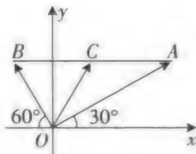
A. $\left(\frac{12}{13},\frac{5}{13}\right)$

B. $\left(-\frac{12}{13},\frac{5}{13}\right)$

C. $\left(-\frac{12}{13},-\frac{5}{13}\right)$

D. $\left(-\frac{12}{13},-\frac{5}{13}\right)$或$\left(\frac{12}{13},\frac{5}{13}\right)$

4. 如图所示,已知 $|\overrightarrow{OA}|=2$,$|\overrightarrow{OB}|=1$,AB 的中点是 C,$\overrightarrow{OC}$ 的坐标是(　　).



A. $\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{4},\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)$

B. $\left(\frac{1-2\sqrt{3}}{4},\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)$

C. $\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{4},-\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)$

D. $\left(\frac{1-2\sqrt{3}}{4},-\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)$

5. (陕西高考)已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1)$,$\boldsymbol{b}=(-1,m)$,$\boldsymbol{c}=(-1,2)$,若 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/\boldsymbol{c}$,则 $m=$______.

6. (广东高考)若平面向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=1$,$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 平行于 x 轴,$\boldsymbol{b}=(2,-1)$,则 $\boldsymbol{a}=$______.

凯尔微博



中国现代数学一百年(三) 尤其是在近20年中,许多中青年数学家走出国门,在与世界数学家的交流与搏击中,获得了举世瞩目的成就. 20世纪初年,一批留学生走出国门学习数学,他们回国后到北京大学、南开大学等,创办一批大学数学系,从事高等数学教育和现代数学研究,培养了中国自己的数学人才.

模板 4　求参数的值 [5 年 19 考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(北京高考)已知向量 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},1)$,$\boldsymbol{b}=(0,-1)$,$\boldsymbol{c}=(k,\sqrt{3})$. 若 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线,则 $k=$________.	本模板解决的是"已知几个向量满足条件 p,求其中参数的值"的问题.
解析:$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},3)$,由 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线可知 $\sqrt{3}\times\sqrt{3}-3k=0$,故 $k=1$. **答案:**1	第一步　将 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 用坐标表示出来. 第二步　利用共线得关于 k 的方程. 第三步　解出 k 的值.

模板攻略

1. 模板解决思路

求参数的值一般都是用待定系数法,先将参数视为常数,利用条件得到关于参数的方程(组),解之可得参数的值,需要注意参数的取值范围.

2. 模板解决步骤

1 第一步　将向量表示成坐标形式,写出条件 p 的坐标表示.

2 第二步　利用条件 p 的坐标表示,列出关于参数的方程(组).

3 第三步　解方程(组),得出参数的值.

3. 典型例题

典例 1　(海南高考)平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,-3)$,$\boldsymbol{b}=(4,-2)$,$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直,则 λ 等于(　　).

A. -1　　B. 1　　C. -2　　D. 2

解析:$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(\lambda+4,-3\lambda-2)$,　①

又 $(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$,$\therefore(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$,

$\therefore(\lambda+4)+3(3\lambda+2)=0$,　②

$\therefore\lambda=-1$,选 A.　③

答案:A

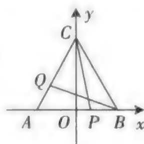
典例 2　(天津高考)已知 $\triangle ABC$ 为等边三角形,$AB=2$. 设点 P,Q 满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AQ}=(1-\lambda)\overrightarrow{AC}$. $\lambda\in\mathbf{R}$. 若 $\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{CP}=-\frac{3}{2}$,则 $\lambda=$(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1\pm\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{1\pm\sqrt{10}}{2}$　　D. $\frac{-3\pm2\sqrt{2}}{2}$

思路分析:本题是关于向量的问题,其中 $\overrightarrow{BQ}$ 和 $\overrightarrow{CP}$ 可以用 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 表示出来,也可考虑放入坐标系中解决.

解析:如图建立平面直角坐标系,



则 $A(-1,0)$,$B(1,0)$,$C(0,\sqrt{3})$,

$\overrightarrow{AB}=(2,0)$,$\overrightarrow{AC}=(1,\sqrt{3})$,

且 $\overrightarrow{AP}=(2\lambda,0)$,$\overrightarrow{AQ}=(1-\lambda,(1-\lambda)\sqrt{3})$,

即 $P(2\lambda-1,0)$,$Q(-\lambda,(1-\lambda)\sqrt{3})$.

$\therefore\overrightarrow{BQ}=(-\lambda-1,(1-\lambda)\sqrt{3})$,$\overrightarrow{CP}=(2\lambda-1,-\sqrt{3})$.　①

由 $\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{CP}=-\frac{3}{2}$,得 $(-\lambda-1)(2\lambda-1)+(1-\lambda)\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3})=-\frac{3}{2}$,即 $4\lambda^2-4\lambda+1=0$,　②

解得 $\lambda=\frac{1}{2}$.　③

答案:A

中国现代数学一百年(四)　20 世纪 20–40 年代,有更多的留学生到国外学习数学,并回国从事数学教育和研究. 1931 年,清华大学数学系招收数学研究生,标志着我国大学数学教育的水平不断提高. 1935 年,中国数学会在上海成立,中国数学家和数学工作者有了自己的学术团体;同时创办了数学学术期刊——数学学报和数学杂志.



模板演练

➡ 答案详见 P414

1. (广东高考)已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{b}=(1,0)$,$\boldsymbol{c}=(3,4)$. 若 λ 为实数,$(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})/\!/\boldsymbol{c}$,则 $\lambda=$(　　).

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

2. 已知平面向量 $\boldsymbol{a}=(1,-3)$,$\boldsymbol{b}=(4,-2)$,$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直,则实数 $\lambda=$(　　).

A. -1　　B. 1　　C. -2　　D. 2

3. 已知点 $A(8,-1)$,$B(1,-3)$,若点 $C(2m-1,m+2)$在直线 AB 上. 则实数 $m=$(　　).

A. -12　　B. 13　　C. -13　　D. 12

4. (陕西高考)已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1)$,$\boldsymbol{b}=(-1,m)$,$\boldsymbol{c}=(-1,2)$,若$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})/\!/\boldsymbol{c}$,则 $m=$______.

5. (全国高考)设向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$,$\boldsymbol{b}=(2,3)$,若向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{c}=(-4,-7)$共线,则 $\lambda=$______.

6. (江苏高考)在平面直角坐标系 xOy 中,已知点 $A(-1,-2)$,$B(2,3)$,$C(-2,-1)$.

(1)求以线段 AB,AC 为邻边的平行四边形两条对角线的长;

(2)设实数 t 满足$(\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{OC})\perp\overrightarrow{OC}$,求 t 的值.

必修4

模板 5　求两向量的夹角 [5年8考]

模板探究

母 题 呈 现	模 板 引 入
(安徽高考)已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 满足$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-6$,且 $\lvert\boldsymbol{a}\rvert=1$,$\lvert\boldsymbol{b}\rvert=2$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为______.	本模板方法解决的是"已知向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 满足条件 p,求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角"的问题.
解析: 由$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-6$ 得 $\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-6$. $\because\lvert\boldsymbol{a}\rvert=1$,$\lvert\boldsymbol{b}\rvert=2$,$\therefore 1^2-2\times2^2+1\times2\times\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-6$, $\therefore\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{1}{2}$. $\because\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$,$\therefore\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$. **答案:** $\frac{\pi}{3}$	第一步　求出$\lvert\boldsymbol{a}\rvert$,$\lvert\boldsymbol{b}\rvert$. 第二步　求出 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$. 第三步　求出$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.



中国现代数学一百年(五) 1946 年,专门的数学研究机构——数学研究所在上海成立. 中国数学家也开始走上国际数学舞台,用自己的数学研究成果,与国外数学家进行数学学术交流. 1949 年 10 月 1 日,新中国成立以后,中国的数学事业开始了新的一章.

模板攻略

1. 模板解决思路

求两向量的夹角，一般都是先求出两向量夹角的余弦，而求余弦一般是通过公式 $\cos\theta=\frac{a\cdot b}{|a||b|}$ 得到. 因此，一般是先将 $|a|$，$|b|$ 和 $a\cdot b$ 求出. 如果条件中不能得到这些，则考虑将 $a\cdot b$ 用其他向量线性表示，然后再求.

2. 模板解决步骤

1 第一步　求出 $|a|$，$|b|$ 和 $a\cdot b$.

2 第二步　代入公式，求出 $\cos\langle a,b\rangle$.

3 第三步　得到 a 与 b 之间的夹角.

3. 典型例题

典例　(湖北高考)已知向量 $a=(1,0)$，$b=(1,1)$，则

(1)与 $2a+b$ 同向的单位向量的坐标为________；

(2)向量 $b-3a$ 与向量 a 夹角的余弦值为________.

解析：(1)$\because 2a+b=(3,1)$，

$\therefore |2a+b|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$.

$\therefore$ 与 $2a+b$ 同向的单位向量为 $\frac{2a+b}{|2a+b|}$，

其坐标为 $\left(\frac{3\sqrt{10}}{10},\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$.

(2)$\because b-3a=(-2,1)$，$\therefore |b-3a|=\sqrt{5}$，$|a|=1$，

$(b-3a)\cdot a=-2\times1+1\times0=-2$，　1

$\therefore \cos\langle b-3a,a\rangle=\frac{(b-3a)\cdot a}{|b-3a||a|}=\frac{-2}{\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$.　2

答案：(1)$\left(\frac{3\sqrt{10}}{10},\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$　(2)$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

知识要点

向量的夹角

已知两个非零向量 a 和 b.

如图，作 $\overrightarrow{OA}=a$，$\overrightarrow{OB}=b$，则 $\angle AOB=\theta$ ($0°\leqslant\theta\leqslant180°$) 叫作向量 a 与 b 的夹角(通常记作 $\langle a,b\rangle$).

显然，当 $\theta=0°$ 时，a 与 b 同向；当 $\theta=180°$ 时，a 与 b 反向.

如果 a 与 b 的夹角是 $90°$，我们说 a 与 b 垂直，记作 $a\perp b$.

特别提示

求两向量的夹角时，两向量起点应相同. 例如，在 $\triangle ABC$ 中，向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角为 $\pi-\angle ABC$.

模板演练

答案详见 P414

1. 若向量 a 与 b 不共线，$a\cdot b\neq0$ 且 $c=a-\left(\frac{a\cdot a}{a\cdot b}\right)b$，则向量 a 与 c 的夹角是(　　).

A. 0　B. $\frac{\pi}{6}$　C. $\frac{\pi}{3}$　D. $\frac{\pi}{2}$

2. 已知 $|a|=1$，$|b|=6$，$a\cdot(b-a)=2$，则向量 a 与 b 的夹角是(　　).

A. $\frac{\pi}{6}$　B. $\frac{\pi}{4}$　C. $\frac{\pi}{3}$　D. $\frac{\pi}{2}$

3. (江西高考)已知 $|a|=|b|=2$，$(a+2b)\cdot(a-b)=-2$，则 a 与 b 的夹角为________.

4. (安徽高考)已知向量 a，b 满足 $(a+2b)\cdot(a+b)=6$，且 $|a|=1$，$|b|=2$，则 a 与 b 的夹角为________.

5. 已知向量 a，b，c 满足 $|a|=1$，$|b|=2$，$c=a+b$，且 $c\perp a$，则向量 a 与 b 的夹角为________.

6. 已知向量 $a=(1,2)$，$b=(1,1)$，且 a 与 $a+\lambda b$ 的夹角为钝角，且实数 λ 的取值范围为________.

中国现代数学一百年(六)　中国数学家在代数和数论、泛函与复变函数论、几何与拓扑、概率论与数理统计、微分方程与控制论、计算数学与运筹学等各个数学分支，都取得了重要成就. 特别是在哥德巴赫猜想研究方面，华罗庚和他的学生王元、潘承洞和陈景润等人始终走在世界的前列，陈景润于1966年证明的“1+2”定理(陈氏定理)仍然是目前最好的结果.



模板 6　求向量运算的最值或取值范围【5年14考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(浙江高考)若平面向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 满足 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=1$, $\|\boldsymbol{\beta}\|\leqslant 1$,且以向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为邻边的平行四边形的面积为 $\frac{1}{2}$,则 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的夹角 θ 的取值范围是______.	本模板解决的是“已知若干向量满足条件 p,求它们的某种运算后的最值或取值范围”的问题.
解析:由题意知 $S=\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|\sin\theta\leqslant\sin\theta$, 又 $S=\frac{1}{2}$,即 $\sin\theta\geqslant\frac{1}{2}$. $\because\theta\in[0,\pi]$,$\therefore\theta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$. **答案**:$\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$	第一步　表示出平行四边形的面积 S. 第二步　得到 $\sin\theta\geqslant\frac{1}{2}$,且 $\theta\in[0,\pi]$. 第三步　解出 θ 的取值范围.

模板攻略

1. 模板解决思路

求最值或取值范围必须有函数或不等式. 因此,对于题目中给出的条件,要结合要求的夹角或长度或其他量,得出相应的不等式或函数(包括自变量的范围),然后利用相关知识求出最值或取值范围.

2. 模板解决步骤

1 第一步　整理条件 p,得到与要求结果相关的式子.

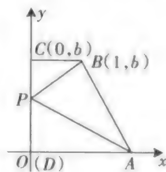
2 第二步　将式子转化成关于夹角或坐标的不等式或函数.

3 第三步　求出不等式或函数的最值或取值范围.

3. 典型例题

典例 1　(天津高考)已知直角梯形$ABCD$ 中,$AD/\!/BC$, $\angle ADC=90°$,$AD=2$,$BC=1$,P 是腰 DC 上的动点,则 $|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}|$ 的最小值为______.

思路分析:$|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}|$ 的最小值显然和P的位置有关,因此先建立平面直角坐标系,则 $|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}|$ 可表示成关于 P 点纵坐标的函数.



解析:建立平面直角坐标系如图所示.

设 $P(0,y)$,$C(0,b)$,则 $B(1,b)$,$A(2,0)$,

则$\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}=(2,-y)+3(1,b-y)=(5,3b-4y)$.　①

$\therefore|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}|^2=25+(3b-4y)^2(0\leqslant y\leqslant b)$,　②

$\therefore$ 当 $y=\frac{3}{4}b$ 时,$|\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}|$ 取最小值为 5.　③

答案:5

典例 2　(上海高考)在平行四边形 $ABCD$ 中,$\angle A=\frac{\pi}{3}$,边 AB,AD 的长分别为 2,1,若 M,N 分别是边

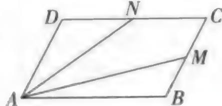


中国现代数学一百年(七)　陈省身在射影微分几何方面取得重大成就,他发现的复流型上复结构的不变量,被称为“陈省身示性类”. 他对纤维丛理论的研究,具有开创性意义,是该理论的创始人之一. 在计算数学方面,冯康等人提出的有限元方法,具有重要的理论和应用价值. 吴文俊在机器证明论方面的开创性工作,被称为“吴方法”和“吴理论”.

BC,CD 上的点，且满足 $\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{|\overrightarrow{CN}|}{|\overrightarrow{CD}|}$，则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$的取值范围是 ______.

思路分析：$\overrightarrow{AM}$和$\overrightarrow{AN}$都可以用$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AD}$表示，因此$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$可以用$\overrightarrow{AB}^2$，$\overrightarrow{AD}^2$和$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$表示，而这三个值都是常量，因此取值范围是和$\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|}$相关的.

解析：设$\frac{|\overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{BC}|}=\frac{|\overrightarrow{CN}|}{|\overrightarrow{CD}|}=\lambda$ $(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$，



则$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{DN}=(1-\lambda)\overrightarrow{DC}=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}$，

则$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN})$ ①

$=(\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AD})\cdot[\overrightarrow{AD}+(1-\lambda)\overrightarrow{AB}]$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+(1-\lambda)\overrightarrow{AB}^2+\lambda\overrightarrow{AD}^2+\lambda(1-\lambda)\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$，

又$\because\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=2\times1\times\cos\frac{\pi}{3}=1$，$\overrightarrow{AB}^2=4$，$\overrightarrow{AD}^2=1$，

$\therefore\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=-\lambda^2-2\lambda+5=-(\lambda+1)^2+6$， ②

$\because 0\leqslant\lambda\leqslant1$，$\therefore 2\leqslant\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}\leqslant5$，

即$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}$的取值范围是$[2,5]$. ③

答案：$[2,5]$

模板演练

➡ 答案详见 P415

1. (全国高考)设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是单位向量，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$的最小值为(　　).

A. -2　　B. $\sqrt{2}-2$

C. -1　　D. $1-\sqrt{2}$

2. (辽宁高考)若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 均为单位向量，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\leqslant0$，则$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|$的最大值为(　　).

A. $\sqrt{2}-1$　　B. 1

C. $\sqrt{2}$　　D. 2

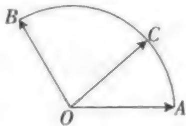
3. (湖北高考)已知向量 $\boldsymbol{a}=(x+z,3)$，$\boldsymbol{b}=(2,y-z)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 若 x,y 满足不等式$|x|+|y|\leqslant1$，则 z 的取值范围为(　　).

A. $[-2,2]$　　B. $[-2,3]$

C. $[-3,2]$　　D. $[-3,3]$

4. (浙江高考)设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 为单位向量，非零向量 $\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{e}_1+y\boldsymbol{e}_2$，$x,y\in\mathbf{R}$. 若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 的夹角为$\frac{\pi}{6}$，则$\frac{|x|}{|\boldsymbol{b}|}$的最大值等于 ______.

5. (安徽高考)给定两个长度为 1 的平面向量$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$，它们的夹角为 120°.



如图，点 C 在以 O 为圆心的圆弧$\overset{\frown}{AB}$上变动，若$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，其中 $x,y\in\mathbf{R}$，则 $x+y$ 的最大值是 ______.

6. 已知平面内有向量$\overrightarrow{OA}=(1,7)$，$\overrightarrow{OB}=(5,1)$，$\overrightarrow{OP}=(2,1)$，点$Q$为直线$OP$上的一个动点.

(1)求$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$的最小值和此时$\overrightarrow{OQ}$的坐标；

(2)当点Q满足(1)的条件和结论时，求 $\cos\angle AQB$ 的值.

阿基米德的墓碑(一)　与那些英雄们的纪念碑或墓碑相比，大概只有数学家的墓志铭最为言简意赅. 他们的墓碑上往往只是刻着一个图形或写着一个数. 这些形和数，展现着他们一生执着的追求和闪光的业绩. 古希腊数学家阿基米德的墓碑就是这样. 在他的墓碑上刻着一个圆柱，圆柱里内切着一个球，这个球的直径恰与圆柱的高相等.



模板 7　平面向量的实际应用 【5年16考】

模板探究

母题呈现	模板引入
（福建高考）在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AC}=(1,2)$，$\overrightarrow{BD}=(-4,2)$，则该四边形的面积为（　　）. A. $\sqrt{5}$　B. $2\sqrt{5}$　C. 5　D. 10	本模板解决的是"利用平面向量相关知识，解决一些平面几何或物理上的相关问题"的问题.
解析：依题意得，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=1\times(-4)+2\times2=0$. 所以$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$，所以四边形 $ABCD$ 的面积为$\frac{1}{2}\lvert\overrightarrow{AC}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{BD}\rvert=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}=5$. **答案：**C	第一步　计算$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$，得出$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$. 第二步　计算$\frac{1}{2}\lvert\overrightarrow{AC}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{BD}\rvert$. 第三步　得到四边形的面积.

模板攻略

1. 模板解决思路

同用其他数学知识解决实际问题一样，用平面向量解决实际问题，也是先将实际问题转化为数学问题，然后利用平面向量相关知识解决数学问题，最后将数学结果转化为实际问题的答案.

2. 模板解决步骤

1 第一步　用向量表示问题中的量，将实际问题转化成向量问题.

2 第二步　通过向量运算，求出向量问题的解.

3 第三步　把运算结果"翻译"成实际问题的解.

3. 典型例题

典例 1　（辽宁高考）平面上 O,A,B 三点不共线，设$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则$\triangle OAB$ 的面积等于（　　）.

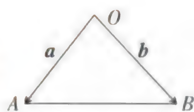
A. $\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$

B. $\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$

C. $\frac{1}{2}\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$

D. $\frac{1}{2}\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2+(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$

解析：如图，



$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$　1

$=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sqrt{1-(\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle)^2}$

$=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sqrt{1-\left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\right)^2}$

$=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sqrt{\frac{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$，故选 C.　2~3

答案：C

典例 2　（天津高考）在平行四边形 $ABCD$ 中，$AD=1$，$\angle BAD=60°$，E 为 CD 的中点. 若$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=1$，则 AB 的长为______.

解析：设$|\overrightarrow{AB}|=x$，$x>0$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}x$.　1



阿基米德的墓碑（二）　这个称为"等边圆柱"的图形，表达了阿基米德的如下发现："球的体积和表面积都等于它的外接圆柱的体积和表面积的三分之二". 据说，这块竖立于叙拉古的阿基米德的墓碑，并非他的家人和朋友所立，而是由敬畏他的敌人，即围攻叙拉古的罗马军队统帅马塞拉斯将军修建的.

又$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BE}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})$

$=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x=1$，

解得$x=\frac{1}{2}$，即AB的长为$\frac{1}{2}$.　2~3

答案：$\frac{1}{2}$

知识要点

1. 平面向量在平面几何中的应用

(1)证明线段相等、平行，常运用向量加法的三角形法则和平行四边形法则，有时也用到向量减法的定义.

(2)证明线段(直线)平行、三角形相似，常运用向量平行(共线)的条件：

$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$；若$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$.

(3)证明垂直问题，如证明四边形是矩形、正方形，判断两直线(线段)是否垂直等，常运用向量垂直的条件：

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；若$\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

(4)求与夹角相关的问题，往往利用向量的夹角公式$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$，如求三角形的面积用公式$S=\frac{1}{2}ab\sin C$时，可利用夹角公式，求出$\sin C$.

特别提示

在□$ABCD$中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，则

(1)$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|\Leftrightarrow$□$ABCD$是菱形.

(2)$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow$□$ABCD$是矩形.

2. 平面向量在物理中的应用

(1)由于物理学中的力、速度、位移都是矢量，它们的分解与合成和向量的加法与减法相似，可以用向量知识来解决.

(2)物理学中的功是一个标量，是力$\boldsymbol{F}$与位移$\boldsymbol{s}$的数量积. 即$W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=|\boldsymbol{F}||\boldsymbol{s}|\cos\theta$($\theta$为$\boldsymbol{F}$与$\boldsymbol{s}$的夹角).

模板演练

➡ 答案详见P416

1. (宁夏高考)已知点O,N,P在$\triangle ABC$所在平面内，且$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$，$\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\boldsymbol{0}$，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$，则点$O,N,P$依次是$\triangle ABC$的(　　).

A. 重心、外心、垂心　　B. 重心、外心、内心

C. 外心、重心、垂心　　D. 外心、重心、内心

2. (广东高考)一质点受到平面上的三个力$\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$(单位：牛顿)的作用而处于平衡状态. 已知$\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2$成60°角，且$\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2$的大小分别为2和4，则$\boldsymbol{F}_3$的大小为(　　).

A. 6　　B. 2　　C. $2\sqrt{5}$　　D. $2\sqrt{7}$

3. (四川高考)在集合$\{1,2,3,4,5\}$中任取一个偶数a和一个奇数b构成以原点为起点的向量$\boldsymbol{a}=(a,b)$. 从所有得到的以原点为起点的向量中任取两个向量为邻边作平行四边形. 记所有作成的平行四边形的个数为n，其中面积不超过4的平行四边形的个数为m，则$\frac{m}{n}=$(　　).

A. $\frac{4}{15}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{2}{3}$

4. 已知点$P(0,-3)$，点A在x轴上，点Q在y轴的正半轴上，点M满足$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AM}=0$，$\overrightarrow{AM}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{MQ}$，当点$A$在$x$轴上移动时，则动点$M$的轨迹方程为________.

阿基米德的墓碑(三)　当叙拉古城被马塞拉斯的军队攻破时，阿基米德正在潜心研究画在沙盘上的一个几何图形. 一个刚攻进城的罗马士兵向他逼近，而他却低着头专心致志地思考着什么，对眼前的危险茫然无知. 士兵的身影落在沙盘里的图形上，阿基米德头也不抬，挥手叫士兵离开，以免弄乱他的图形. 愤怒的士兵挥舞着长矛，一代科学巨匠就这样倒在了血泊之中.



第三章　三角恒等变换

模板 1　三角函数的给值求值问题 【5年18考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(辽宁高考)设 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{1}{3}$,则 $\sin2\theta=$(　　). A. $-\frac{7}{9}$　B. $-\frac{1}{9}$　C. $\frac{1}{9}$　D. $\frac{7}{9}$	本模板解决的是"已知 α,β 的某个三角函数值,求与 α,β 相关的 γ 的某个三角函数值"的问题.
解析:$\sin2\theta=\sin\left[2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-\frac{\pi}{2}\right]$ $=-\cos\left[2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right]$ $=-1+2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$ $=-1+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=-\frac{7}{9}$. **答案**:A	第一步　拆分角 $2\theta=2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-\frac{\pi}{2}$. 第二步　找到 $\sin2\theta$ 与 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$ 的关系. 第三步　代入 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\frac{1}{3}$,求出 $\sin2\theta$ 的值.

必修4

模板攻略

1. 模板解决思路

三角函数的给值求值问题,主要应用和角公式、差角公式、倍角公式、半角公式等将未知角的三角函数转化为已知角的三角函数. 因此,将未知角用已知角表示出来是解决此类问题的关键. 当已知角只有一个时,则应考虑将未知角用已知角和常用角表示出来.

2. 模板解决步骤

1 第一步　将 γ 表示成 $a\alpha+b\beta$ 的形式,若 γ 只与 α 相关,则可将 β 视为常见角,其中 a,b 均为整数.

2 第二步　求出 α,β 的其他三角函数值,注意角的范围.

3 第三步　代入公式,求出关于 γ 的三角函数值.

3. 典型例题

典例 1　(浙江高考)若 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$,$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$,$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1}{3}$,$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$,则 $\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)=$(　　).

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{5\sqrt{3}}{9}$　　D. $-\frac{\sqrt{6}}{9}$

思路分析:$\alpha+\frac{\beta}{2}=\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$.

解析:$\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)=\cos\left[\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\right]$　1

$=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)$.

凯尔微博


阿基米德的墓碑(四)　后来,当罗马将军马塞拉斯得知阿基米德在叙拉古陷落期间被杀的消息时,他处死了那个杀害阿基米德的凶手,为阿基米德举行了隆重的葬礼,并立碑以表钦佩和尊敬. 阿基米德不但是出色的数学家,他还是个卓有建树的物理学家. 他发现的杠杆定律和阿基米德定律,至今还记载在中学的物理课本里.

$\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，则 $\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}+\alpha<\frac{3\pi}{4}$.

又 $\because \cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1}{3}$，$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$\because -\frac{\pi}{2}<\beta<0$，则 $\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$.

又 $\because \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$. ②

故 $\cos\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$. ③

答案：C

典例 2　(江苏高考)设α为锐角，若已知$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$，则 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{12}\right)$的值为 ________.

思路分析：$2\alpha+\frac{\pi}{12}=2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{4}$. ①

解析：$\because \alpha$ 为锐角，即 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \frac{\pi}{6}<\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$.

$\because \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$，$\therefore \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{3}{5}$，

$\therefore \sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{24}{25}$.

$\therefore \cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=2\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-1=\frac{7}{25}$. ②

$\therefore \sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{4}-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{24}{25}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{7}{25}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{17\sqrt{2}}{50}$. ③

答案：$\frac{17\sqrt{2}}{50}$

知识要点

1. 两角和与差的正弦、余弦和正切公式

$C_{(\alpha+\beta)}$：$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$；

$C_{(\alpha-\beta)}$：$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$；

$S_{(\alpha+\beta)}$：$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$；

$S_{(\alpha-\beta)}$：$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$；

$T_{(\alpha+\beta)}$：$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$；

$T_{(\alpha-\beta)}$：$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$.

公式$S_{(\alpha+\beta)}$，$C_{(\alpha+\beta)}$，$T_{(\alpha+\beta)}$给出了任意角α，β的三角函数值与其和角$\alpha+\beta$的三角函数值之间的关系，把这三个公式都叫作和角公式. 类似地，$S_{(\alpha-\beta)}$，$C_{(\alpha-\beta)}$，$T_{(\alpha-\beta)}$都叫作差角公式.

2. 二倍角的正弦、余弦和正切公式

$S_{2\alpha}$：$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$；

$C_{2\alpha}$：$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$；

$T_{2\alpha}$：$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

以上这些公式都叫作倍角公式. 倍角公式给出了 α 的三角函数与 2α 的三角函数之间的关系.

特别提示

(1)$1+\sin2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$.

(2)$1-\sin2\alpha=(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$.

(3)“倍”是描述两个数量之间关系的，2α 是 α 的二倍，4α 是 2α 的二倍，$\frac{\alpha}{2}$ 是 $\frac{\alpha}{4}$ 的二倍. 这里蕴含着换元思想.

3. 半角公式

$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$；

$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$；

$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

以上称之为半角公式，符号由$\frac{\alpha}{2}$所在象限确定.

阿基米德的墓碑(五)　他还是个设计师，设计过多种机械和建筑物. 在罗马人侵犯叙拉古时，他曾应用机械技术帮助抵御侵略. 有关他的故事至今仍在流传，他将永远留在人们的记忆中，其数学思想将与他的光辉成就一起流芳百世，与世长存.



模板演练

答案详见 P417

1. (新课标全国高考)已知 $\sin2\alpha=\frac{2}{3}$,则 $\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=$(　　).

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

2. (山东高考)若 $\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$,$\sin2\theta=\frac{3\sqrt{7}}{8}$,则 $\sin\theta=$(　　).

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{4}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{7}}{4}$　　D. $\frac{3}{4}$

3. (全国高考)已知 α 为第三象限的角,$\cos 2\alpha=-\frac{3}{5}$,则 $\tan\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)=$______.

4. (全国高考)已知 α 是第二象限的角,$\tan(\pi+2\alpha)=-\frac{4}{3}$,则 $\tan\alpha=$______.

5. (广东高考)已知函数 $f(x)=2\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$(其中 $\omega>0,x\in\mathbf{R}$)的最小正周期为 10π.

(1)求 ω 的值;

(2)设 $\alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,$f\left(5\alpha+\frac{5}{3}\pi\right)=-\frac{6}{5}$,$f\left(5\beta-\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{16}{17}$,求 $\cos(\alpha+\beta)$的值.

必修4

模板 2　由三角关系式求三角函数值 【5年15考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(福建高考)若 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,且 $\sin^2\alpha+\cos2\alpha=\frac{1}{4}$,则 $\tan\alpha$ 的值等于(　　). A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　C. $\sqrt{2}$　D. $\sqrt{3}$	本模板解决的是"已知 α,β 满足某三角关系式,求与 α,β 相关的 γ 的某个三角函数值"的问题.
解析:$\because\sin^2\alpha+\cos2\alpha=\frac{1}{4}$,$\therefore\sin^2\alpha+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\frac{1}{4}$, $\therefore\cos^2\alpha=\frac{1}{4}$. 又 $\because\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\therefore\cos\alpha=\frac{1}{2}$,$\therefore\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore\tan\alpha=\sqrt{3}$. **答案:**D	第一步　化简 $\sin^2\alpha+\cos2\alpha=\frac{1}{4}$,得到 $\cos^2\alpha=\frac{1}{4}$. 第二步　求出 $\cos\alpha$ 和 $\sin\alpha$. 第三步　求出 $\tan\alpha$.

凯尔微博


怎样更有效地学习数学(一) 中学生学习数学的一般过程:(制定)计划——(课前)预习——(认真)听讲——(及时)复习——(独立)作业——(解决)疑难——(系统)小结——(课外学习)挑战,八个环节缺一不可,学生数学成绩的好坏就看学生本人是如何处理这八个环节的. 具体细节做法:(1)集中你的注意力.(目标、兴趣)

模板攻略

1. 模板解决思路

若能通过三角关系式，求出关于 α,β 的三角函数值，则可按给值求值问题的模板解决. 若不能，则尽量化简，然后对角 γ 用 α 和 β 表示出来，将化简后的三角式代入可求出 γ 的三角函数值.

2. 模板解决步骤

① 第一步　化简三角关系式，求出 α,β的某个三角函数值，或尽量得到简化形式.

② 第二步　将 γ 写成 $a\alpha+b\beta$ 的形式，选择合适的公式将 γ 的三角函数值表示成 α 和 β 的三角关系式的运算形式.

③ 第三步　代入①中的关系式，求出结果.

3. 典型例题

典例 1　(重庆高考)设 $\tan\alpha,\tan\beta$是方程$x^2-3x+2=0$的两个根，则$\tan(\alpha+\beta)$的值为(　　).

A. -3　　B. -1　　C. 1　　D. 3

思路分析：$\tan\alpha,\tan\beta$是方程两个根的意思是$\tan\alpha+\tan\beta=3,\tan\alpha\tan\beta=2$.

解析：因为$\tan\alpha,\tan\beta$是方程$x^2-3x+2=0$的两个根，所以$\tan\alpha+\tan\beta=3,\tan\alpha\tan\beta=2$,　①

所以$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{3}{1-2}=-3$,　②~③

故选A.

答案：A

典例 2　(四川高考)设 $\sin2\alpha=-\sin\alpha,\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，则 $\tan2\alpha$ 的值是______.

解析：$\because\sin2\alpha=-\sin\alpha$,

$\therefore2\sin\alpha\cos\alpha=-\sin\alpha$.

$\because\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right),\therefore\sin\alpha\neq0$.

$\therefore\cos\alpha=-\frac{1}{2},\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore\tan\alpha=-\sqrt{3}$.　①

$\therefore\tan2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{1-3}=\sqrt{3}$.　②~③

答案：$\sqrt{3}$

必修4

模板演练

答案详见 P417

1. (江西高考)若$\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{1}{2}$，则 $\tan2\alpha=$(　　).

A. $-\frac{3}{4}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $-\frac{4}{3}$　　D. $\frac{4}{3}$

2. (陕西高考)设向量 $\boldsymbol{a}=(1,\cos\theta)$与 $\boldsymbol{b}=(-1,2\cos\theta)$垂直，则 $\cos2\theta$ 等于(　　).

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 0　　D. -1

3. (辽宁高考)已知 $\sin\alpha-\cos\alpha=\sqrt{2},\alpha\in(0,\pi)$，则$\sin2\alpha=$(　　).

A. -1　　B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 1

4. (浙江高考)已知 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，且$\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{3\pi}{4}$，则 $\cos2\theta$ 的值是______.

5. (四川高考节选)已知$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2},\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$，且 $\cos B=\frac{3}{5}$，求 $\cos C$.

6. 已知$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且$2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha=0$，求$\dfrac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin2\alpha+\cos2\alpha+1}$的值.

怎样更有效地学习数学(二)　(2)运用多种感官、多种智能去学.(记笔记、问他人、画图表)　(3)思考它，与自己的兴趣、已有的知识联系起来.(独立再发现)　(4)联想它，及时有规律地进行复习并采用多种方式.(浮想联翩)　(5)运用它.(做好各类练习，并经常挑战难题)



模板3　三角函数式的化简求值【5年14考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(新课标全国高考)设θ为第二象限角,若$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$,则$\sin\theta+\cos\theta=$________.	本模板解决的是"已知关于α,β的三角函数式,且已知某些三角函数值,化简并求值"的问题.
解析:由θ在第二象限,且$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$,所以$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$,因而$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{10}}{5}$. **答案**:$-\frac{\sqrt{10}}{5}$	第一步　由$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$得到$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$. 第二步　化简得$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$. 第三步　代入求出结果.

模板攻略

必修4

1. 模板解决思路

对于要化简求值的三角函数式,首先要化简,尽可能得到简单形式,然后利用已知条件,朝化简后的形式靠拢,得到一致的形式,代入可求得三角函数式的值.

2. 模板解决步骤

①第一步　将三角函数式朝着已知三角函数值的角的方向化简.

②第二步　利用已知三角函数值,求出与①化简后相关的三角函数值.

③第三步　代入并求值.

3. 典型例题

典例1　(重庆高考)$\frac{\sin47°-\sin17°\cos30°}{\cos17°}=$(　　).

A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $-\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析:$\frac{\sin47°-\sin17°\cos30°}{\cos17°}$

$=\frac{\sin(30°+17°)-\sin17°\cos30°}{\cos17°}$　①

$=\frac{\sin30°\cos17°+\cos30°\sin17°-\sin17°\cos30°}{\cos17°}$

$=\frac{\sin30°\cos17°}{\cos17°}=\sin30°=\frac{1}{2}$.　②~③

答案:C

典例2　求下列三角函数式的值.

(1)若$\cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{5}$,$\cos(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$,求$\tan\alpha\tan\beta$;

(2)已知$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=2$,求$\frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}$.

思路分析:(1)$\tan\alpha\tan\beta$需要乘积的形式,因此选择两角和与差的公式.

(2)已知正切求正余弦,先将三角函数式化为关于正切的.

解:(1)$\because\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{5}$,

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}$,　①

凯尔微博



学好几何图形语言(一)　在数学中,图形也像文字那样具有记录作用,而且比文字形象,所以图形更有助于人们探索解题途径,有利于形象记忆,还可以交流思想.因此,我们把图形作为语言来使用,并称它为特殊的数学语言——图形(图象)语言.要学好几何图形语言,需注意以下几点:(1)画图要规范.

解得 $\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{2}{5}$，$\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{5}$，　②

则 $\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\dfrac{1}{2}$.　③

(2) $\dfrac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}$

$=\dfrac{\tan^2\alpha+1}{2\tan\alpha+1}$，　①

由 $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=\dfrac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=2$，得 $\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$，　②

原式$=\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+1}{2\times\dfrac{1}{3}+1}=\dfrac{2}{3}$.　③

知识要点

1. 在二倍角公式中，两个角的倍数关系，不仅限于 2α 是 α 的二倍，要熟悉多种形式的两个角的倍数关系. 常用的公式变形：$\cos\alpha=\dfrac{\sin2\alpha}{2\sin\alpha}$，$\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos2\alpha}{2}$，$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos2\alpha}{2}$.

2. 化简的方法有：弦切互化，异名化同名，异角化同角，降幂或升幂等.

模板演练

➡ 答案详见 P418

1. (重庆高考) $4\cos50°-\tan40°=$(　　).

A. $\sqrt{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{2}-1$

2. (陕西高考)若 $3\sin\alpha+\cos\alpha=0$，则 $\dfrac{1}{\cos^2\alpha+\sin2\alpha}$ 的值为(　　).

A. $\dfrac{10}{3}$　　B. $\dfrac{5}{3}$

C. $\dfrac{2}{3}$　　D. -2

3. (福建高考)若 $\tan\alpha=3$，则 $\dfrac{\sin2\alpha}{\cos^2\alpha}$ 的值等于(　　).

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 6

4. (重庆高考)已知 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}+\cos\alpha$，且 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\dfrac{\cos2\alpha}{\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)}$ 的值为______.

5. (江苏高考)已知 $\tan\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=2$，则 $\dfrac{\tan x}{\tan2x}$ 的值为______.

6. 已知 $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{2}$，$\sin(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{10}$，求 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\beta}$ 的值.

学好几何图形语言(二) (2)既能画标准位置的图形，也能画非标准位置的图形，但不能用特殊图形代替一般图形. (3)多画正反面图形，加深对概念的理解. (4)对图形能合能分，熟悉几何基本图形. 画图或者观察一个几何图形，能帮助我们在头脑中把个别的几何事实具体化、形象化，有利于分析几何概念和定理，掌握它们之间的内在联系，从而灵活运用它们.



模板4　含多个角的三角函数的相关问题 【5年43考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(江西高考)设$f(x)=\sqrt{3}\cdot\sin3x+\cos3x$,若对任意实数$x$都有$\|f(x)\|\leqslant a$,则实数$a$的取值范围是________.	本模板解决的是"已知函数$f(x)$,$f(x)$中含有同角不同名的三角函数甚至不同角的三角函数,求相关问题"的问题.
解析:由题意知$f(x)=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$,则$\|f(x)\|\leqslant2$,所以$a\geqslant2$. 答案:$a\geqslant2$	第一步　将$f(x)$化成关于一个角的函数. 第二步　求出$f(x)$的范围. 第三步　得到a的取值范围.

模板攻略

1. 模板解决思路

在一个三角函数中,如果含有多个角,我们一般是先利用三角恒等变换将其转化为一个角$\omega x+\varphi$的复合函数.然后利用处理$A\sin(\omega x+\varphi)$,$A\cos(\omega x+\varphi)$或$A\tan(\omega x+\varphi)$的方式解决相关问题.

2. 模板解决步骤

①第一步　通过三角恒等变换,将$f(x)$化成$\sin(\omega x+\varphi)$,$\cos(\omega x+\varphi)$或$\tan(\omega x+\varphi)$的复合函数的形式.

②第二步　将$f(x)$相关问题转化为$\sin(\omega x+\varphi)$,$\cos(\omega x+\varphi)$或$\tan(\omega x+\varphi)$的复合函数的相关问题.

③第三步　按三角函数的相关内容解出问题答案.

3. 典型例题

典例1　(天津高考)已知函数$f(x)=-\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+6\sin x\cos x-2\cos^2x+1$,$x\in\mathbf{R}$.

(1)求$f(x)$的最小正周期;

(2)求$f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值和最小值.

解:(1)$f(x)=-\sqrt{2}\sin2x\cos\frac{\pi}{4}-\sqrt{2}\cos2x\cdot\sin\frac{\pi}{4}+3\sin2x-\cos2x=2\sin2x-2\cos2x$

$=2\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.　①

所以$f(x)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.　②~③

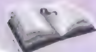
(2)因为$f(x)$在区间$\left[0,\frac{3\pi}{8}\right]$上是增函数,在区间$\left[\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right]$上是减函数,　②

又$f(0)=-2$,$f(\frac{3\pi}{8})=2\sqrt{2}$,$f(\frac{\pi}{2})=2$,故函数$f(x)$在区间$[0,\frac{\pi}{2}]$上的最大值为$2\sqrt{2}$,最小值为$-2$.　③

典例2　(湖北高考)已知向量$\boldsymbol{a}=(\cos\omega x-\sin\omega x,\sin\omega x)$,$\boldsymbol{b}=(-\cos\omega x-\sin\omega x,2\sqrt{3}\cos\omega x)$,设函数$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\lambda(x\in\mathbf{R})$的图象关于直线$x=\pi$对称,其中$\omega,\lambda$为常数,且$\omega\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

(1)求函数$f(x)$的最小正周期;

(2)若$y=f(x)$的图象经过点$\left(\frac{\pi}{4},0\right)$,求函数$f(x)$在



名人学习小点子(一)　科学家培根的"酿蜜法":我们不应该像蚂蚁一样只会收集,也不应该像蜘蛛一样光会在肚里抽丝,而应该像蜜蜂一样采百花酿蜜.巴尔扎克的"反问法":打开一切科学之门的钥匙都毫无疑问是问号.巴甫洛夫的"循环渐进法":循环渐进,循环渐进,再循环再渐进!叔本华的"读名著法":用宝贵的时间专读伟人的已有定评的名著,这些书才是开卷有益的.

区间$\left[0,\frac{3\pi}{5}\right]$上的取值范围.

思路分析：(1)利用$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$将$f(x)$表示出来，然后化简可得含参数$\omega$和$\lambda$的三角函数，然后利用关于$x=\pi$对称可得$\omega$，即可求出$T$. (2)代入$\left(\frac{\pi}{4},0\right)$可求出$\lambda$，即$f(x)$的解析式求出.

解：(1)$f(x)=\sin^2\omega x-\cos^2\omega x+2\sqrt{3}\sin\omega x\cdot\cos\omega x+\lambda$

$=-\cos2\omega x+\sqrt{3}\sin2\omega x+\lambda=2\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)+\lambda$. ①

由直线$x=\pi$是$y=f(x)$图象的一条对称轴，可得

$\sin\left(2\omega\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\pm1$, ②

所以$2\omega\pi-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，即$\omega=\frac{k}{2}+\frac{1}{3}(k\in\mathbf{Z})$.

又$\omega\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，所以$k=1$，故$\omega=\frac{5}{6}$.

所以$f(x)$的最小正周期是$\frac{6\pi}{5}$. ③

(2)由$y=f(x)$的图象过点$\left(\frac{\pi}{4},0\right)$，得$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$，

即$\lambda=-2\sin\left(\frac{5}{6}\times\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=-2\sin\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}$.

故$f(x)=2\sin\left(\frac{5}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{2}$, ①

由$0\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{5}$，得$-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5}{3}x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$, ②

所以$-\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(\frac{5}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant1$,

得$-1-\sqrt{2}\leqslant2\sin\left(\frac{5}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{2}\leqslant2-\sqrt{2}$, ③

故函数$f(x)$在$\left[0,\frac{3\pi}{5}\right]$上的取值范围为$[-1-\sqrt{2},2-\sqrt{2}]$.

知识要点

1. 和差化积公式

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$;

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$;

$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$.

2. 积化和差公式

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$;

$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$;

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$;

$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$.

3. 辅助角公式

$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)(ab\neq0)$，其中$\varphi$满足$\tan\varphi=\frac{b}{a}$.

模板演练

➡ 答案详见 P419

1. (江西高考)若函数$f(x)=(1+\sqrt{3}\tan x)\cos x$，$0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$，则$f(x)$的最大值为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{3}+1$　　D. $\sqrt{3}+2$

2. (浙江高考)函数$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-2\sqrt{2}\sin^2x$的最小正周期是______.

名人学习小点子(二)　狄慈根的"重复法"：重复是学习之母！爱因斯坦的"思考法"：学习知识要善于思考，思考，再思考. 孔子的"学思结合法"：学而不思则罔，思而不学则殆. 子思的"五之法"：博学之，审问之，慎思之，明辨之，笃行之. 朱熹的"举一反三法"：举一而反三，闻一而知十，及学者用功之深，穷理之熟，然后能融会贯通，以至于此.



3. (北京高考)已知函数$f(x)=4\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1$.

(1)求$f(x)$的最小正周期;

(2)求$f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$上的最大值和最小值.

4. (山东高考)已知函数$f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)-\cos(\omega x+\varphi)(0<\varphi<\pi,\omega>0)$为偶函数,且函数$y=f(x)$图象的两相邻对称轴间的距离为$\frac{\pi}{2}$.

(1)求$f\left(\frac{\pi}{8}\right)$的值;

(2)将函数$y=f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后,再将得到的图象上各点的横坐标伸长到原来的4倍,纵坐标不变,得到函数$y=g(x)$的图象,求$g(x)$的单调递减区间.

5. (安徽高考)设函数$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin^2x$.

(1)求$f(x)$的最小正周期;

(2)设函数$g(x)$对任意$x\in\mathbf{R}$,有$g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=g(x)$,且当$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时,$g(x)=\frac{1}{2}-f(x)$,求$g(x)$在$[-\pi,0]$上的解析式.

6. (湖北高考)已知函数$f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$,$g(x)=\frac{1}{2}\sin2x-\frac{1}{4}$.

(1)求函数$f(x)$的最小正周期;

(2)设函数$h(x)=f(x)-g(x)$的最大值,并求使$h(x)$取得最大值的x的集合.



名人学习小点子(三) 鲁迅的"模仿法":会模仿绝不是劣点,我们正应该学会"会模仿"的."会模仿"又加以有创造不是更好吗?梁启超的"分类法":每日所读之书最好有两类:一类是最熟的,一类是涉览的.胡适的"四到法":读书要四到,眼到、口到、心到、手到.

第一章　解三角形

模板 1　运用正、余弦定理求边或角【每年必考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(北京高考)在$\triangle ABC$中,$a=3,b=5,\sin A=\frac{1}{3}$,则$\sin B=$(　　). A. $\frac{1}{5}$　B. $\frac{5}{9}$　C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　D. 1	本模板解决的是"在正弦定理和余弦定理中,分别已知其中三个量,求其他的量"的问题.
解析: 因为$a=3,b=5,\sin A=\frac{1}{3}$, 根据$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,得 $\frac{3}{\frac{1}{3}}=\frac{5}{\sin B}$,解得$\sin B=\frac{5}{9}$. **答案:** B	第一步　观察已知条件:两边和其中一边的对角的正弦值. 第二步　根据正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$求解. 第三步　把已知代入公式即可得结果.

模板攻略

1. 模板解决思路

已知条件	选用定理	结论
一边两角(如A,B,c)	正弦定理	一解
两边及夹角(如a,b,C)	余弦定理 正弦定理	一解
两边及其中一边的对角(如a,b,A)	正弦定理	一解或两解或无解
三边(a,b,c)	余弦定理	一解

2. 模板解决步骤

①第一步　观察所给的已知条件的特点.

②第二步　选择所要应用的正弦定理、余弦定理所对应的公式.

③第三步　把已知条件代入公式中求解.

3. 典型例题

典例 1　(天津高考)在$\triangle ABC$中,$\angle ABC=\frac{\pi}{4}$,$AB=\sqrt{2}$,$BC=3$,则$\sin\angle BAC=$(　　).

A. $\frac{\sqrt{10}}{10}$　B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$　C. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$　D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

解析: 因为$\angle ABC=\frac{\pi}{4}$,$AB=\sqrt{2}$,$BC=3$,　①

根据余弦定理$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$,

得$AC^2=(\sqrt{2})^2+3^2-2\times\sqrt{2}\times3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=5$,　②

解得$AC=\sqrt{5}$.　③

结合$BC=3$,$\sin\angle ABC=\frac{\sqrt{2}}{2}$,　①

四个记忆高潮(一)　现代人总是把"累"字挂在嘴边,其实,要消除疲劳,关键是要做到劳逸结合,尤其要注意科学用脑.科学用脑最重要的是顺应个人的生物钟规律.一般而言,人的大脑有四个记忆高潮.清晨起床后,大脑经过一夜休息,此刻学习一些难记忆而又必须记忆的东西较为适宜,这是第一个记忆高潮.



根据正弦定理 $\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$，得 ②

$\frac{\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{3}{\sin\angle BAC}$，解得 $\sin\angle BAC=\frac{3\sqrt{10}}{10}$. ③

答案：C

误区警示

在三角形中，已知两边和其中一个角时，不要想当然地直接应用正弦定理解题，一定要先判断这个角是不是已知的两边的其中一边所对的角，若是，可直接应用正弦定理解题. 若不是，可先应用余弦定理求这个角所对的边，然后应用正弦定理求解.

典例 2 （安徽高考）设 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对边的长分别为 a,b,c. 若 $b+c=2a$，$3\sin A=5\sin B$，则角 $C=$______.

解析：因为 $3\sin A=5\sin B$， ①

结合正弦定理的变形 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$， ②

得 $3a=5b$，所以 $a=\frac{5}{3}b$.

又 $b+c=2a$，所以 $c=\frac{7}{3}b$. ①

根据余弦定理的推论 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$， ②

把 $a=\frac{5}{3}b$，$c=\frac{7}{3}b$ 代入，化简得 $\cos C=-\frac{1}{2}$，所以 $c=\frac{2}{3}\pi$. ③

答案：$\frac{2}{3}\pi$

知识要点

1. 正弦定理

在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等，即 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

2. 正弦定理的变形

(1) $\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$，$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$，$\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}$.

(2) $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$.

特别提示

在 $\triangle ABC$ 中，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$（其中 R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径），即 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$.

3. 利用正弦定理，可以解决两类解三角形的问题

(1)已知任意两个角与一边，求其他的边和角.

(2)已知任意两边与其中一边的对角，求其他的边和角.

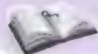
4. 三角形解的个数

已知 a,b 和 A 时，三角形解的情况如表所示.

A 是锐角	$a\geqslant b$		一解
	$a<b$	$a>b\sin A$	两解
		$a=b\sin A$	一解
		$a<b\sin A$	无解
A 是直角或钝角	$a>b$		一解
	$a\leqslant b$		无解

5. 余弦定理

三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方的和减去这两边与它们的夹角的余弦的积的两倍. 即



$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

6. 余弦定理的推论

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$，$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

7. 利用余弦定理，可以解决两类解三角形的问题

(1)已知三边，求三个角.

(2)已知两边和它们的夹角，求第三边和其他角.

模板演练

➡ 答案详见 P420

1.（广东高考）在△ABC 中，若∠A=60°，∠B=45°，$BC=3\sqrt{2}$，则 AC=(　　).

A. $4\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2.（重庆高考）若△ABC 的内角 A，B，C 满足 $6\sin A=4\sin B=3\sin C$，则 $\cos B$=(　　).

A. $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$　　B. $\dfrac{3}{4}$

C. $\dfrac{3\sqrt{15}}{16}$　　D. $\dfrac{11}{16}$

3.（重庆高考）设△ABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 a=1，b=2，$\cos C=\dfrac{1}{4}$，则 $\sin B$=______.

4.（湖北高考）设△ABC 的内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c. 若 $(a+b-c)(a+b+c)=ab$，则角 C=______.

5.（北京高考）在△ABC 中，若 a=3，$b=\sqrt{3}$，$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$，则∠C 的大小为______.

6.（陕西高考）在△ABC 中，角 A，B，C 所对边的长分别为 a，b，c，若 a=2，$B=\dfrac{\pi}{6}$，$c=2\sqrt{3}$，则 b=______.

模板 2　已知边角关系解三角形【5年18考】

模板探究

<table>
<tr><th>母 题 呈 现</th><th>模 板 引 入</th></tr>
<tr><td>（湖南高考）在锐角△ABC 中，角 A，B 所对的边长分别为 a，b，$2a\sin B=\sqrt{3}b$，则角 A 等于(　　).
A. $\dfrac{\pi}{12}$　B. $\dfrac{\pi}{6}$　C. $\dfrac{\pi}{4}$　D. $\dfrac{\pi}{3}$</td><td>本模板解决的是“已知三角形中的某些边角关系(边和三角函数的混合等式)，解三角形”的问题.</td></tr>
<tr><td>解析：因为 $2a\sin B=\sqrt{3}b$，
由正弦定理可知：$2\sin A\cdot\sin B=\sqrt{3}\sin B$.
因为 B 为三角形的内角，所以 $\sin B\neq0$，故 $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
又因为△ABC 为锐角三角形，所以 $A\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.故 $A=\dfrac{\pi}{3}$.
答案：D</td><td>第一步　观察边角关系式的特点.
第二步　将边化成角，易得 $2\sin A\cdot\sin B=\sqrt{3}\sin B$.
第三步　结合 $\sin B\neq0$，$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且△ABC 是锐角三角形，易得 A 的大小.</td></tr>
</table>



模板攻略

1. 模板解决思路

已知边角关系,利用正、余弦定理解三角形时,要紧紧把握正、余弦定理中所反映的三角形中的边角关系来处理. 正弦定理常用来把边转化为角,结合三角恒等变换来解题. 余弦定理常用来把角转化为边.

2. 模板解决步骤

①第一步　观察给出的边角关系式的特点.

②第二步　结合正、余弦定理将边化成角,或将角化成边.

③第三步　化简由第二步所得到的式子,结合已知条件和正、余弦定理求出边和角.

3. 典型例题

典例　(辽宁高考)在$\triangle ABC$中,内角A,B,C的对边分别为a,b,c. 若$a\sin B\cos C+c\sin B\cos A=\frac{1}{2}b$,且$a>b$,则$\angle B=$(　　).

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

解析:已知$a\sin B\cos C+c\sin B\cos A=\frac{1}{2}b$,　①

由正弦定理得$\sin A\sin B\cos C+\sin C\sin B\cos A=\frac{1}{2}\sin B$,②

$\therefore \sin B\sin(A+C)=\frac{1}{2}\sin B$.

又$\because \sin B\neq 0$,$\therefore \sin(A+C)=\frac{1}{2}$,即$\sin B=\frac{1}{2}$,$\therefore B=\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$. 又$\because a>b$,$\therefore B=\frac{\pi}{6}$. 故选 A.　③

答案:A

知识要点

1. 正弦定理、余弦定理的应用

(1)利用正弦定理解三角形时,首先要结合平面几何中"大边对大角,大角对大边"及三角形内角和定理去考虑问题.

(2)余弦定理的主要功能是实现三角形中的边角关系的转化,体现了量化的数学思想.

2. 解三角形常用知识

设$\triangle ABC$的三边为a,b,c,对应的三个角为A,B,C.

(1)角与角关系:$A+B+C=\pi$;

(2)边与边关系:$a+b>c,b+c>a,c+a>b,|a-b|<c,|b-c|<a,|c-a|<b$;

(3)$\sin(A+B)=\sin C,\cos(A+B)=-\cos C$,

$\tan(A+B)=-\tan C$,

$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2},\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$.

模板演练

➡ 答案详见 P421

1. (浙江高考)在$\triangle ABC$中,角A,B,C所对的边分别为a,b,c. 若$a\cos A=b\sin B$,则$\sin A\cos A+\cos^2B=$(　　).

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. -1　　D. 1

2. (江苏高考)在锐角三角形ABC中,A,B,C的对边分别为a,b,c,$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=6\cos C$,则$\frac{\tan C}{\tan A}+\frac{\tan C}{\tan B}$=______.

3. (天津高考)在$\triangle ABC$中,内角A,B,C所对的边分别是a,b,c. 已知$b\sin A=3c\sin B$,$a=3$,$\cos B=\frac{2}{3}$.

(1)求b的值;

(2)求$\sin\left(2B-\frac{\pi}{3}\right)$的值.

凯尔微博



究竟怎样用脑效果最佳(二)　第三种是"混合型",这类人全天用脑效率差不多,但相对而言上午8点至10点、下午3点至5点左右效率较高. 就整个人群来说,混合型人约占90%左右. 但在现实生活中,很多人违背生物钟规律,喜欢采用各种脑兴奋措施来消除心理疲劳感. 如大量抽烟是作家写作的兴奋剂,诗人则喜欢以酒助兴,西方人则喜欢抽雪茄、喝咖啡.

模板3 判断三角形的形状【5年5考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(陕西高考)设△ABC的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c,若$b\cos C+c\cos B=a\sin A$,则△ABC的形状为(　　). A. 锐角三角形　B. 直角三角形 C. 钝角三角形　D. 不确定	本模板解决的是"已知三角形的某些边角关系,判断三角形的形状"的问题.
解析:因为$b\cos C+c\cos B=a\sin A$, 由正弦定理得$\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin^2 A$, 整理得$\sin(B+C)=\sin^2 A$,$\therefore \sin A=1$,即$A=\frac{\pi}{2}$. ∴△$ABC$的形状是直角三角形. 故选B. **答案:**B	第一步　观察已知的边角关系式的特点. 第二步　将边角关系式化为只含角的三角函数等式. 第三步　利用三角恒等变换化简整理即得A的大小. 第四步　由$A=\frac{\pi}{2}$,得△ABC是直角三角形.

模板攻略

1. 模板解决思路

判断三角形的形状的基本思路是:利用正、余弦定理进行边角的统一,即将条件化为只含角的三角函数关系式,然后利用三角恒等变换得出内角之间的关系式;或将条件化为只含有边的关系式,然后利用常见的化简变形得出三边的关系,从而判断出三角形的形状.

2. 模板解决步骤

①第一步　观察已知边角关系式的特点.

②第二步　将边角条件统一化为关于边的关系式或关于角的关系式.

③第三步　利用三角恒等变换和已知条件,经化简整理,得出内角之间的关系或三边之间的关系.

④第四步　判断三角形的形状.

3. 典型例题

典例1　(上海高考)在△ABC中,若$\sin^2 A+\sin^2 B<\sin^2 C$,则△$ABC$的形状是(　　).

A. 钝角三角形　　B. 直角三角形

C. 锐角三角形　　D. 不能确定

解析:因为$\sin^2 A+\sin^2 B<\sin^2 C$,　①

由正弦定理得$a^2+b^2<c^2$,　②

所以$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}<0$,所以角$C$是钝角,　③

故△ABC是钝角三角形.　④

答案:A

典例2　(辽宁高考)在△ABC中,a,b,c分别为内角A,B,C的对边,且$2a\sin A=(2b+c)\sin B+(2c+b)\cdot\sin C$.

(1)求A的大小;

(2)若$\sin B+\sin C=1$,试判断△ABC的形状.

解:(1)$2a\sin A=(2b+c)\sin B+(2c+b)\sin C$,　①

根据正弦定理得$2a^2=(2b+c)b+(2c+b)c$,

即$a^2=b^2+c^2+bc$,　②

必修5

究竟怎样用脑效果最佳(三)　一般来说,以上方法并不可取.因为如果常用兴奋大脑的方法强迫大脑继续工作,就会强行改变生物钟规律,加重心理疲劳,加重细胞损伤,对身体十分有害.生活中,我们大可不必时时都绷紧神经,搞的自己疲惫不堪,而应该根据自己的生物钟规律,合理安排休息时间,将精力最旺盛的时间留给富有挑战性和创造性的工作.



由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

故 $\cos A=-\frac{1}{2}$，$A=120°$.

(2)由(1)得 $\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C+\sin B\sin C$.　2

又 $\sin B+\sin C=1$，联立解得 $\sin B=\sin C=\frac{1}{2}$.

因为 $0°<B<90°$，$0°<C<90°$，故 $B=C$.　3

所以△ABC 是等腰钝角三角形.　4

知识要点

1. 在△ABC 中，a,b,c 分别是∠A，∠B，∠C 所对的边.

$a^2=b^2+c^2$ ⇔ A 是直角；

$a^2>b^2+c^2$ ⇔ A 是钝角；

$a^2<b^2+c^2$ ⇔ A 是锐角.

若 $\sin 2A=\sin 2B$，则 $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$. 即△ABC 为等腰三角形或直角三角形.

2. $a=b$ ⇔ $A=B$ ⇔ $\sin A=\sin B$；

$a>b$ ⇔ $A>B$ ⇔ $\sin A>\sin B$.

3. 钝角三角形 ⇔ 有一个角是钝角；

直角三角形 ⇔ 有一个角是直角；

锐角三角形 ⇔ 三个内角都是锐角.

模板演练

➜ 答案详见 P421

1. (上海高考)若△ABC 的三个内角满足 $\sin A:\sin B:\sin C=5:11:13$，则△$ABC$(　　).

A. 一定是锐角三角形

B. 一定是直角三角形

C. 一定是钝角三角形

D. 可能是锐角三角形，也可能是钝角三角形

2. 在△ABC 中，$2\cos B\sin A=\sin C$，则△ABC 的形状一定是(　　).

A. 等腰直角三角形　　B. 直角三角形

C. 等腰三角形　　D. 等边三角形

3. 在△ABC 中，a,b,c 分别为角 A,B,C 所对的边，若 $a=2b\cos C$，则此三角形一定是(　　).

A. 等腰直角三角形　　B. 直角三角形

C. 等腰三角形　　D. 等边三角形

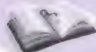
4. 在△ABC 中，若 $0<\tan A\cdot\tan B<1$，那么△ABC 一定是(　　).

A. 锐角三角形　　B. 钝角三角形

C. 直角三角形　　D. 形状不确定

5. 在△ABC 中，若 $b^2\sin^2C+c^2\sin^2B=2bc\cos B\cdot\cos C$，试判断三角形的形状.

6. 在△ABC 中，$(a+b+c)(a+b-c)=3ab$，$2\cos A\sin B=\sin C$，试判断△ABC 的形状.



数学家的文学修养(一) 著名数学家徐利治先生把自己的治学经验概括为：培养兴趣、追求简易、重视直观、学会抽象、不怕计算五个方面. 最近他在南京讲学时又特意补上一条——喜爱文学，并谆谆教导今后学者不可忽视文学修养. 在不少人看来，数学和文学似乎是磁铁的两极，前者属理性思维，后者属形象思维，两者互相排斥.

模板 4　三角形中的最值问题【5年12考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(陕西高考)在△ABC中,角A,B,C所对边的长分别为a,b,c,若$a^2+b^2=2c^2$,则$\cos C$的最小值为(　　). A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$	本模板解决的是"在三角形中,已知一些边角关系,求三角函数、角或边的最值"的问题.
解析:因为$a^2+b^2=2c^2$,由余弦定理得$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{c^2}{2ab}\geqslant\frac{c^2}{a^2+b^2}=\frac{c^2}{2c^2}=\frac{1}{2}$.当且仅当$a=b$时取等号.故选C. **答案:**C	第一步　观察已知和所求的特点. 第二步　根据余弦定理把所要求的$\cos C$表示出来. 第三步　运用基本不等式$a^2+b^2\geqslant 2ab$(当且仅当$a=b$时取等号)即得$\cos C$的最小值.

模板攻略

1. 模板解决思路

解决三角形中的最值问题的关键在于:利用正弦定理或余弦定理、三角恒等变换思想将有关问题转化为某一个角的三角函数,或某一边的函数,注意角或边的取值范围,进而求出其最值.

2. 模板解决步骤

①第一步　观察已知和待求式子的特点,化简边角关系.

②第二步　将待求关系式转化为某一个角的三角函数或某一边的函数.

③第三步　利用三角函数性质或基本不等式求出最值.

3. 典型例题

典例 1　(四川高考)在△ABC中,$\sin^2A\leqslant\sin^2B+\sin^2C-\sin B\sin C$,则$A$的取值范围是(　　).

A. $\left(0,\frac{\pi}{6}\right]$　　B. $\left[\frac{\pi}{6},\pi\right)$

C. $\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$　　D. $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right)$

解析:因为$\sin^2A\leqslant\sin^2B+\sin^2C-\sin B\sin C$,　①

由正弦定理,得$a^2\leqslant b^2+c^2-bc$,

由余弦定理,得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,则$\cos A\geqslant\frac{1}{2}$,　②

$\because 0<A<\pi,\therefore 0<A\leqslant\frac{\pi}{3}$.　③

答案:C

典例 2　(辽宁高考)在△ABC中,a,b,c分别为内角A,B,C的对边,且$2a\sin A=(2b+c)\sin B+(2c+b)\cdot\sin C$.

(1)求A的大小;

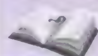
(2)求$\sin B+\sin C$的最大值.

思路分析:(1)将题目中的条件全部化成边后利用余弦定理求解.

(2)将$\sin B+\sin C$化成关于B的三角函数后利用B的范围可求.

必修 5

数学家的文学修养(二)　然而历史上许多大数学家都有较好的文学修养,笛卡儿对诗歌情有独钟,认为"诗是激情和想象力的产物",诗人靠想象力让知识的种子萌芽.被马克思所敬仰的数学家莱布尼茨,从小对诗歌和历史怀有深厚的兴趣.他充分利用家中藏书,博古通今,为后来在数学等一系列学科取得开创性成果打下了坚实基础.



解:(1)由已知,根据正弦定理得$2a^2=(2b+c)b+(2c+b)c$,即$a^2=b^2+c^2+bc$,由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,故$\cos A=-\frac{1}{2}$,$A=120°$. ①

(2)由(1)得$\sin B+\sin C=\sin B+\sin(60°-B)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B=\sin(60°+B)$. ①~②

故当$B=30°$时,$\sin B+\sin C$取得最大值1. ③

知识要点

1. 在三角形中,三个内角的取值范围是$(0,\pi)$.结合三角函数,若在求函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)(0<x<\pi)$的最值时,首先应根据$0<x<\pi$来确定$\omega x+\varphi$的取值范围,然后再将$\omega x+\varphi$看作一个整体,结合正弦函数的图象和性质来求最值.

2. $a^2+b^2\geqslant 2ab$(当且仅当$a=b$时等号成立).

模板演练

➡ 答案详见 P422

1. 锐角△ABC中,若$A=2B$,则$\frac{a}{b}$的取值范围是( ).

A. $(1,2)$　　B. $(1,\sqrt{3})$

C. $(\sqrt{2},2)$　　D. $(\sqrt{2},\sqrt{3})$

2. 在△ABC中,a,b,c分别为内角A,B,C的对边,且满足$b^2+c^2-a^2=bc$.

(1)求角A的值;

(2)若$a=\sqrt{3}$,设角B的大小为x,△ABC的周长为y,求$y=f(x)$的最大值.

3. 三角形的三内角A,B,C所对边的长分别为a,b,c,设向量$\boldsymbol{m}=(c-a,b-a)$,$\boldsymbol{n}=(a+b,c)$,若$\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$.

(1)求角B的大小;

(2)求$\sin A+\sin C$的取值范围.

4. 设△ABC的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c,且$a\cos B-b\cos A=\frac{3}{5}c$.

(1)求$\tan A\cot B$的值;

(2)求$\tan(A-B)$的最大值.

凯尔微博



数学家的文学修养(三) 数学王子高斯在哥廷根大学就读期间,最喜好的两门学科是数学和语言,并终生保持对它们的爱好.他大学一年级从图书馆所借阅的25本书中,人文学科类就占了20本.正当做数学家还是语言学家的念头在脑子里徘徊时,19岁的高斯成功地解决了正十七边形的尺规作图问题,从而坚定了从事数学研究的信念.

模板 5　与三角形面积有关的计算 [5年17考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(新课标全国高考)$\triangle ABC$ 中, $B=120°$, $AC=7$, $AB=5$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为______.	本模板解决的是"已知边角条件求三角形的面积,或已知三角形的面积及边角条件,解三角形"的问题.
解析:因为 $AC=7,AB=5,B=120°$, 由余弦定理得 $AC^2=BC^2+AB^2-2BC\cdot AB\cos B$, 即 $49=BC^2+25-2\times5\times BC\cdot\cos120°$. 整理得 $BC^2+5BC-24=0$, 解得 $BC=3$ 或 $BC=-8$(舍去). $\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\times AB\times\sin120°=\frac{1}{2}\times3\times5\times\sin120°=\frac{15\sqrt{3}}{4}$. **答案**: $\frac{15\sqrt{3}}{4}$	第一步　由题意知可选用面积公式 $S=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B$ 求面积,而 BC 未知. 第二步　根据余弦定理求出 BC. 第三步　根据面积公式 $S=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B$ 求出面积.

模板攻略

1. 模板解决思路

(1)求三角形的面积,要充分挖掘题目中的条件,转化为求两边及夹角正弦问题,要注意方程思想在解题中的应用.

(2)可灵活运用正、余弦定理及三角形面积公式求边和角.

2. 模板解决步骤

①第一步　化简边角条件,得到一些角和边的值.

②第二步　选择合适的面积公式,结合上一步得到的边角值,求出另一个边或角的值;若求面积,可利用正弦或余弦定理求出所需边、角的值.

③第三步　利用正弦定理和余弦定理,解出剩余的边和角;若求面积,则把相应数据代入面积公式求解.

3. 典型例题

典例 1　(江西高考)在 $\triangle ABC$ 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c. 已知 $3\cos(B-C)-1=6\cos B\cos C$.

(1)求 $\cos A$;

(2)若 $a=3$, $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{2}$,求 b,c.

解:(1)由 $3\cos(B-C)-1=6\cos B\cos C$,

得 $3(\cos B\cos C-\sin B\sin C)=-1$,

即 $\cos(B+C)=-\frac{1}{3}$,

从而 $\cos A=-\cos(B+C)=\frac{1}{3}$.

(2)由于 $0<A<\pi$, $\cos A=\frac{1}{3}$,所以 $\sin A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.　①

又 $S_{\triangle ABC}=2\sqrt{2}$,即 $\frac{1}{2}bc\sin A=2\sqrt{2}$,解得 $bc=6$.　②

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,得 $b^2+c^2=13$.

解方程组 $\begin{cases}bc=6,\\b^2+c^2=13,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}b=2,\\c=3,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b=3,\\c=2.\end{cases}$　③

必修5

数学家的文学修养(四)　继高斯之后的伟大数学家柯西从小喜爱数学,当一个念头闪过脑海时,他常会中断其他事,在本子上算数画图. 他的数学天赋被数学家拉普拉斯和拉格朗日发现. 据说拉格朗日曾预言柯西将成为了不起的大数学家,并告诫其父不要让孩子过早接触数学,以免误入歧途,成为"不知道怎么样使用自己语言"的大数学家.



典例 2 (浙江高考)在△ABC中,内角A,B,C的对边分别为a,b,c. 已知$\cos A=\frac{2}{3}$,$\sin B=\sqrt{5}\cos C$.

(1)求$\tan C$的值;

(2)若$a=\sqrt{2}$,求△ABC的面积.

解:(1)因为$0<A<\pi$,$\cos A=\frac{2}{3}$,

所以$\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\frac{\sqrt{5}}{3}$,

又$\sqrt{5}\cos C=\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C=\frac{\sqrt{5}}{3}\cos C+\frac{2}{3}\sin C$.

所以$\tan C=\sqrt{5}$.

(2)由$\tan C=\sqrt{5}$,得$\sin C=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$,$\cos C=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

于是$\sin B=\sqrt{5}\cos C=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$, ①

由$a=\sqrt{2}$及正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$,得$c=\sqrt{3}$. ②

设△ABC的面积为S,则$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{5}}{2}$. ③

知识要点

三角形面积公式

(1)$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$($a,b,c$是△$ABC$的内角$A,B,C$所对的边).

(2)$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah_1=\frac{1}{2}bh_2=\frac{1}{2}ch_3$($h_1,h_2,h_3$分别为三角形的边$a,b,c$上的高).

(3)$S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\left(p=\frac{a+b+c}{2}\right)$.

(4)$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}r(a+b+c)$($r$为三角形内切圆半径).

模板演练

➡ 答案详见 P422

1.(福建高考)若△ABC的面积为$\sqrt{3}$,$BC=2$,$C=60°$,则边AB的长度等于______.

2.(新课标全国高考)在△ABC中,D为边BC上一点,$BD=\frac{1}{2}DC$,$\angle ADB=120°$,$AD=2$. 若△ADC的面积为$3-\sqrt{3}$,则$\angle BAC=$______.

3.(新课标全国高考)已知a,b,c分别为△ABC三个内角A,B,C的对边,$a\cos C+\sqrt{3}a\sin C-b-c=0$.

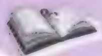
(1)求A;

(2)若$a=2$,△ABC的面积为$\sqrt{3}$,求b,c.

4.(山东高考)在△ABC中,内角A,B,C的对边分别为a,b,c. 已知$\frac{\cos A-2\cos C}{\cos B}=\frac{2c-a}{b}$.

(1)求$\frac{\sin C}{\sin A}$的值;

(2)若$\cos B=\frac{1}{4}$,$b=2$,求△ABC的面积S.



数学家的文学修养(五) 庆幸的是,柯西的小学是在家里上的,在其父谆谆教导下,系统学习了古典语言、历史、诗歌等. 具有传奇色彩的是,柯西因政治问题流亡国外时,曾在意大利的一所大学里讲授过文学诗词课,并著有《论诗词创作法》. 柯西的文学功底由此可见一斑.

模板 6　解三角形的实际应用【5年7考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(上海高考)在相距 2 千米的 A、B 两点测量目标点 C，若 $\angle CAB=75°$，$\angle CBA=60°$，则 A、C 两点之间的距离为______千米.	本模板解决的是“与解三角形有关的实际应用”的问题，如测量距离问题、测量高度问题及测量角度问题等.
解析：如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=180°-75°-60°=45°$，由正弦定理得 $\dfrac{AC}{\sin60°}=\dfrac{AB}{\sin45°}=\dfrac{2}{\sin45°}$，$AC=\sqrt{6}$ 千米. **答案**：$\sqrt{6}$	第一步　根据题意把实际问题转化为数学问题. 第二步　如图，画出几何图形 $\triangle ABC$. 第三步　结合正弦定理求 A、C 两点的距离.

模板攻略

1. 模板解决思路

解三角形应用题常有以下两种情形：

(1)实际问题经抽象概括后，已知量与未知量全部集中在一个三角形中，可用正弦定理或余弦定理求解.

(2)实际问题经抽象概括后，已知量与未知量涉及到两个或两个以上的三角形，这时需作出这些三角形，先解够条件的三角形，然后逐步求解其他三角形，有时需设出未知量，从几个三角形中列出方程(组)，解方程(组)得出所要求的解.

2. 模板解决步骤

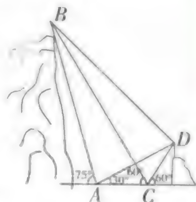
①第一步　准确理解题意，分清已知与所求，准确理解应用题中的有关名称、术语，如坡度、仰角、俯角、视角、象限角、方位角、方向角等.

②第二步　根据题意画出图形，并将已知条件在图形中标出.

③第三步　将要求解的问题归结到一个或几个三角形中，通过合理运用正弦定理、余弦定理等有关知识建立数学模型，然后正确求解，演算过程要求算法简练，计算准确，最后作答.

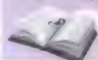
3. 典型例题

典例 1　(辽宁高考)如图，A，B，C，D 都在同一个与水平面垂直的平面内，B，D 为两岛上的两座灯塔的塔顶，测量船于水面 A 处测得 B 点和 D 点的仰角分别为 $75°$，$30°$，于水面 C 处测得 B 点和 D 点的仰角均为 $60°$，$AC=0.1\text{km}$. 试探究图中 B，D 间距离与另外哪两点间距离相等，然后求 B，D 的距离.(计算结果精确到 0.01km，$\sqrt{2}\approx1.414$，$\sqrt{6}\approx2.449$).



解：在 $\triangle ACD$ 中，$\angle DAC=30°$，$\angle ADC=60°-\angle DAC=30°$，所以 $CD=AC=0.1\text{km}$. 又 $\angle BCD=180°-60°-60°=60°$，故 CB 是 $\triangle CAD$ 底边 AD 的垂直平分线，所以 $BD=BA$.　①~②

数学家的文学修养（六）　1921 年来中国讲学的罗素是当代著名的哲学家、数学家和逻辑学家，著名的“理发师悖论”的发现者. 但他也是一个文学家，有许多小说集出版发行. 令许多专业作家大跌眼镜的是，非科班出身的他于 1950 年获得诺贝尔文学奖.



在$\triangle ABC$中，$\frac{AB}{\sin\angle BCA}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$，

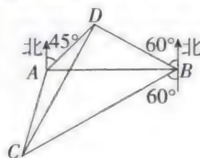
且$\angle ABC=75°-60°=15°$.

所以$AB=\frac{AC\sin60°}{\sin15°}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{20}$(km)，

因此，$BD=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{20}\approx0.33$(km). ③

故B,D的距离为0.33km.

典例2 (陕西高考)如图，A,B是海面上位于东西方向相距$5(3+\sqrt{3})$海里的两个观测点，现位于A点北偏东45°，B点北偏西60°的D点有一艘轮船发出求救信号，位于B点南偏西60°且与B点相距$20\sqrt{3}$海里的C点的救援船立即前往营救，其航行速度为30海里/小时，该救援船到达D点需要多长时间？



解：由题意知$AB=5(3+\sqrt{3})$海里，

$\angle DBA=90°-60°=30°$，$\angle DAB=90°-45°=45°$，

$\therefore\angle ADB=180°-(45°+30°)=105°$， ①~②

在$\triangle ADB$中，由正弦定理得$\frac{DB}{\sin\angle DAB}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，

$\therefore DB=\frac{AB\cdot\sin\angle DAB}{\sin\angle ADB}=\frac{5(3+\sqrt{3})\cdot\sin45°}{\sin105°}$

$=\frac{5(3+\sqrt{3})\cdot\sin45°}{\sin45°\cos60°+\cos45°\sin60°}=10\sqrt{3}$(海里).

又$\angle DBC=\angle DBA+\angle ABC=30°+(90°-60°)=60°$，

$BC=20\sqrt{3}$海里，

在$\triangle DBC$中，由余弦定理得

$CD^2=DB^2+BC^2-2DB\cdot BC\cdot\cos\angle DBC$

$=300+1\,200-2\times10\sqrt{3}\times20\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=900$，

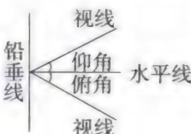
$\therefore CD=30$(海里)，则需要的时间$t=\frac{30}{30}=1$(小时). ③

$\therefore$救援船到达D点需要1小时.

知识要点

1. 仰角与俯角

与目标视线在同一铅垂平面内的水平视线和目标视线的夹角，目标视线在水平视线上方时叫仰角，目标视线在水平视线下方时叫俯角(如图).



2. 方位角与方向角

(1)从正北方向顺时针转到目标方向线所成的角叫方位角，如图1，目标A的方位角为135°.

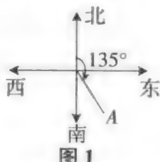


图1

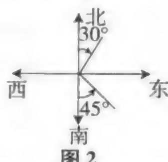


图2

(2)从指定方向线到目标方向线所成的小于90°的水平角叫方向角. 如图2，北偏东30°，南偏东45°.

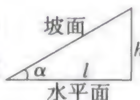
特别提示

(1)方位角与方向角本质上是一样的，方向角是方位角的另一种表达形式.

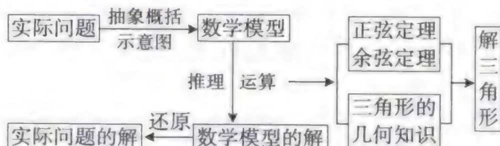
(2)方向角一般将正北或正南方向作为起始方向，通常表达成北(南)偏东(西)XX度.

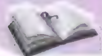
3. 坡角与坡度

坡面与水平面所成的二面角叫坡角，坡面的铅直高度与水平宽度之比叫坡度($i=\frac{h}{l}$). 如图.



4. 解三角形流程图





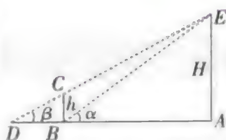
凯尔微博

数学家的文学修养(七) 再看看国内的数学家，华罗庚能诗善文，所写的科普文章通俗易懂，是值得后人效法的楷模. 苏步青自幼热爱旧体诗词，读过许多文史书籍，他把诗词作为自己的业余爱好来调剂生活. 李国平不仅是中国的"复分析"奠基人之一，也是一位优秀的诗人，其诗集《李国平诗选》于1990年由武汉大学出版社出版发行.

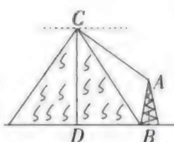
模板演练

答案详见 P423

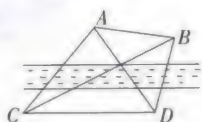
1. (江苏高考改编)某兴趣小组测量电视塔 AE 的高度 H(单位:m),如图所示,垂直放置的标杆 BC 高度 $h=4$m,仰角 $\angle ABE=\alpha$,$\angle ADE=\beta$.该小组已经测得一组 α,β 的值,$\tan\alpha=1.24$,$\tan\beta=1.20$,请据此算出 H 的值.



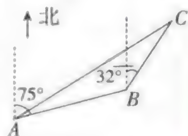
2. 如图,山脚下有一小塔 AB,在塔底 B 测得山顶 C 的仰角为 60°,在山顶 C 测得塔顶 A 的俯角为 45°,已知塔高 $AB=20$m,求山高 CD.



3. 如图,为了测量河对岸 A,B 两点间的距离,在这岸定一基线 CD,现已测出 $CD=a$,$\angle ACD=60°$,$\angle BCD=30°$,$\angle BDC=105°$,$\angle ADC=60°$,试求 AB 的长.



4. 如图,一艘海轮从 A 出发,沿北偏东 75°的方向航行 67.5n mile 后到达海岛 B,然后从 B 出发,沿北偏东 32°的方向航行 54.0n mile 后到达海岛 C,如果下次航行直接从 A 出发到达 C,此船应该沿怎样的方向航行,需要航行多少距离?(角度精确到 0.1°,距离精确到 0.01n mile)



后生可畏 小男孩问爸爸:"是不是做父亲的总比做儿子的知道得多?"爸爸回答:"当然啦!"小男孩问:"电灯是谁发明的?"爸爸:"是爱迪生."小男孩又问:"那爱迪生的爸爸怎么没有发明电灯?"(很奇怪,喜欢倚老卖老的人,特别容易栽跟斗.权威往往只是一个经不起考验的空壳子,尤其在现今这个多元开放的时代.)



第二章　数　列

模板 1　观察归纳法求数列的通项公式

模板探究

母题呈现	模板引入
写出$\frac{2^2-1}{2}$，$\frac{3^2-1}{3}$，$\frac{4^2-1}{4}$，$\frac{5^2-1}{5}$，…的一个通项公式.	本模板解决的是"根据数列的前几项求数列的通项公式"的问题.
解：该数列第1,2,3,4项的分母分别为2,3,4,5，恰比项数多1. 分子中的$2^2,3^2,4^2,5^2$恰是分母的平方，-1不变，故它的一个通项公式为$a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1}$.	第一步　观察式子中分子、分母的特点. 第二步　分母比序号大1，分子是分母的平方减1. 第三步　猜想数列的通项公式，并验证.

模板攻略

1. 模板解决思路

观察归纳法就是观察数列的特征，找出各项共同的构成规律，横向看各项之间的关系，纵向看各项与项数 n 的内在联系，从而归纳出数列的通项公式.

2. 模板解决步骤

①第一步　仔细观察数列的前几项(或前几个图形)，分析项(或图形)的结构特点.

②第二步　寻找项(或图形)与序号的关系.

③第三步　猜想数列的通项公式，并通过代入检验数列的前几项，看是否满足所求出的通项公式.

3. 典型例题

典例 1　写出下面各数列的一个通项公式.

(1)3,5,7,9,…；

(2)$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{7}{8}$，$\frac{15}{16}$，$\frac{31}{32}$，…；

(3)-1，$\frac{3}{2}$，$-\frac{1}{3}$，$\frac{3}{4}$，$-\frac{1}{5}$，$\frac{3}{6}$，…；

(4)3,33,333,3 333,….

解：(1)各项减去 1 后为正偶数，①~②

所以 $a_n=2n+1$.③

(2)每一项的分子比分母少 1，而分母组成数列 2^1，$2^2,2^3,2^4,\cdots$，①~②

所以 $a_n=\frac{2^n-1}{2^n}$.③

(3)奇数项为负，偶数项为正，故通项公式中含因子$(-1)^n$；

各项绝对值的分母组成数列 1,2,3,4,…；

而各项绝对值的分子组成的数列中，奇数项为 1，偶数项为 3，即奇数项为 2−1，偶数项为 2+1，①~②

所以 $a_n=(-1)^n\frac{2+(-1)^n}{n}$.③

必修5

凯尔微博



解析几何的创始人——笛卡儿(一)　法国数学家、物理学家、哲学家笛卡儿，生前因怀疑教会信条受到迫害，长年在国外避难. 他的著作生前被禁止出版或被烧毁，在他死后多年还被列入"禁书目录". 但在今天，巴黎安葬民族先贤的圣日耳曼圣心堂中，庄重的大理石墓碑上镌刻着"笛卡儿，欧洲文艺复兴以来，第一个为人类争取并保证理性权利的人".

也可写为 $a_n=\begin{cases}-\frac{1}{n}, n\text{为正奇数},\\ \frac{3}{n}, n\text{为正偶数}.\end{cases}$ ③

(4)将数列各项改写为：$\frac{9}{3},\frac{99}{3},\frac{999}{3},\frac{9\ 999}{3},\cdots$，分母都是3，而分子分别是 $10-1,10^2-1,10^3-1,10^4-1,\cdots$， ①~②

所以 $a_n=\frac{1}{3}(10^n-1)$. ③

典例 2 写出数列的一个通项公式，使得它的前几项是下列各数.

(1)$-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots$；

(2)$\sqrt{3},3,\sqrt{15},\sqrt{21},3\sqrt{3},\cdots$；

(3)0.9，0.99，0.999，0.999 9，…；

(4)3，5，3，5，3，5，….

解：(1)任何一个整数都可以看成一个分数，所以此数列可以看作自然数列的倒数，正负相间用-1的正整数次幂进行调整， ①~②

故数列的通项公式为 $a_n=(-1)^n\frac{1}{n}$. ③

(2)数列可化为 $\sqrt{3},\sqrt{9},\sqrt{15},\sqrt{21},\sqrt{27}$，即 $\sqrt{3\times1},\sqrt{3\times3},\sqrt{3\times5},\sqrt{3\times7},\sqrt{3\times9},\cdots$，每个根号里面可分解成两数之积，前一个因式为常数3，后一个因数为 $2n-1$， ①~②

故数列的通项公式为 $a_n=\sqrt{3(2n-1)}=\sqrt{6n-3}$. ③

(3)原数列可变形为 $\left(1-\frac{1}{10}\right),\left(1-\frac{1}{10^2}\right),\left(1-\frac{1}{10^3}\right),\left(1-\frac{1}{10^4}\right),\cdots$， ①~②

故数列的通项公式为 $a_n=1-\frac{1}{10^n}$. ③

(4)数列给出前6项，奇数项为3，偶数项为5， ①~②

所以该数列的表示方法为 $a_n=\begin{cases}3(n\text{为正奇数}),\\ 5(n\text{为正偶数}).\end{cases}$ ③

此数列还可以这样考虑：3与5的算术平均数为 $\frac{3+5}{2}=4$，$4+1=5$，$4-1=3$， ①~②

故数列的通项公式又可以写为 $a_n=4+(-1)^n$. ③

知识要点

1. 数列的相关概念

按照一定顺序排列着的一列数称为数列.

数列中的每一个数叫作这个数列的项.

数列中的每一项都和它的序号有关，排在第一位的数称为这个数列的第1项（通常也叫作首项），排在第二位的数称为这个数列的第2项……排在第 n 位的数称为这个数列的第 n 项.

数列的一般形式可以写成：$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots$，简记为 $\{a_n\}$.

特别提示

数列中的数是按一定次序排列的. 如果组成两个数列的数相同而排列次序不同，那么它们就是不同的数列.

2. 数列的分类

按分类标准可将数列分为表中几种.

分类标准	名称	含义	举例
按项的个数	有穷数列	项数有限的数列	$1,2,3,4,\cdots,n$
	无穷数列	项数无限的数列	$1,4,9,\cdots,n^2,\cdots$
按项的变化趋势	递增数列	从第2项起，每一项都大于它的前一项的数列	$3,4,5,\cdots,n+2,\cdots$
	递减数列	从第2项起，每一项都小于它的前一项的数列	$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$
	常数列	各项相等的数列	$6,6,6,6,\cdots$
	摆动数列	从第2项起，有些项大于它的前一项，有些项小于它的前一项的数列	$1,-2,3,-4,\cdots$

必修5

解析几何的创始人——笛卡儿（二） 笛卡儿的著作，无论是数学、自然科学还是哲学，都开创了这些学科的崭新时代.《几何学》是他公开发表的唯一数学著作，虽然只有117页，但它标志着代数与几何的第一次完美结合，使形形色色的代数方程表现为不同的几何图形，许多相当难解的几何题转化为代数题后能轻而易举地获得答案.

凯尔微博



特别提示

求数列的最大项或最小项，一般可以先研究数列的单调性，可以用 $\begin{cases}a_n\geqslant a_{n-1},\\ a_n\geqslant a_{n+1}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_n\leqslant a_{n-1},\\ a_n\leqslant a_{n+1},\end{cases}$ 也可以转化为函数的最值问题或利用数形结合.

3. 数列的表示方法

(1)图象法

数列的图象是以 $(n,f(n))$ 为坐标的一系列无限或有限的孤立的点.

(2)列表法

列表法就是列出表格来表示序号与项的关系.例如:数列 6,66,666,6 666,66 666,666 666.

序号	1	2	3	4	5	6
项	6	66	666	6 666	66 666	666 666

(3)解析法

将数列用一个数学式子表示出来的方法叫作解析法,可用通项公式或其他式子表示数列.

4. 数列的通项公式

(1)如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项与序号 n 之间的关系可以用一个式子来表示,那么这个公式叫作这个数列的通项公式.

(2)数列的通项公式实际上是一个以正整数集或它的有限子集为定义域的函数表达式.

特别提示

(1)并不是所有的数列都有通项公式,例如: $\sqrt{2}$ 的不足近似值,精确到 1,0.1,0.01,0.001,0.000 1…所构成的数列 1,1.4,1.41,1.414,1.414 2…就没有通项公式.

(2)数列的通项公式不一定形式唯一,例如,数列 -1,1,-1,1,-1,1…它可以写成 $a_n=(-1)^n$ 也可以写成 $a_n=(-1)^{n+2}$. 这些通项公式,形式上虽然不同,但都表示同一个数列.

模板演练

➡ 答案详见 P424

1. 数列 $-1,\frac{4}{3},-\frac{9}{5},\frac{16}{7}\cdots$ 的一个通项公式是( ).

A. $a_n=(-1)^n\frac{n^2}{2n-1}$　　B. $a_n=(-1)^n\frac{n(n+1)}{2n-1}$

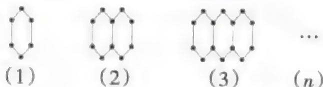
C. $a_n=(-1)^n\frac{n^2}{2n+1}$　　D. $a_n=(-1)^n\frac{n^2-2n}{2n-1}$

2. 数列 0.3,0.33,0.333,0.333 3,…的通项公式为( ).

A. $\frac{1}{9}(10^n-1)$　　B. $\frac{2}{9}(10^n-1)$

C. $\frac{1}{3}(1-\frac{1}{10^n})$　　D. $\frac{3}{10}(10^n-1)$

3. 如图是一系列有机物的结构简图,图中的"小黑点"表示原子,两黑点间的"短线"表示化学键,按图中结构第 n 个图有化学键( ).



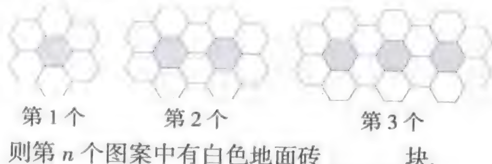
A. $6n$ 个　　B. $4n+2$ 个

C. $5n-1$ 个　　D. $5n+1$ 个

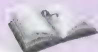
4. 如图,根据下列 5 个图形及相应点的个数的变化规律,试猜想第 n 个图中有______个点.



5. 黑白两种颜色的正六边形地面砖按如图所示的规律拼成若干个图案:



则第 n 个图案中有白色地面砖______块.



解析几何的创始人——笛卡儿(三) 他的主要著作都是在荷兰完成的,其中《方法论》一书成为哲学经典.这本书中的三个著名附录《几何》、《折光》和《气象》更奠定了笛卡儿在数学、物理和天文学中的地位.在《几何》中,笛卡儿分析了几何学与代数学的优缺点,指出希腊人的几何过于抽象,且过多的依赖于图形,总是要寻求一些奇妙的想法.

模板2　数列的单调性的应用【5年5考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(辽宁高考)已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=33,a_{n+1}-a_n=2n$,则$\frac{a_n}{n}$的最小值为______.	本模板解决的是"已知数列$\{a_n\}$满足条件p,求数列的最大(小)项或求参数的取值范围"的问题.
解析:$\because a_{n+1}-a_n=2n,a_1=33$, $\therefore a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=33+2+4+\cdots+2(n-1)=n^2-n+33$. 则$\frac{a_n}{n}=n+\frac{33}{n}-1$,令$f(n)=n+\frac{33}{n}-1$, 利用$y=x+\frac{1}{x}$的单调性知当$n=6$时,$f(n)_{\min}=\frac{21}{2}$. **答案:**$\frac{21}{2}$	第一步　根据已知条件求出$\{a_n\}$的通项公式. 第二步　结合$\frac{a_n}{n}=n+\frac{33}{n}-1$的特点,构造出函数$f(n)=n+\frac{33}{n}-1$. 第三步　结合函数的单调性求出最小值.

模板攻略

1. 模板解决思路

(1)判断数列单调性的方法:常采用作差比较判断数列中相邻两项的大小;当数列各项为正数时,也可用作商比较的方法判断;也可利用数列所对应的函数单调性判断法来判断数列单调性.

(2)数列的单调性是高考常考内容之一,有关数列最大项、最小项、数列有界性问题均可借助数列的单调性来解决.

2. 模板解决步骤

1 第一步　利用已知条件求出数列的通项公式.

2 第二步　作商$\frac{a_{n+1}}{a_n}$或作差$a_{n+1}-a_n$,并化简(或根据通项公式的特点构造函数).

3 第三步　讨论$\frac{a_{n+1}}{a_n}$与1或$a_{n+1}-a_n$与0的关系(或根据构造函数的单调性),得出数列单调性,从而求出数列的最大(小)项.

3. 典型例题

典例1　(浙江高考)若数列$\left\{n(n+4)\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$中的最大项是第$k$项,则$k=$______.

解析:$a_n=n(n+4)\left(\frac{2}{3}\right)^n$,　1

则$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)(n+5)\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{n(n+4)\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{2(n+1)(n+5)}{3n(n+4)}$.　2

于是$2(n+1)(n+5)-3n(n+4)=-n^2+10$,

令$-n^2+10>0$得$-\sqrt{10}<n<\sqrt{10}$,则$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$,

即当$n\leq3$时,该数列单调性递增;

令$-n^2+10<0$得$n>\sqrt{10}$,则$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$,

即当$n\geq4$时,该数列单调递减,

而$a_3<a_4$,故该数列的最大项是第4项,即$k=4$.　3

答案:4

必修5

解析几何的创始人——笛卡儿(四)　代数却完全受法则和公式的控制,以至于阻碍了自由的思想和创造.他同时看到了几何的直观与推理的优势和代数机械化运算的力量.于是笛卡儿着手解决这个问题,并由此创立了解析几何.



误区警示

(1)解答本题时易出现以下两个错误:

①无法判断数列$\{a_n\}$的变化趋势;

②不考虑a_3与a_4的大小.

(2)解决数列的单调性问题有以下两个易错点:

①不能通过通项公式与我们熟知的函数联系起来,借助函数的单调性来解决数列的单调性而失分.

②不能利用a_n与a_{n-1},a_{n+1}的大小关系来判断数列的单调性而失分.

典例 2　已知数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=\dfrac{9^n(n+1)}{10^n}$,试判断此数列是否有最大项?若有,第几项最大,最大项是多少?若没有,说明理由.

解:方法一:$a_{n+1}-a_n=\dfrac{9^{n+1}(n+2)}{10^{n+1}}-\dfrac{9^n(n+1)}{10^n}$

$=\dfrac{9^n}{10^n}\cdot\dfrac{8-n}{10}$,　①~②

当$n<8$时,$a_{n+1}-a_n>0$,即$a_{n+1}>a_n$;

当$n=8$时,$a_{n+1}-a_n=0$,即$a_{n+1}=a_n$;

当$n>8$时,$a_{n+1}-a_n<0$,即$a_{n+1}<a_n$.

则$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_8=a_9>a_{10}>a_{11}>\cdots$,故数列$\{a_n\}$有最大项,为第8项和第9项,且$a_8=a_9=\dfrac{9^8\times9}{10^8}=\dfrac{9^9}{10^8}$.　③

方法二:设数列$\{a_n\}$的第n项最大,则$\begin{cases}a_n\geqslant a_{n-1},\\a_n\geqslant a_{n+1},\end{cases}$　①~②

即$\begin{cases}\dfrac{9^n(n+1)}{10^n}\geqslant\dfrac{9^{n-1}n}{10^{n-1}},\\\dfrac{9^n(n+1)}{10^n}\geqslant\dfrac{9^{n+1}(n+2)}{10^{n+1}},\end{cases}$

解得$8\leqslant n\leqslant9$,又$n\in\mathbf{N}^*$,则$n=8$或$n=9$.故数列$\{a_n\}$有最大项,为第8项和第9项,且$a_8=a_9=\dfrac{9^9}{10^8}$.　③

知识要点

1. 判断数列单调性的常用方法

(1)作差比较法. $a_{n+1}-a_n>0\Leftrightarrow$数列$\{a_n\}$是单调递增数列;$a_{n+1}-a_n<0\Leftrightarrow$数列$\{a_n\}$是单调递减数列;$a_{n+1}-a_n=0\Leftrightarrow$数列$\{a_n\}$是常数列.

(2)作商比较法. 当$a_n>0$时,则$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1\Leftrightarrow$数列$\{a_n\}$是单调递增数列;$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1\Leftrightarrow$数列$\{a_n\}$是单调递减数列;$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1\Leftrightarrow$数列$\{a_n\}$是常数列.

当$a_n<0$时,则$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1\Leftrightarrow$数列$\{a_n\}$是单调递减数列;$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}<1\Leftrightarrow$数列$\{a_n\}$是单调递增数列;$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1\Leftrightarrow$数列$\{a_n\}$是常数列.

2. 数列与函数的关系

对任意数列$\{a_n\}$,其每一项与序号都有对应关系,如表所示.

序号	1	2	3	4	…	n	…
项	a_1	a_2	a_3	a_4	…	a_n	…

数列也可以看成是定义域为正整数集$\mathbf{N}^*$(或它的有限子集$\{1,2,3,\cdots,n\}$)的函数$a_n=f(n)$,当自变量n从小到大依次取值时,该函数对应的一列函数值.反过来,对于函数$y=f(x)$,如果$f(i)(i=1,2,3,\cdots)$有意义,那么就可以得到一个数列$f(1)$,$f(2)$,$f(3)$,$\cdots$,$f(n)$,$\cdots$.

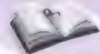
特别提示

数列是一种特殊的函数,它的特殊性主要体现在其定义域上.

3. 数列的最大(小)项问题

(1)由于数列是特殊的函数,因此可以用研究函数的思想方法来研究数列的相关性质,如单调性、最大值、最小值等,此时要注意数列的定义域为正整数集(或其有限子集$\{1,2,\cdots,n\}$)这一条件.

凯尔微博



解析几何的创始人——笛卡儿(五)　笛卡儿一生做出了多方面的贡献,1634年所著的《宇宙学》包含当时被教会视为“异端”的观点:地球自转、宇宙无限、漩涡说、光的本性是粒子流的假说,以及在太空中存在着极其精细的以太.直到二三百年以后,他的这些观点仍具有很高的研究价值.

(2)可以利用不等式组$\begin{cases}a_{n-1}\leqslant a_n,\\a_n\geqslant a_{n+1},\end{cases}$找到数列的最大项;利用不等式组$\begin{cases}a_{n-1}\geqslant a_n,\\a_n\leqslant a_{n+1},\end{cases}$找到数列的最小项.

模板演练

➡ 答案详见 P424

1. 数列$\{a_n\}$的通项$a_n=\dfrac{n}{n^2+90}$,则数列$\{a_n\}$中的最大值是(　　).

A. $3\sqrt{10}$　　B. 19　　C. $\dfrac{1}{19}$　　D. $\dfrac{\sqrt{10}}{60}$

2. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{4}{11-2n}$,则满足$a_{n+1}<a_n$的n的取值为(　　).

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

3. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=-2n^2+29n+3$,则数列$\{a_n\}$中的最大项的值是______.

4. 已知$\{a_n\}$是递增数列,且对于任意的$n\in\mathbf{N}^*$,$a_n=n^2+\lambda n$恒成立,则实数λ的取值范围是______.

5. 设函数$f(x)=\begin{cases}(3-a)x-3(x\leqslant 7),\\a^{x-6}\quad(x>7),\end{cases}$数列$\{a_n\}$满足$a_n=f(n)$,$n\in\mathbf{N}^*$,且数列$\{a_n\}$是递增数列,则实数$a$的取值范围是______.

模板 3　由递推公式求通项公式【5年14考】

模板探究

母　题　呈　现	模　板　引　入
(江西高考)在数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$,$a_{n+1}=a_n+\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$,则$a_n=$(　　). A. $2+\ln n$　　B. $2+(n-1)\ln n$ C. $2+n\ln n$　　D. $1+n+\ln n$	本模板解决的是"已知递推公式,求$\{a_n\}$的通项公式"的问题.
解析:由已知,$a_{n+1}-a_n=\ln\dfrac{n+1}{n}$,$a_1=2$, $\therefore$ 当$n\geqslant 2$时,$a_n-a_{n-1}=\ln\dfrac{n}{n-1}$,$a_{n-1}-a_{n-2}=\ln\dfrac{n-1}{n-2}$,…,$a_2-a_1=\ln\dfrac{2}{1}$,将以上$n-1$个式子累加得 $a_n-a_1=\ln\dfrac{n}{n-1}+\ln\dfrac{n-1}{n-2}+\cdots+\ln\dfrac{2}{1}$ $=\ln\left(\dfrac{n}{n-1}\cdot\dfrac{n-1}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{1}\right)=\ln n$. $\therefore a_n=2+\ln n$,又$a_1=2+\ln 1=2$也适合该式. $\therefore a_n=2+\ln n(n\in\mathbf{N}^*)$. 故选 A. **答案:**A	第一步　把原递推公式转化为$a_{n+1}-a_n=\ln\dfrac{n+1}{n}$. 第二步　依次写出$a_n-a_{n-1}$,$a_{n-1}-a_{n-2}$,…,$a_2-a_1$,并将它们依次累加起来. 第三步　得出$a_n-a_1=\ln n$,又$a_1=2$,可求出$a_n$. 第四步　易检验$a_1$符合所求的通项公式.

解析几何的创始人——笛卡儿(六)　笛卡儿生活在资产阶级与封建教主、科学与神学激烈斗争的时代.从读书开始便对僵化的说教有强烈的怀疑批判精神,并坚定不移地寻找真理.笛卡儿在获得法学博士学位后,为了读"世界"这本大书,曾到荷兰服役.退伍以后,笛卡儿主要居住在荷兰,也曾回到法国,从事学术研究.1649年应邀去瑞典担任女王的教师,最后因肺炎病逝在异国.



模板攻略

1. 模板解决思路

(1)形如 $a_{n+1}-a_n=f(n)$ 形式的均可利用累加法求通项公式，如 $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_4-a_3)+(a_3-a_2)+(a_2-a_1)+a_1$，若从 $n\geqslant2$ 时累加求得 a_n，一定要验证 a_1 是否适合.

(2)形如 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$ 形成的数列可利用累乘法求数列的通项公式. 凡数列的递推公式通过适当变形可化为 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$ 形式的即可用累乘法求通项公式.

2. 模板解决步骤

①第一步　求出 a_1，将递推公式写成 $a_{n+1}-a_n=f(n)$ 或 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$ 的形式.

②第二步　依次写出 $a_n-a_{n-1},\cdots,a_2-a_1$ 或 $\frac{a_n}{a_{n-1}},\cdots,\frac{a_2}{a_1}$，并将它们累加或累乘起来.

③第三步　得出 a_n-a_1 或 $\frac{a_n}{a_1}$ 的值，解出 a_n.

④第四步　检验 a_1 是否符合所求的通项公式. 若符合，则合并；若不符合，则写成分段形式.

3. 典型例题

典例 1　已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n^2+n}$，求 a_n.

思路分析：

$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n^2+n}$ → 移项 → 利用累加法即可得出 a_n

解：由条件，知 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. ①

当 $n\geqslant2$ 时，$(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$，②

所以 $a_n-a_1=1-\frac{1}{n}$.

因为 $a_1=\frac{1}{2}$，所以 $a_n=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{n}=\frac{3}{2}-\frac{1}{n}$. ③

经检验 $a_1=\frac{1}{2}$，符合 $a_n=\frac{3}{2}-\frac{1}{n}$，

所以 $a_n=\frac{3}{2}-\frac{1}{n}$. ④

典例 2　数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+cn$（$n\in\mathbf{N}^*$，常数 $c\neq0$），且 a_1,a_2,a_3 成等比数列.

(1)求 c 的值；

(2)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解：(1)由题意，知 $a_1=2$，$a_2=2+c$，$a_3=2+3c$，

因为 a_1,a_2,a_3 成等比数列，所以 $(2+c)^2=2(2+3c)$.

解得 $c=0$ 或 $c=2$，又 $c\neq0$，

故 $c=2$.

(2)当 $n\geqslant2$ 时，由 $a_{n+1}=a_n+cn$，得 ①

$a_2-a_1=c$，

$a_3-a_2=2c$，

…

$a_n-a_{n-1}=(n-1)c$，

以上各式相加，得 $a_n-a_1=[1+2+\cdots+(n-1)]c=\frac{n(n-1)}{2}c$. ②

又 $a_1=2$，$c=2$，故 $a_n=n^2-n+2(n\geqslant2)$， ③

当 $n=1$ 时，上式也成立，

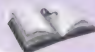
所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n^2-n+2(n\in\mathbf{N}^*)$. ④

知识要点

1. 递推公式

如果已知数列 $\{a_n\}$ 的第一项(或前几项)，且任意一项 a_n 与它的前一项 a_{n-1}(或前几项)间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式就叫作这

凯尔微博



筹算女杰王贞仪(一)　女数学家王贞仪(1768–1797)，字德卿，江宁人，是清代学者王锡琛之女，著有《西洋筹算增删》一卷、《重订策算证讹》一卷、《象数窥余》四卷、《术算简存》五卷、《筹算易知》一卷. 她是一位从事天文和筹算研究的女数学家. 算筹，又被称为筹、策、筹策等，有时亦称为算子，是一种棒状的计算工具.

个数列的递推公式.

2. 通项公式与递推公式的异同点

	不同点	相同点
通项公式	可根据某项的序号 n 的值,直接代入求出项 a_n	都可确定一个数列,也都可求出数列的任意一项
递推公式	可根据第一项(或前几项)通过一次(或多次)赋值求出数列的项,直至求出所需的 a_n	

特别提示

并不是所有的数列都有通项公式,也并不是所有的数列都有递推公式.

3. 由递推公式求数列的通项公式

由 a_1 和递推关系求通项公式,可观察其特点,一般常利用"化归法""累加法""累乘法"等.

(1)构造等比数列,已知首项 a_1,如果递推关系为 $a_{n+1}=qa_n+b(n\in\mathbf{N}^*)$时,求数列$\{a_n\}$的通项公式的关键是将 $a_{n+1}=qa_n+b$ 转化为 $a_{n+1}=qa_n+(q-1)a\Rightarrow a=\frac{b}{q-1}(q\neq1)$.(此种方法称为待定系数法)

(2)已知 a_1 且 $a_n-a_{n-1}=f(n)(n\geqslant2)$,可以用"累加法",得$(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_3-a_2)+(a_2-a_1)=f(n)+f(n-1)+\cdots+f(3)+f(2)$,即 $a_n=a_1+f(2)+f(3)+\cdots+f(n-1)+f(n)$.

(3)已知 a_1 且$\frac{a_n}{a_{n-1}}=f(n)(n\geqslant2)$,可以用"累乘法"得$\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}=f(n)\cdot f(n-1)\cdot\cdots\cdot f(3)\cdot f(2)$,即 $a_n=a_1\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot\cdots\cdot f(n-1)\cdot f(n)$.

模板演练

答案详见 P424

1. 在数列$\{a_n\}$中,已知 $a_1=1,a_{n+1}=a_n+n$,则 $a_n=$______.

2. 在数列$\{a_n\}$中,已知 $a_1=1,a_{n+1}=a_n+2^{n-1}$,求 a_n.

3. 若数列$\{a_n\}$满足 $a_1=2,a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n$,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

4. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=2^na_n$,且 $a_1=1$,求 a_n.

5. 已知数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,且 $a_{n+1}-a_n=3^n-n$,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

必修5

筹算女杰王贞仪(二)　一般是竹制或木制的一批同样长短粗细的小棒,也有用金属、玉、骨等质料制成的,不用时放在特制的算袋或算子筒里,使用时在特制的算板、毡或直接在桌上排布.应用"算筹"进行计算的方法叫做"筹算",算筹传入日本称为"算术".算筹在中国起源甚早,《老子》中有一句"善数者不用筹策"的记述,现在所见的最早记载是《孙子算经》.



模板 4　由前 n 项和求通项公式【5年7考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(新课标全国高考)若数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}$，则$\{a_n\}$的通项公式 a_n=______.	本模板解决的是“已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 满足条件 p，求$\{a_n\}$的通项公式”的问题.
解析：由$S_n=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}$得：当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}=\frac{2}{3}a_{n-1}+\frac{1}{3}$， ∴当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=-2a_{n-1}$，又 $n=1$ 时，$S_1=a_1=\frac{2}{3}a_1+\frac{1}{3}$，$a_1=1$， ∴$a_n=-2a_{n-1}=(-2)^2a_{n-2}=\cdots=(-2)^{n-1}a_1=(-2)^{n-1}$. **答案：**$(-2)^{n-1}$	第一步　利用 $S_n=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}$ 表示出 $S_{n-1}(n\geqslant2)$. 第二步　利用 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant2)$求出 $a_n(n\geqslant2)$的递推表达式. 第三步　求出 $a_1(a_1=S_1)$，利用 $a_n=-2a_{n-1}$，即得$\{a_n\}$的通项公式.

模板攻略

1. 模板解决思路

给出了$\{a_n\}$的前 n 项和公式 S_n 的递推公式或 S_n 与 a_n 的关系式，要求$\{a_n\}$的通项公式常用思路有二：一是先求出 S_n，再用公式 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant2$，且 $n\in\mathbf{N}^*)$来求出 a_n；二是由公式 $a_n=S_n-S_{n-1}$，将它转化为 a_n 的递推关系式，再求 a_n 即可.

2. 模板解决步骤

①第一步　利用 S_n 满足条件 p，写出当 $n\geqslant2$ 时，S_{n-1} 的表达式.

②第二步　利用 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant2)$求出 a_n 或转化为 a_n 的递推公式的形式.

③第三步　根据 $a_1=S_1$ 求出 a_1，并代入$\{a_n\}$的通项公式进行验证，若成立，则合并；若不成立，则写成分段形式或根据 a_1 和$\{a_n\}$的递推公式求出 a_n.

3. 典型例题

典例 1　(江西高考)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=kc^n-k$(其中 c,k 为常数)，且 $a_2=4$，$a_6=8a_3$，求 a_n.

思路分析：要求数列的通项a_n，先求$n\geqslant2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}$的关系式，然后检验 a_1 是否满足通项公式即可.

解：由$S_n=kc^n-k$得$S_{n-1}=kc^{n-1}-k(n\geqslant2)$.　①

所以$a_n=S_n-S_{n-1}=kc^n-kc^{n-1}(n\geqslant2)$.　②

由$a_2=4$，$a_6=8a_3$得$kc(c-1)=4$，$kc^5(c-1)=8kc^2(c-1)$，

解得$\begin{cases}c=2,\\k=2,\end{cases}$所以$a_1=S_1=2$，$a_n=kc^n-kc^{n-1}=2^n(n\geqslant2)$.

经检验$a_1=S_1=2$满足上式.

所以$a_n=2^n$.　③

误区警示

在利用数列的前 n 项和求通项时，往往容易忽略先求出 a_1，而直接把数列的通项公式写成 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 的形式，但它只适用于 $n\geqslant2$ 的情形. 所以解题时一定要注意分 $n=1$，$n\geqslant2$ 两种情况，在求出结果后，看看这两种情况能否整合在一起.

典例 2　已知下列各数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 的公式，求$\{a_n\}$的通项公式.

凯尔微博



筹算女杰王贞仪(三)　至明朝筹算渐渐为珠算所取代. 17 世纪初叶，英国数学家纳皮尔发明了一种算筹计算法，明末介绍到我国，也称为“筹算”. 清代著名数学家梅文鼎、戴震等人曾加以研究. 戴震称其为“策算”. 王贞仪也从事研究由西洋传入我国的这种筹算，并且写了三卷书向国人介绍西洋筹算. 她在著作中对西洋筹算进行增补讲解，使之简易明了.

(1)$S_n=3^n-2$;

(2)$S_n=n^2a_n(n\geqslant 2)$,$a_1=1$.

解:(1)$n\geqslant 2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=2\cdot 3^{n-1}$.　1～2

当$n=1$时,$a_1=S_1=1$,不满足上式.

$\therefore a_n=\begin{cases}1 & (n=1),\\ 2\cdot 3^{n-1} & (n\geqslant 2).\end{cases}$　3

(2)当$n\geqslant 2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}$,

即$(n^2-1)a_n=(n-1)^2a_{n-1}$. $\therefore \dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n-1}{n+1}$.

$\therefore \dfrac{a_n}{a_1}=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\dfrac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_4}{a_3}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\dfrac{a_2}{a_1}$

$=\dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{n-2}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{n(n+1)}$.

$\therefore a_n=\dfrac{2}{n(n+1)}$. 又$a_1=1=\dfrac{2}{1\times(1+1)}$满足通项公式.

$\therefore a_n=\dfrac{2}{n(n+1)}(n\in\mathbf{N}^*)$.

误区警示

在运用公式$a_n=S_n-S_{n-1}$时,一定要注意的是它的前提条件"$n\geqslant 2$",而$n=1$时,$a_1=S_1$.一定要代入$a_n(n\geqslant 2)$中验证,看是否成立.若成立则整合在一起,若不成立则写成分段形式.

知识要点

1. 数列的前 n 项和

数列的前n项和通常用S_n表示,记作$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

2. 数列的通项 a_n 与前 n 项和 S_n 的关系

$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1),\\ S_n-S_{n-1} & (n\geqslant 2).\end{cases}$

3. 由 S_n 求 a_n 的注意事项

由S_n求a_n时,要分$n=1$和$n\geqslant 2$两种情况讨论,然后验证两种情况可否用统一的解析式表示,若不能,则用分段函数的形式表示为:

$a_n=\begin{cases}S_1 & (n=1),\\ S_n-S_{n-1} & (n\geqslant 2).\end{cases}$

模板演练

➡ 答案详见 P425

1. (浙江高考)设S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和,$S_n=kn^2+n$,$n\in\mathbf{N}^*$,其中k是常数.

(1)求a_1及a_n;

(2)若对于任意的$m\in\mathbf{N}^*$,a_m,a_{2m},a_{4m}成等比数列,求k的值.

2. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=3^n+1$,求通项公式a_n.

3. (1)数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=(-1)^{n+1}n$,求a_n;

(2)数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=3+2^n$,求a_n.

筹算女杰王贞仪(四)　王贞仪介绍的纳皮尔算筹乘除法,当时的读者认为容易了解,但与当时我国的乘除法筹算的方法相比,显得较繁杂,因此,数学家们没有使用西洋筹算,一直使用中国筹算法.今天的读者把中外筹算乘除法视为老古董,采用的是由外国传入的笔算四则运算,这种笔算于1903年才开始被使用,故我国与世界接轨使用笔算的历史只有100多年.



4. 已知数列$\{a_n\}$中,$a_n>0$,S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和,且$a_n+\frac{1}{a_n}=2S_n$,求a_n.

5. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=-\frac{1}{2}n^2+kn$,$k\in\mathbf{N}^*$,且S_n的最大值为8. 试确定常数k,并求数列$\{a_n\}$的通项公式.

模板5　等差或等比数列的给值求值问题【5年24考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(广东高考)在等差数列$\{a_n\}$中,已知$a_3+a_8=10$,则$3a_5+a_7=$______.	本模板解决的是"已知$\{a_n\}$是等差或等比数列,且满足已知条件p,求其通项公式或数列中的项(和、差)或公差、公比等"的问题.
解析:设等差数列的公差为d, 则$a_3+a_8=2a_1+9d=10$, $3a_5+a_7=4a_1+18d=2(2a_1+9d)=20$. **答案**:20	第一步　设出等差数列的公差d. 第二步　把a_3+a_8用a_1,d表示出来. 第三步　把$3a_5+a_7$也用a_1,d表示出来,与第二步得出的式子相比较,即得结果.

必修5

模板攻略

1. 模板解决思路

(1)等差数列的给值求值问题

等差数列的通项公式$a_n=a_1+(n-1)d$中有4个变量a_n,a_1,n,d,在这4个变量中可以"知三求一".

①可以由首项和公差求出等差数列中的任一项;

②已知等差数列的任意两项,就可以求出首项和公差,从而可求等差数列中的任一项;

③由等差数列的通项公式可求出数列中的任意一项,也可判断某数是否为该数列中的项及是第几项.

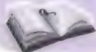
(2)等比数列的给值求值问题

等比数列的通项公式$a_n=a_1q^{n-1}$中有4个变量a_n,a_1,n,q,在这4个变量中可以"知三求一".

①已知等比数列的首项和公比,可以求得任意一项.

②由$a_n=a_mq^{n-m}$可知,已知等比数列的任意两项,可以求出其他的任意一项.

凯尔微博



第一位女数学院士胡和生(一)　胡和生于1928年出生在南京市一个艺术世家,祖父和父亲都是画家. 她从小耳濡目染,聪明好学,画感、乐感很强,祖父和父亲特别喜欢她. 读小学和中学时,她不偏科,文理兼优,这些对她后来从事数学事业帮助很大. 抗战胜利以后,胡和生考进大夏大学数学系,1950年毕业,又报考了浙江大学著名数学家、中国微分几何创始人苏步青教授的硕士研究生.

2. 模板解决步骤

①第一步 根据 $a_n=a_1+(n-1)d$ 或 $a_n=a_1q^{n-1}$ 和结论设出相应的未知数.

②第二步 根据已知条件 p,列出含未知数的式子或方程(组).

③第三步 根据得出的式子或方程(组),解出未知数,从而求得结果.

3. 典型例题

典例 1 (广东高考)已知递增的等差数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1,a_3=a_2^2-4$,则 $a_n=$______.

思路分析:$a_n=a_1+(n-1)d$,a_1 已知,因此只需求出 d 即可.

解析:设公差为 d, ①

则 $a_2=1+d,a_3=1+2d$,代入 $a_3=a_2^2-4$,

得 $1+2d=(1+d)^2-4$, ②

解得 $d=2$ 或 $d=-2$(舍去).

$\therefore a_n=1+(n-1)\cdot 2=2n-1$. ③

答案:$2n-1$

典例 2 (江西高考)等比数列$\{a_n\}$中,$|a_1|=1,a_5=-8a_2,a_5>a_2$,则 $a_n=$( ).

A. $(-2)^{n-1}$ B. $-(-2)^{n-1}$

C. $(-2)^n$ D. $-(-2)^n$

解析:设数列$\{a_n\}$的公比为 q, ①

由 $a_5=-8a_2$,得 $a_1q^4=-8a_1q$, ②

即 $q=-2$,由 $|a_1|=1$ 得 $a_1=\pm1$.

当 $a_1=-1,a_5=-16<a_2=2$,与题意不符,舍去;

当 $a_1=1$ 时,$a_5=16>a_2=-2$,符合题意,

$\therefore a_n=a_1q^{n-1}=(-2)^{n-1}$. ③

答案:A

知识要点

1. 等差数列的相关概念

(1)等差数列的定义

一般地,如果一个数列从第 2 项起,每一项与它的前一项的差等于同一个常数,那么这个数列叫作等差数列,这个常数叫作等差数列的公差,公差通常用字母 d 表示.

(2)等差中项

由三个数 a,A,b 组成的等差数列可以看成最简单的等差数列. 这时,A 叫作 a 与 b 的等差中项. 此时,$a+b=2A$,$A=\frac{a+b}{2}$.

(3)等差数列的通项公式

等差数列$\{a_n\}$的首项为 a_1,公差为 d,则 $a_n=a_1+(n-1)d$.

特别提示

在等差数列$\{a_n\}$中,

(1)$a_n=a_m+(n-m)d(m,n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)由数列的任意两项求公差:$d=\frac{a_n-a_m}{n-m}(n\neq m)$.

2. 等比数列的相关概念

(1)等比数列的定义

一般地,如果一个数列从第 2 项起,每一项与它的前一项的比等于同一常数,那么这个数列叫作等比数列,这个常数叫作等比数列的公比,通常用字母 q 表示($q\neq0$).

特别提示

(1)等比数列中任一项都不为 0,且公比$q\neq0$.

(2)若一个数列为常数列,则此数列一定是等差数列,但不一定是等比数列,如:0,0,0,….

(2)等比中项

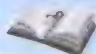
如果在 a 与 b 中间插入一个数 G,使 a,G,b 成等比数列,那么 G 叫作 a 与 b 的等比中项,此时,$G^2=ab$.

特别提示

(1)任意两个数都有等差中项,但不一定有等比中项. 只有当两个数同号且不为 0 时,才有等比中项.

(2)两个数 a,b 的等差中项只有一个,两个同号且不为 0 的数的等比中项有两个.

第一位女数学院士胡和生(二) 1952 年院系调整,苏教授与她转入了上海复旦大学. 复旦是以苏步青为首的我国微分几何学派的策源地,人才济济,加之老一辈数学家的鼓励指导,同行的互勉竞争,托着这颗新星冉冉升起. 胡和生长期从事微分几何研究,在微分几何领域里取得了系统、深入、富有创造性的成就.



(3)等比数列的通项公式

等比数列$\{a_n\}$首项为a_1,公比为q,则$a_n=a_1q^{n-1}$.

特别提示

若已知等比数列$\{a_n\}$的任意一项a_m和公比q,可求通项公式:$a_n=a_m\cdot q^{n-m}(m,n\in\mathbf{N}^*)$.

模板演练

➡ 答案详见 P425

1. (重庆高考)在等差数列$\{a_n\}$中,$a_2=2,a_3=4$,则a_{10}=(　　).

A. 12　　B. 14　　C. 16　　D. 18

2. (江西高考)等比数列$x,3x+3,6x+6,\cdots$的第四项等于(　　)

A. −24　　B. 0　　C. 12　　D. 24

3. (重庆高考)在等比数列$\{a_n\}$中,$a_{2\,010}=8a_{2\,007}$,则公比q的值为(　　).

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 8

4. (重庆高考)若$2,a,b,c,9$成等差数列,则$c-a$=______.

模板6　等差或等比数列的判定【5年24考】

模板探究

母题呈现	模板导入
(天津高考)已知数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$满足$b_{n+1}a_n+b_na_{n+1}=(-2)^n+1,b_n=\frac{3+(-1)^{n-1}}{2},n\in\mathbf{N}^*$,且$a_1=2$. (1)求$a_2,a_3$的值; (2)设$c_n=a_{2n+1}-a_{2n-1},n\in\mathbf{N}^*$,证明$\{c_n\}$是等比数列.	本模板解决的是"已知数列$\{a_n\}$满足条件p,$b_n=f(a_n)$,证明或判断$\{b_n\}$是等差或等比数列"的问题.
解:(1)由$b_n=\frac{3+(-1)^{n-1}}{2},n\in\mathbf{N}^*$,可得 $b_n=\begin{cases}2,n\text{ 是奇数},\\1,n\text{ 是偶数},\end{cases}$ $b_{n+1}a_n+b_na_{n+1}=(-2)^n+1$, 当$n=1$时,$a_1+2a_2=-1$,由$a_1=2$,得$a_2=-\frac{3}{2}$; 当$n=2$时,$2a_2+a_3=5$,可得$a_3=8$. (2)证明:对任意$n\in\mathbf{N}^*$, $a_{2n-1}+2a_{2n}=-2^{2n-1}+1$, $2a_{2n}+a_{2n+1}=2^{2n}+1$, 两式相减得$a_{2n+1}-a_{2n-1}=3\times2^{2n-1}$,即$c_n=3\times2^{2n-1}$, 于是$\frac{c_{n+1}}{c_n}=4$,所以$\{c_n\}$是等比数列.	第一步　当n是奇数和当n是偶数时,对式子$b_{n+1}a_n+b_na_{n+1}=(-2)^n+1$化简. 第二步　结合$c_n=a_{2n+1}-a_{2n-1}$,把上面得到的两个式子作差,求出$\{c_n\}$的通项公式. 第三步　根据等比数列的定义即证得结论.

凯尔微博



第一位女数学院士胡和生(三)　例如,对超曲面的变形理论,常曲率空间的特征问题,她发展和改进了法国微分几何大师嘉当等人的工作.1960−1965年,她研究有关齐次黎曼空间运动群方面的问题,给出了确定黎曼空间运动空隙性的一般有效方法,解决了六十年前意大利数学家福比尼所提出的问题.

模板攻略

1. 模板解决思路

(1)等差数列的判定方法有:①定义法;②等差中项法;③通项公式法;④前 n 项和公式法.

(2)等比数列的判定方法有:①定义法;②等比中项法;③通项公式法.

2. 模板解决步骤

1 第一步　将已知条件 p 化简,得到较简形式或和 b_n 有关的形式.

2 第二步　利用 $b_n=f(a_n)$,代入条件 p,得到关于 b_n 的关系式.

3 第三步　化简关于 b_n 的关系式,证明$\{b_n\}$是等差或等比数列.

3. 典型例题

典例 1　(江西高考)在△ABC 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,已知 $\sin A\sin B+\sin B\sin C+\cos 2B=1$.

(1)求证:a,b,c 成等差数列;

(2)若 $C=\frac{2\pi}{3}$,求 $\frac{a}{b}$ 的值.

解:(1)证明:由已知得 $\sin A\sin B+\sin B\sin C=2\sin^2 B$,因为 $\sin B\neq 0$,所以 $\sin A+\sin C=2\sin B$,由正弦定理,有 $a+c=2b$,　①~②

即 a,b,c 成等差数列.　③

(2)由 $C=\frac{2\pi}{3}$,$c=2b-a$ 及余弦定理得 $(2b-a)^2=a^2+b^2+ab$,即有 $5ab-3b^2=0$,所以 $\frac{a}{b}=\frac{3}{5}$.

典例 2　(安徽高考)设数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$中的每一项都不为 0. 证明$\{a_n\}$为等差数列的充分必要条件是:对任何 $n\in\mathbf{N}^*$,都有 $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}$.

思路分析:必要性可利用 $\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$裂项相消可证,充分性可根据条件中的"对任何 $n\in\mathbf{N}^*$,等式成立",对 n 和 $n+1$ 时,写出等式,两式相减,得一简化式,然后化简可得.

证明:先证必要性.

设数列$\{a_n\}$的公差为 d. 若 $d=0$,则所述等式显然成立.

若 $d\neq 0$,则

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{a_2-a_1}{a_1a_2}+\frac{a_3-a_2}{a_2a_3}+\cdots+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_na_{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{d}\left[\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{d}\cdot\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{d}\cdot\frac{a_{n+1}-a_1}{a_1a_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$

再证充分性.

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}},$$

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_na_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{n+1}{a_1a_{n+2}}.\quad ①$$

两式相减得 $\frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}}=\frac{n+1}{a_1a_{n+2}}-\frac{n}{a_1a_{n+1}}$,

在上式两端同乘 $a_1a_{n+1}a_{n+2}$,得 $a_1=(n+1)a_{n+1}-na_{n+2}$.

同理可得 $a_1=na_n-(n-1)a_{n+1}$.

两式相减得 $2na_{n+1}=n(a_{n+2}+a_n)$,　②

即 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$,所以$\{a_n\}$是等差数列.　③

知识要点

1. 判断一个数列是等差数列的方法

(1)定义法:$a_{n+1}-a_n=d$(常数)$(n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列.

(2)等差中项法:$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列.

(3)通项公式法:$a_n=pn+q$(p,q 为常数,$n\in\mathbf{N}^*$)$\Leftrightarrow\{a_n\}$是等差数列.

(4)前 n 项和公式法:$S_n=An^2+Bn$(A,B 为常数,

必修5

第一位女数学院士胡和生(四)　她把这个结果,整理在与自己的丈夫谷超豪合著的《齐性空间微分几何》一书中,受到同行称赞. 她早期在我国最高学术刊物之一《数学学报》上发表了《共轭的仿射联络的扩充》(1953 年)、《论射影平坦空间的一个特征》(1958 年)、《关于黎曼空间的运动群与迷向群》(1964 年)等重要论文. 至今,她发表了七十多篇(部)论文、论著.



$n\in\mathbf{N}^*$)⇔$\{a_n\}$是等差数列.

特别提示

如果要证明一个数列是等差数列,则必须用定义法或等差中项法.

2. 判断一个数列是等比数列的方法

(1)定义法:$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$(q是不为0的常数,$n\in\mathbf{N}^*$)⇔$\{a_n\}$是等比数列.

(2)等比中项法:$a_{n+1}^2=a_n\cdot a_{n+2}$($a_n\cdot a_{n+1}\cdot a_{n+2}\neq 0$,$n\in\mathbf{N}^*$)⇔$\{a_n\}$是等比数列.

(3)通项公式法:$a_n=cq^n$(c,q均是不为0的常数,$n\in\mathbf{N}^*$)⇔$\{a_n\}$是等比数列.

特别提示

判断一个数列是否是等比数列,还有一种直观的判断方法,即前n项和公式法:若S_n表示数列$\{a_n\}$的前n项和,且$S_n=-aq^n+a$($a\neq 0$,$q\neq 0$,$q\neq 1$),则数列$\{a_n\}$是公比为q的等比数列.但此方法不能用于证明一个数列是等比数列.

模板演练

➡ 答案详见 P426

1. 数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,若$a_n+S_n=n$,$c_n=a_n-1$.求证:数列$\{c_n\}$是等比数列.

2. 已知$\frac{1}{a}$,$\frac{1}{b}$,$\frac{1}{c}$成等差数列,求证:$\frac{b+c-a}{a}$,$\frac{a+c-b}{b}$,$\frac{a+b-c}{c}$也成等差数列.

3. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且满足:$a_n+2S_nS_{n-1}=0$($n\geqslant 2$,$n\in\mathbf{N}^*$),$a_1=\frac{1}{2}$,判断$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$与$\{a_n\}$是否为等差数列,并说明你的理由.

4. (湖北高考)已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足:$a_1=\lambda$,$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+n-4$,$b_n=(-1)^n(a_n-3n+21)$,其中$\lambda$为实数,$n$为正整数.

(1)对任意实数λ,证明数列$\{a_n\}$不是等比数列;

(2)试判断数列$\{b_n\}$是否为等比数列,并证明你的结论.

凯尔微博



第一位女数学院士胡和生(五) 她在射影微分几何、黎曼空间完全运动群、规范场等研究方面都有很好的建树,成为国际上有相当影响和知名度的女数学家.她的一些成果处于国际领先或国际先进水平.例如,在调和映照的研究中,她撰写的专著《孤立子理论与应用》,发展了"孤立子理论与几何理论"的成果,处于世界领先地位.

模板7 由等差或等比数列性质求值【每年必考】

模板探究

母题呈现	模板导入
(江西高考)设数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都是等差数列,若$a_1+b_1=7$,$a_3+b_3=21$,则$a_5+b_5=$______.	本模板解决的是"根据等差或等比数列的性质求解数列中的项的和、积"的问题.
解析:因为数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都是等差数列, 所以数列$\{a_n+b_n\}$也是等差数列. 故由等差中项的性质,得 $(a_5+b_5)+(a_1+b_1)=2(a_3+b_3)$,即$(a_5+b_5)+7=2\times21$, 解得$a_5+b_5=35$. **答案**:35	第一步　观察已知条件和所求式子之间的关系. 第二步　由$\{a_n\}$,$\{b_n\}$是等差数列$\Rightarrow\{a_n+b_n\}$是等差数列. 第三步　由$\{a_n+b_n\}$是等差数列$\Rightarrow(a_5+b_5)+(a_1+b_1)=2(a_3+b_3)$,即得结果.

模板攻略

1. 模板解决思路

根据等差或等比数列的性质求值,首先要对所求值进行分析,然后通过利用等差或等比数列的性质进行转化,逐步向已知条件靠拢,从而求出所要求的值.

2. 模板解决步骤

①第一步　观察已知条件和所求未知量的结构特点.

②第二步　选择相对应的等差或等比数列的性质列出相应的等量关系式.

③第三步　整理化简,求得代数式的值.

3. 典型例题

典例1　(辽宁高考)在等差数列$\{a_n\}$中,已知$a_4+a_8=16$,则$a_2+a_{10}=$(　　).

A. 12　　B. 16　　C. 20　　D. 24

解析:$\because 4+8=2+10$,　①

$\therefore$结合等差数列的性质,得

$a_2+a_{10}=a_4+a_8=16$.　②~③

答案:B

典例2　(全国高考)已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$中,$a_1a_2a_3=5$,$a_7a_8a_9=10$,则$a_4a_5a_6=$(　　).

A. $5\sqrt{2}$　　B. 7　　C. 6　　D. $\sqrt{2}$

解析:$\because\{a_n\}$是等比数列,$\therefore\frac{a_4a_5a_6}{a_1a_2a_3}=\frac{a_7a_8a_9}{a_4a_5a_6}=q^9$,　①

故$(a_4a_5a_6)^2=(a_1a_2a_3)\cdot(a_7a_8a_9)=50$.　②

又$a_n>0$,$\therefore a_4a_5a_6=5\sqrt{2}$.　③

答案:A

必修5

知识要点

1. 等差数列的单调性

等差数列$\{a_n\}$首项为a_1,公差为d,则

$d>0\Leftrightarrow$等差数列$\{a_n\}$是递增数列;

$d=0\Leftrightarrow$等差数列$\{a_n\}$是常数列;

第一位女数学院士胡和生(六)　1982年,胡和生与合作者获国家自然科学三等奖;1984年起担任《数学学报》副主编,并担任中国数学会副理事长;1989年被聘为我国数学界的"陈省身数学奖"的评委;1992年当选为中国科学院数学物理学部委员(1994年改称院士),至今选出来的数学家院士,只有胡和生一人是女性.



$d<0 \Leftrightarrow$ 等差数列$\{a_n\}$是递减数列.

2. 等差数列的性质

若数列$\{a_n\}$是首项为a_1,公差为d的等差数列,则它具有下列性质:

(1)若$\frac{m+n}{2}=k$,则$a_m+a_n=2a_k(m,n,k\in\mathbf{N}^*)$.

(2)若$m+n=p+q(m,n,p,q\in\mathbf{N}^*)$,则$a_m+a_n=a_p+a_q$.

(3)若数列$\{a_n\}$是有穷的等差数列,则与首、末两项等距离的两项之和都相等,且等于首、末两项之和,即$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=\cdots=a_i+a_{n+1-i}=\cdots$.

(4)数列$\{\lambda a_n+b\}$(λ,b是常数)是公差为λd的等差数列.

(5)下标成等差数列且公差为m的项$a_k,a_{k+m},a_{k+2m},\cdots(k,m\in\mathbf{N}^*)$组成公差为$md$的等差数列.

(6)若数列$\{b_n\}$也是等差数列,则数列$\{a_n\pm b_n\}$,$\{ka_n+b_n\}$(k为非零常数)也是等差数列.

(7)项数间隔相等或连续等长的片段和仍构成等差数列. 例如:$a_1,a_3,a_5,\cdots$构成等差数列. 再如:$a_1+a_2+a_3,a_4+a_5+a_6,a_7+a_8+a_9,\cdots$也构成等差数列.

特别提示

在等差数列$\{a_n\}$中,若$m+n=2p$,则$a_m+a_n=a_{2p}$不一定成立,当首项与公差相等时,此等式成立;但$a_m+a_n=2a_p$一定成立.

3. 等比数列的单调性

等比数列$\{a_n\}$首项为a_1,公比为q,则

(1)当$q>1,a_1>0$或$0<q<1,a_1<0$时,等比数列$\{a_n\}$是递增数列.

(2)当$q>1,a_1<0$或$0<q<1,a_1>0$时,等比数列$\{a_n\}$是递减数列.

(3)当$q=1$,等比数列$\{a_n\}$是常数列.

(4)当$q<0$,等比数列$\{a_n\}$是摆动数列.

4. 等比数列的性质

设$\{a_n\}$是公比为q的等比数列,那么

(1)数列$\{a_n\}$是有穷数列,则与首末两项等距离的两项的积相等,且等于首末两项之积,即

$a_1\cdot a_n=a_2\cdot a_{n-1}=a_3\cdot a_{n-2}=\cdots=a_m\cdot a_{n-m+1}$.

(2)数列$\{\lambda a_n\}$(λ为不等于零的常数)仍是公比为q的等比数列;若数列$\{b_n\}$是公比为q'的等比数列,则数列$\{a_n\cdot b_n\}$是公比为$q\cdot q'$的等比数列;数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是公比为$\frac{1}{q}$的等比数列;数列$\{|a_n|\}$是公比为$|q|$的等比数列.

(3)在数列$\{a_n\}$中,每隔$k(k\in\mathbf{N}^*)$项取出一项,按原来的顺序排列,所得数列仍为等比数列,且公比为q^{k+1}.

(4)当数列$\{a_n\}$是各项都为正数的等比数列时,数列$\{\lg a_n\}$是公差为$\lg q$的等差数列.

(5)在数列$\{a_n\}$中,连续相邻k项的和或积构成公比为q^k或q^{k^2}的等比数列.(相邻k项的和都不为0).

(6)若$m,n,p(m,n,p\in\mathbf{N}^*)$成等差数列,则$a_m,a_n,a_p$成等比数列,即$a_n^2=a_m\cdot a_p$.

特别提示

在等比数列$\{a_n\}$中,若$m+n=2p$,则$a_ma_n=a_{2p}(m,n,p\in\mathbf{N}^*)$不一定成立,当首项与公比相等时,此等式成立;但$a_ma_n=a_p^2$一定成立.

模板演练

→ 答案详见 P426

1. (福建高考)等差数列$\{a_n\}$中,$a_1+a_5=10,a_4=7$,则数列$\{a_n\}$的公差为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. (安徽高考)公比为$\sqrt[3]{2}$的等比数列$\{a_n\}$的各项都是正数,且$a_3a_{11}=16$,则$\log_2 a_{16}=$(　　).

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

3. (重庆高考)在等差数列$\{a_n\}$中,$a_1+a_9=10$,则a_5的值为(　　).

A. 5　　B. 6　　C. 8　　D. 10

4. (全国高考)如果等差数列$\{a_n\}$中,$a_3+a_4+a_5=12$,

凯尔微博



数学家的故事——苏步青(一) 苏步青,1902年9月出生在浙江省平阳县的一个山村里. 虽然家境清贫,可他父母省吃俭用,拼死拼活也要供他上学. 他在读初中时,对数学并不感兴趣,觉得数学太简单,一学就懂. 可是,后来的一堂数学课影响了他一生的道路. 那是苏步青上初三时,他就读的浙江省六十中来了一位刚从东京留学归来的教数学的杨老师.

那么 $a_1+a_2+\cdots+a_7=$(　　).

A. 14　　B. 21　　C. 28　　D. 35

5. (北京高考)在等比数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,公比$|q|\neq 1$. 若$a_m=a_1a_2a_3a_4a_5$,则 $m=$(　　).

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

6. (重庆高考)在等差数列$\{a_n\}$中,$a_3+a_7=37$,则 $a_2+a_4+a_6+a_8=$______.

模板 8　求成等差或等比数列的几个数

模板探究

母题呈现	模板引入
三个数成等差数列,它们的和是 15,它们的平方和等于 83,求这三个数.	本模板解决的是"已知几个数成等差或等比数列,且满足条件 p,求这几个数"的问题.
解:设这三个数为 $a-d,a,a+d$, 则由它们的和是 15,它们的平方和等于 83,可列出方程得 $\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=15,\\(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=83,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}3a=15,\\3a^2+2d^2=83,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=5,\\d=2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=5,\\d=-2.\end{cases}$ 故所求的三个数为 3,5,7 或 7,5,3.	第一步　设出这三个数:$a-d,a,a+d$. 第二步　根据题意列方程组. 第三步　解方程组,并求出这三个数.

模板攻略

1. 模板解决思路

对于等差、等比数列的综合运算问题,应该合理地设出所求量中的三个,根据题意得出另一个,这是解决这类问题的关键.一般来说,三个数成等比数列时可设$\frac{a}{q}$,a,aq;三个数成等差数列时可设$a-d$,a,$a+d$;四个数成等差数列时,可设为 $a-3d$,$a-d$,$a+d$,$a+3d$,但当四个数成等比数列时,不能设成$\frac{a}{q^3}$,$\frac{a}{q}$,aq,aq^3,这样隐含了公比 $q^2>0$ 这一条件,可能会丢根.

2. 模板解决步骤

1 第一步　设未知数 x 和公差(或公比),用来将这几个数表示出来.

2 第二步　利用已知条件 p,列出方程组.

3 第三步　解方程组,求出这几个数.

3. 典型例题

典例 1　成等差数列的四个数之和为 26,第二个数与第三个数之积为 40,求这四个数.

解:设这四个数为 $a-3d,a-d,a+d,a+3d$,　①

则由题意得$\begin{cases}(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=26,\\(a-d)(a+d)=40,\end{cases}$　②

即$\begin{cases}4a=26,\\a^2-d^2=40,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=\frac{13}{2},\\d=\frac{3}{2},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{13}{2},\\d=-\frac{3}{2}.\end{cases}$

必修 5

数学家的故事——苏步青(二)　第一堂课杨老师没有讲数学,而是讲故事.他说:"当今世界,弱肉强食,世界列强依仗船坚炮利,都想蚕食瓜分中国.中华亡国灭种的危险迫在眉睫,振兴科学,发展实业,救亡图存,在此一举.'天下兴亡,匹夫有责',在座的每一位同学都有责任."他旁征博引,讲述了数学在现代科学技术发展中的巨大作用.



$\therefore$ 所求四个数为 2,5,8,11,或 11,8,5,2. ③

典例 2　有四个数,前三个数成等比数列,后三个数成等差数列,第一个数与第四个数的和为 21,中间两个数的和为 18,求这四个数.

解:方法一:设前三个数分别为 $\frac{a}{q}$,a,$aq(q\neq0)$, ①

则第四个数为 $2aq-a$,

由题意得 $\begin{cases}\frac{a}{q}+(2aq-a)=21,\\a+aq=18,\end{cases}$ ②

解得 $q=2$ 或 $q=\frac{3}{5}$,

当 $q=2$ 时,$a=6$,这四个数为 3,6,12,18; ③

当 $q=\frac{3}{5}$ 时,$a=\frac{45}{4}$,这四个数为 $\frac{75}{4}$,$\frac{45}{4}$,$\frac{27}{4}$,$\frac{9}{4}$. ③

方法二:设后三个数为 $a-d$,a,$a+d$, ①

则第一个数为 $\frac{(a-d)^2}{a}$,

因此这四个数为 $\frac{(a-d)^2}{a}$,$a-d$,a,$a+d$.

由题意得 $\begin{cases}\frac{(a-d)^2}{a}+(a+d)=21,\\a-d+a=18,\end{cases}$ ②

解得 $\begin{cases}a=12,\\d=6,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{27}{4},\\d=-\frac{9}{2}.\end{cases}$

这四个数为 3,6,12,18 或 $\frac{75}{4}$,$\frac{45}{4}$,$\frac{27}{4}$,$\frac{9}{4}$. ③

知识要点

1. 等差数列的设项方法

(1)若所给等差数列为 $2n(n\in\mathbf{N}^*)$项,则这个数列可设为:$a-(2n-1)d,\cdots,a-3d,a-d,a+d,a+3d,\cdots,a+(2n-1)d$,此数列的公差为 $2d$.

(2)若所给等差数列的项数为 $2n+1(n\in\mathbf{N}^*)$项,则这个数列可设为:$a-nd,a-(n-1)d,\cdots,a-d,a,a+d,\cdots,a+(n-1)d,a+nd$,此数列的公差为 d.

2. 等比数列的设项方法

已知三个数成等比数列,且已知三个数之积时,一般设此三个数分别为 $\frac{a}{q}$,a,aq,其中 q 为公比. 这样立即就可求出 a 的值,从而减少解题的计算量. 但若已知四个数成等比数列及这四个数的积时,一般不设为 $\frac{a}{q^3}$,$\frac{a}{q}$,aq,aq^3,因为这种设法使得四个数的公比为 q^2. 漏掉公比为负数的情形,造成漏解.

必修 5

模板演练

➡ 答案详见 P427

1. 若三个实数成等比数列,第一个数与第三个数的积为 4,三个数的和为 3,求这三个数.

2. 若四个数成等比数列,将这四个数分别减去 1,1,4,13 后所得的数成等差数列,求这四个数.

凯尔微傳



数学家的故事——苏步青(三)　这堂课的最后一句话是:"为了救亡图存,必须振兴科学. 数学是科学的开路先锋,为了发展科学,必须学好数学."苏步青一生不知听过多少堂课,但这一堂课使他终身难忘. 杨老师的课深深地打动了他,给他的思想注入了新的兴奋剂. 读书,不仅为了摆脱个人困境,而是要拯救中国广大的苦难民众;读书,不仅是为了个人找出路,而是为中华民族求新生.

3. 在四个数中,前三个成等差数列,和为 48,后三个成等比数列,积为 8 000.求这四个数.

4. 三个正数成等差数列,它们的和等于 15,如果它们分别加上 1,3,9,就成为等比数列,求此三个数.

5. 已知四个数依次成等差数列,且四个数的平方和为 94,首尾两数之积比中间两数之积少 18,求这四个数.

模板 9　求等差或等比数列的前 n 项和 【每年必考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(新课标全国高考)设首项为 1,公比为 $\frac{2}{3}$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,则(　　). A. $S_n=2a_n-1$　　B. $S_n=3a_n-2$ C. $S_n=4-3a_n$　　D. $S_n=3-2a_n$	本模板解决的是"已知等差数列、等比数列和条件 p,求数列的前 n 项和"的问题.
解析: 因为 $a_1=1$,公比 $q=\frac{2}{3}$,所以 $a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]=3-2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=3-2a_n$,故选 D. **答案:** D	第一步　结合选项,根据已知 $a_1=1,q=\frac{2}{3}$ 求 a_n. 第二步　根据前 n 项和公式化简,即得出 S_n 与 a_n 的关系.

数学家的故事——苏步青(四)　当天晚上,苏步青辗转反侧,彻夜难眠.在杨老师的影响下,苏步青的兴趣从文学转向了数学,并从此立下了"读书不忘救国,救国不忘读书"的座右铭.一迷上数学,不管是酷暑隆冬,霜晨雪夜,苏步青只知道读书、思考、解题、演算,4 年中演算了上万道数学习题.现在温州一中(即当时省立十中)还珍藏着苏步青一本几何练习簿,用毛笔书写,工工整整.



模板攻略

1. 模板解决思路

(1)由等差数列的前 n 项和公式及通项公式可知若已知 a_1,d,n,a_n,S_n 中三个便可求出其余两个,即"知三求二","知三求二"的实质是方程思想,即建立方程组求解.

(2)在等比数列的通项公式及前 n 项和公式中共有 a_1,a_n,n,q,S_n 五个量,知道其中任意三个量,都可以求出其余两个量.

2. 模板解决步骤

1 第一步　结合所求结论,寻找已知与未知的关系.

2 第二步　根据已知条件列方程求出未知量.

3 第三步　利用前 n 项和公式求得结果.

3. 典型例题

典例 1　(重庆高考)在等差数列$\{a_n\}$中,$a_2=1,a_4=5$,则$\{a_n\}$的前 5 项和 $S_5=$(　　).

A. 7　　B. 15　　C. 20　　D. 25

解析:因为 $a_2=1,a_4=5$,所以 $a_1+a_5=a_2+a_4=6$,　①~②

所以数列的前 5 项和 $S_5=\frac{5(a_1+a_5)}{2}=\frac{5}{2}\times6=15.$　③

答案:B

典例 2　(天津高考)已知$\{a_n\}$是首项为 1 的等比数列,S_n 是$\{a_n\}$的前 n 项和,且 $9S_3=S_6$,则数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前 5 项和为(　　).

A. $\frac{15}{8}$或 5　　B. $\frac{31}{16}$或 5

C. $\frac{31}{16}$　　D. $\frac{15}{8}$

解析:由题意可知 $\frac{9(1-q^3)}{1-q}=\frac{1-q^6}{1-q}$,

解得 $q=2$,　①~②

数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是以 1 为首项,以$\frac{1}{2}$为公比的等比数列,

由求和公式可得 $S_5=\frac{31}{16}$,故选 C.　③

答案:C

知识要点

1. 等差数列的前 n 项和公式

等差数列$\{a_n\}$的首项是 a_1,公差是 d,则其前 n 项和公式为 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$

2. 等比数列的前 n 项和公式

等比数列$\{a_n\}$首项为 a_1,公比为 q,则其前 n 项和为:

$$S_n=\begin{cases}na_1(q=1),\\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}(q\neq1).\end{cases}$$

特别提示

在应用等比数列的求和公式时,一定要注意公式的前提条件 $q\neq1$,特别是在等比数列的公比未知或含有字母参数时,应分 $q=1$ 和 $q\neq1$ 两种情况.

模板演练

➡ 答案详见 P427

1. (辽宁高考)在等差数列$\{a_n\}$中,已知 $a_4+a_8=16$,则该数列前 11 项和 $S_{11}=$(　　).

A. 58　　B. 88　　C. 143　　D. 176

2. (辽宁高考)设$\{a_n\}$是由正数组成的等比数列,S_n



数学家的故事——苏步青(五)　中学毕业时,苏步青门门功课都在 90 分以上. 17 岁时,苏步青赴日留学,并以第一名的成绩考取东京高等工业学校,在那里他如饥似渴地学习着. 为国争光的信念驱使苏步青较早地进入了数学的研究领域,在完成学业的同时,写了 30 多篇论文,在微分几何方面取得令人瞩目的成果,并于 1931 年获得理学博士学位.

为其前 n 项和. 已知 $a_2a_4=1$，$S_3=7$，则 $S_5=$(　　).

A. $\frac{15}{2}$　　B. $\frac{31}{4}$　　C. $\frac{33}{4}$　　D. $\frac{17}{2}$

3. (浙江高考)设 S_n 为等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和，$8a_2+a_5=0$，则$\frac{S_5}{S_2}=$(　　).

A. -11　　B. -8　　C. 5　　D. 11

4. (重庆高考)首项为 1，公比为 2 的等比数列的前 4 项和 $S_4=$______.

5. (天津高考)已知$\{a_n\}$是等差数列，S_n 为其前 n 项和，$n\in\mathbf{N}^*$. 若 $a_3=16$，$S_{20}=20$，则 S_{10} 的值为______.

6. (北京高考)已知等差数列$\{a_n\}$，S_n 为其前 n 项和. 若 $a_1=\frac{1}{2}$，$S_2=a_3$，则 $a_2=$______，$S_n=$______.

7. (浙江高考)设公比为 $q(q>0)$的等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n. 若 $S_2=3a_2+2$，$S_4=3a_4+2$，则 $q=$______.

模板 10　有关等差或等比数列前 n 项和性质的问题

【5年6考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(新课标全国高考)设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_{m-1}=-2$，$S_m=0$，$S_{m+1}=3$，则 $m=$(　　). A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6	本模板解决的是"已知等差或等比数列的前 n 项和满足条件 p，求数列中参数的值或前 n 项和或项或项数"的问题.
解析：∵ 数列$\{a_n\}$为等差数列，且前 n 项和为 S_n， ∴ 数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$也为等差数列. ∴ $\frac{S_{m-1}}{m-1}+\frac{S_{m+1}}{m+1}=\frac{2S_m}{m}$，即 $\frac{-2}{m-1}+\frac{3}{m+1}=0$， 解得 $m=5$. 经检验为原方程的解. 故选 C. **答案**：C	第一步：观察已知条件 S_{m-1}，S_m，S_{m+1} 的特点. 第二步：由$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$为等差数列得出关于 m 的方程. 第三步：解方程即得 m 的值.

模板攻略

1. 模板解决思路

利用等差或等比数列前 n 项和的性质求参数时，首先要掌握好等差数列前 n 项和的性质，然后利用性质对已知条件进行适当的转化与化简，从而求得参数的值，以利用参数的值进一步解决待解问题.

2. 模板解决步骤

①第一步　认真阅读已知条件中有关前 n 项和的信息.

②第二步　根据等差或等比数列前 n 项和的性质列方程(或等式).

③第三步　求解，得出结论.

3. 典型例题

典例 1　(安徽高考)设$\{a_n\}$是任意等比数列，它的前 n 项和，前 $2n$ 项和与前 $3n$ 项和分别为 X，Y，Z，则下列等式中恒成立的是(　　).

A. $X+Z=2Y$　　B. $Y(Y-X)=Z(Z-X)$

C. $Y^2=XZ$　　D. $Y(Y-X)=X(Z-X)$

解析：根据等比数列前 n 项和的性质：若$\{a_n\}$是等比数列，则 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$ 也成等比数列，　①

必修 5

数学家的故事——苏步青(六)　获得博士之前，苏步青已在日本帝国大学数学系当讲师，正当日本一个大学准备聘他去任待遇优厚的副教授时，苏步青却决定回到抚育他成长的祖国任教. 回到浙江大学任教授的苏步青，生活十分艰苦. 面对困境，苏步青的回答是："吃苦算得了什么，我甘心情愿，因为我选择了一条正确的道路，这是一条爱国的光明之路啊！"



即 $X,Y-X,Z-Y$ 成等比数列，故 $(Y-X)^2=X(Z-Y)$， ②
整理得 $Y(Y-X)=X(Z-X)$，故选 D. ③

答案：D

典例 2 在项数为 $2n+1$ 的等差数列中，所有奇数项的和为 165，所有偶数项的和为 150，则 n 等于(　　).

A. 9　　B. 10　　C. 11　　D. 12

解析：$\because \frac{S_奇}{S_偶}=\frac{n+1}{n}$， ①~②

$\therefore \frac{165}{150}=\frac{n+1}{n}$，$\therefore n=10$. 故选 B. ③

答案：B

知识要点

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若公差为 d，前 n 项和为 S_n，那么：

(1) $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 也成等差数列，其首项与 $\{a_n\}$ 首项相同，公差是 $\{a_n\}$ 的公差的 $\frac{1}{2}$.

(2) 数列 $S_k,S_{2k}-S_k,S_{3k}-S_{2k},\cdots(k\in\mathbf{N}^*)$ 是等差数列，其公差等于 k^2d.

(3) 若项数为偶数 $2n(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $S_{2n}=n(a_1+a_{2n})=n(a_2+a_{2n-1})=\cdots=n(a_n+a_{n+1})$（$a_n$ 与 a_{n+1} 为中间的两项），且 $S_偶-S_奇=nd$，$\frac{S_偶}{S_奇}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

若项数为奇数 $2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $S_{2n-1}=(2n-1)a_n$（a_n 为中间项），且 $S_奇-S_偶=a_n$，$\frac{S_偶}{S_奇}=\frac{n-1}{n}$. 其中 $S_奇=na_n$，$S_偶=(n-1)a_n$.

(4) 若 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都为等差数列，S_n,S'_n 分别为它们前 n 项和，则 $\frac{a_m}{b_m}=\frac{S_{2m-1}}{S'_{2m-1}}$.

2. 等比数列前 n 项和公式的性质

(1) 若 $\{a_n\}$ 为等比数列，S_n 为其前 n 项和，则 $S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n},\cdots$，仍构成等比数列，即有 $(S_{2n}-S_n)^2=S_n\cdot(S_{3n}-S_{2n})$.

(2) 若某数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式为 $S_n=a^n-1(a\neq0,a\neq1)$，则 $\{a_n\}$ 为等比数列.

(3) 在等比数列中，若项数为 $2n(n\in\mathbf{N}^*)$，$S_偶$ 与 $S_奇$ 分别为偶数与奇数项的和，则 $S_偶\div S_奇=q$；若项数为 $2n+1$，则 $\frac{S_奇-a_1}{S_偶}=q$.

(4) 若 $\{a_n\}$ 是公比为 q 的等比数列，则 $S_{n+m}=S_n+q^n\cdot S_m$.

必修 5

模板演练

➡ 答案详见 P428

1. 已知等比数列的公比为 2，且前 5 项和为 1，那么前 10 项和等于(　　).

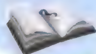
A. 31　　B. 33　　C. 35　　D. 37

2. 等差数列 $\{a_n\}$ 中，$S_4=1$，$S_8=4$，则 $a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=$ ______.

3. 一个项数为偶数的等比数列，全部各项之和为偶数项之和的 4 倍，前 3 项之积为 64，求通项公式.

4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$S_{10}=100$，$S_{100}=10$，求 S_{110}.

凯尔微博



高斯的故事(一)　高斯有许多有趣的故事而且第一手资料都来自高斯本人，因为他在晚年时总喜欢谈他小时候的事. 高斯的父亲作为泥瓦厂的工头，每周六总是要发薪水给工人. 在高斯三岁时，有一次他父亲正要发薪水，小高斯站了起来说："爸爸，你弄错了."并说出了另外一个数目，原来他一直跟着他父亲计算给每个人的工钱.

模板 11　等差数列前 n 项和的最值问题 【5年8考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(福建高考)设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n. 若 $a_1=-11$, $a_4+a_6=-6$, 则当 S_n 取得最小值时, n 等于(　　). A. 6　B. 7　C. 8　D. 9	本模板解决的是“在等差数列中求其前 n 项和的最值或求 S_n 取得最大(小)值时的参数值”的问题.
解析:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d, $\because a_4+a_6=-6$, $\therefore a_5=-3$, $\therefore d=\frac{a_5-a_1}{5-1}=2$, $\therefore a_6=-1<0$, $a_7=1>0$, 故当等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 取得最小值时, n 等于 6. **答案**:A	第一步　根据题意求得公差 $d=2>0$. 第二步　因为 $a_1<0, d>0$, 寻找 $a_n\leq 0$ 时的最大正整数 n. 第三步　$n=6$ 即为要求的值.

模板攻略

1. 模板解决思路

(1)求等差数列前 n 项和的最值,常见的思路:

①利用等差数列的单调性,求出其正负转折项,或者利用性质求其正负转折项,便可求得和的最值.

②等差数列的前 n 项和 $S_n=An^2+Bn$(A, B 为常数)为二次函数,利用二次函数的性质求最值.

(2)若需求参数,则可利用求等差数列前 n 项和的方法列出方程(组),解答即可.

2. 模板解决步骤

①第一步　根据已知条件,选择合适的求解方法(二次函数法、图象法、通项公式法).

②第二步　根据上一步选择的方法写出二次函数的最值形式或画出相对应的图象或列出相应的不等式(组).

③第三步　整理得出结论,注意 n 为正整数.

3. 典型例题

典例 1　(安徽高考)已知 a_n 为等差数列, $a_1+a_3+a_5=105$, $a_2+a_4+a_6=99$. 以 S_n 表示$\{a_n\}$的前 n 项和,则使得 S_n 达到最大值的 n 是(　　).

A. 21　　B. 20　　C. 19　　D. 18

解析:$\because a_1+a_3+a_5=105$, $a_2+a_4+a_6=99$,

$\therefore 3a_3=105$, $3a_4=99$, 即 $a_3=35$, $a_4=33$,

$\therefore d=-2$, $a_1=39$, 即 $a_n=41-2n$.　①

令 $a_n>0$ 且 $a_{n+1}<0$, $n\in\mathbf{N}^*$, $\begin{cases}41-2n>0,\\41-2(n+1)<0,\end{cases}$ $n\in\mathbf{N}^*$,　②

解得 $\frac{39}{2}<n<\frac{41}{2}$, 即 $n=20$.　③

答案:B

典例 2　等差数列$\{a_n\}$的首项 $a_1>0$,设其前 n 项和为 S_n,且 $S_5=S_{12}$,则当 n 为何值时, S_n 有最大值?

思路分析:可利用 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$ 及二次函数的性质求解;也可以利用首项 $a_1>0$,公差 $d<0$,找最后一个正项求解;还可以利用 $S_n=An^2+Bn$ 及二次函数图象的对称性求解.

解:方法一:设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,由 $S_5=S_{12}$,

必修 5

高斯的故事(二)　重算的结果证明小高斯是对的,这把站在那里的大人都吓得目瞪口呆. 高斯常带着笑说,他在学说话之前就已经学会计算了. 他还常说,他问了大人字母如何发音后,就能自己学着读起书来. 七岁时高斯进了小学. 大约在十岁时,老师在算数课上出了一道难题:把 1 到 100 的整数写下来,然后把它们加起来!

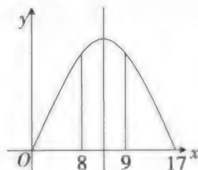
凯尔微博


得 $5a_1+10d=12a_1+66d$，$d=-\frac{1}{8}a_1<0$. ①

所以 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=na_1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\left(-\frac{1}{8}a_1\right)=-\frac{1}{16}a_1(n^2-17n)=-\frac{1}{16}a_1\left(n-\frac{17}{2}\right)^2+\frac{289}{64}a_1$， ②

因为 $a_1>0$，$n\in\mathbf{N}^*$，所以当 $n=8$ 或 $n=9$ 时，S_n 有最大值. ③

方法二：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，同方法一得 $d=-\frac{1}{8}a_1<0$，



由于 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$

$=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$，

设 $f(x)=\frac{d}{2}x^2+(a_1-\frac{d}{2})x$，则函数 $y=f(x)$ 的图象为开口向下的抛物线， ①

由 $S_5=S_{12}$ 知，抛物线的对称轴为 $x=\frac{5+12}{2}=\frac{17}{2}$（如图），由图可知，当 $1\leqslant n\leqslant 8$ 时，S_n 单调递增；当 $n\geqslant 9$ 时，S_n 单调递减. ②

又 $n\in\mathbf{N}^*$，所以当 $n=8$ 或 $n=9$ 时，S_n 最大. ③

方法三：设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，同方法一得 $d=-\frac{1}{8}a_1<0$，设此数列前 n 项和最大，则 $\begin{cases}a_n\geqslant 0,\\a_{n+1}\leqslant 0,\end{cases}$ ①

即 $\begin{cases}a_n=a_1+(n-1)\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)a_1\geqslant 0,\\a_{n+1}=a_1+n\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)a_1\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}n\leqslant 9,\\n\geqslant 8,\end{cases}$

即 $8\leqslant n\leqslant 9$， ②

又 $n\in\mathbf{N}^*$，所以当 $n=8$ 或 $n=9$ 时，S_n 有最大值. ③

误区警示

注意求等差数列的前 n 项和 S_n 的最值时，需要注意"自变量 n 为正整数"这一隐蔽条件. 若对称轴取不到，需考虑最接近对称轴的自变量 n（n 为正整数）；若对称轴对应两个正整数的中间，此时应有两个符合题意的 n 值.

知识要点

1. 等差数列的前 n 项和公式与函数的关系

（1）等差数列前 n 项和 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$ 可以变形为 $S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$，它对应着函数的形式 $f(x)=Ax^2+Bx$.

（2）等差数列（$d\neq 0$）的前 n 项和公式与二次函数有如下表中的关系：

	区别		联系
S_n	定义域为 $\mathbf{N}^*$	图象是一系列孤立的点	（1）解析式都是二次式；（2）S_n 的图象是抛物线 $y=f(x)$ 上的一系列的点
$f(x)$	定义域为 $\mathbf{R}$	图象是一条光滑的抛物线	

（3）当 $A=0,B=0$ 时，$S_n=0$ 是关于 n 的常数函数（此时 $a_1=0,d=0$）；

当 $A=0,B\neq 0$ 时，$S_n=Bn$ 是关于 n 的正比例函数（此时 $a_1\neq 0,d=0$）；

当 $A\neq 0,B\neq 0$ 时，$S_n=An^2+Bn$ 是关于 n 的二次函数（此时 $d\neq 0$）.

2. 解决等差数列的前 n 项和的最值问题的基本方法

（1）二次函数法：用求二次函数最值的方法来求其前 n 项和的最值，但要注意的是 $n\in\mathbf{N}^*$.

（2）图象法：利用二次函数图象的对称性来确定 n 的值，使 S_n 取最值.

（3）通项公式法

①若 $a_1>0,d<0$，S_n 有最大值，可由不等式组 $\begin{cases}a_n\geqslant 0,\\a_{n+1}<0\end{cases}$ 来确定 n.

②若 $a_1<0,d>0$，S_n 有最小值，可由不等式组 $\begin{cases}a_n\leqslant 0,\\a_{n+1}>0\end{cases}$ 来确定 n.

凯尔微博



高斯的故事（三） 每当有考试时他们有如下的习惯：第一个做完的就把石板（写字用）面朝下地放在老师的桌子上. 第二个做完的就把石板摆在第一张石板上，就这样一个一个摞起来. 这个题当然难不倒学过算数级数的人，但这些孩子才刚开始学算数呢！但是还不到几秒钟，高斯就把石板放在讲桌上，说道："答案在这儿！"其他的学生把数字一个个加了起来，额头都出了汗.

模板演练

答案详见 P428

1. (浙江高考)设 S_n 是公差为 $d(d\neq0)$ 的无穷等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和,则下列命题错误的是(　　).

A. 若 $d<0$,则数列$\{S_n\}$有最大项

B. 若数列$\{S_n\}$有最大项,则 $d<0$

C. 若数列$\{S_n\}$是递增数列,则对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,均有 $S_n>0$

D. 若对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,均有 $S_n>0$,则数列$\{S_n\}$是递增数列

2. 在等差数列$\{a_n\}$中,$a_{10}<0$,$a_{11}>0$,且 $a_{11}>|a_{10}|$,若$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n<0$,则 n 的最大值是(　　).

A. 17　　B. 18　　C. 19　　D. 20

3. 等差数列$\{a_n\}$中,$a_1>0$,$S_4=S_9$,则 S_n 取最大值时,$n=$______.

4. (新课标全国高考)设等差数列$\{a_n\}$满足 $a_3=5$,$a_{10}=-9$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)求$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 及使得 S_n 最大的序号 n 的值.

5. 设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,已知 $a_3=12$,$S_{12}>0$,$S_{13}<0$.

(1)求公差 d 的取值范围;

(2)$S_1,S_2,\cdots,S_{12}$ 中哪一个值最大?并说明理由.

模板 12　等差、等比数列的综合性问题 【5年36考】

模板探究

母 题 呈 现	模 板 引 入
(湖北高考)已知等比数列$\{a_n\}$中,各项都是正数,且 $a_1,\frac{1}{2}a_3,2a_2$ 成等差数列,则 $\frac{a_9+a_{10}}{a_7+a_8}=$(　　). A. $1+\sqrt{2}$　B. $1-\sqrt{2}$　C. $3+2\sqrt{2}$　D. $3-2\sqrt{2}$	本模板解决的是“已知题目中的等差、等比数列满足条件 p,求解或证明与数列相关的综合性”的问题.
解析:$\because a_1,\frac{1}{2}a_3,2a_2$ 成等差数列, $\therefore 2\times\frac{1}{2}a_3=a_1+2a_2$,即 $a_3=a_1+2a_2$. 设等比数列 a_n 的公比为 q 且 $q>0$, 则 $a_3=a_1q^2$,$a_2=a_1q$,$\therefore a_1q^2=a_1+2a_1q$, $\therefore q^2=1+2q$,解得 $q=1+\sqrt{2}$ 或 $q=1-\sqrt{2}$(舍), $\therefore \frac{a_9+a_{10}}{a_7+a_8}=\frac{a_9(1+q)}{a_7(1+q)}=q^2=(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}$. **答案**:C	第一步　已知$\{a_n\}$是等比数列,$a_1,\frac{1}{2}a_3,2a_2$ 成等差数列,分析结论只需求公比 q. 第二步　根据已知条件列式,转化为只含 q 的等式. 第三步　计算出 q,q^2 即为所求结果.

高斯的故事(四)　但高斯却静静坐着,对老师投来的轻蔑、怀疑的眼光毫不在意.等大家都做完后,老师一张张地检查着石板,大部分都做错了,最后,高斯的石板被翻了过来,只见上面写着:5050.老师吃了一惊,高斯于是解释他如何得到答案:1+100=101,2+99=101,…,49+52=101,50+51=101,共有 50 对和为 101 的数,答案便是 50×101=5 050.



模板攻略

1. 模板解决思路

(1)解决等差数列与等比数列的综合问题的关键在于综合运用等差数列和等比数列知识解题，也就是涉及哪个数列问题就灵活地运用相关知识解决.

(2)等差数列与等比数列之间是可以相互转化的. 即$\{a_n\}$为等差数列$\Rightarrow\{a^{a_n}\}(a>0$且$a\neq1)$为等比数列；$\{a_n\}$为正项等比数列$\Rightarrow\{\log_a a_n\}(a>0$且$a\neq1)$为等差数列.

2. 模板解决步骤

1 第一步　分析已知条件中的等差、等比数列及所求结论中式子的特点.

2 第二步　根据等差、等比数列的性质及前n项和公式列式.

3 第三步　整理化简求解即得结论.

3. 典型例题

典例 1　(福建高考)已知等差数列$\{a_n\}$的公差$d=1$，前n项和为S_n.

(1)若$1,a_1,a_3$成等比数列，求a_1；

(2)若$S_5>a_1a_9$，求a_1的取值范围.

解：(1)因为数列$\{a_n\}$的公差$d=1$，且$1,a_1,a_3$成等比数列，　①

所以$a_1^2=1\times(a_1+2)$，即$a_1^2-a_1-2=0$，　②

解得$a_1=-1$或$a_1=2$.　③

(2)因为数列$\{a_n\}$的公差$d=1$，且$S_5>a_1a_9$，所以$5a_1+10>a_1^2+8a_1$，　①~②

即$a_1^2+3a_1-10<0$，解得$-5<a_1<2$.　③

典例 2　(重庆高考)已知$\{a_n\}$为等差数列，且$a_1+a_3=8$，$a_2+a_4=12$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)记$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若a_1,a_k,S_{k+2}成等比数列，求正整数k的值.

解：(1)设数列$\{a_n\}$的公差为d，由题意知　①

$\begin{cases}2a_1+2d=8,\\2a_1+4d=12.\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=2,\\d=2.\end{cases}$　②

所以$a_n=a_1+(n-1)d=2+2(n-1)=2n$.　③

(2)由(1)可得$S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(2+2n)}{2}=n(n+1)$.

因为a_1,a_k,S_{k+2}成等比数列，　①

所以$a_k^2=a_1S_{k+2}$. 从而$(2k)^2=2(k+2)(k+3)$，即$k^2-5k-6=0$，　②

解得$k=6$或$k=-1$(舍去). 因此$k=6$.　③

模板演练

答案详见P429

1. (陕西高考)设$\{a_n\}$是公比不为1的等比数列，其前n项和为S_n，且a_5,a_3,a_4成等差数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的公比；

(2)证明：对任意$k\in\mathbf{N}^*$，S_{k+2},S_k,S_{k+1}成等差数列.

2. (浙江高考)公差不为0的等差数列$\{a_n\}$的首项a_1为$a(a\in\mathbf{R})$，且$\dfrac{1}{a_1},\dfrac{1}{a_2},\dfrac{1}{a_4}$成等比数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)对$n\in\mathbf{N}^*$，试比较$\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_{2^2}}+\cdots+\dfrac{1}{a_{2^n}}$与$\dfrac{1}{a_1}$的大小.

凯尔微博



数学教育家——杨辉(一)　杨辉，中国南宋时期杰出的数学家和数学教育家，其著作甚多，有《详解九章算术》十二卷(1261年)、《日用算法》二卷(1262年)等. 杨辉的数学研究与教育工作的重点是在计算技术方面. 他对筹算乘除捷算法进行总结和发展，有的还编成了歌诀，如九归口诀. 他在《续古摘奇算法》中介绍了各种形式的“纵横图”及有关的构造方法.

3. (新课标全国高考)已知等差数列$\{a_n\}$的公差不为零,$a_1=25$,且a_1,a_{11},a_{13}成等比数列.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)求$a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{3n-2}$.

4. (天津高考)已知首项为$\frac{3}{2}$的等比数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n(n\in\mathbf{N}^*)$,且$-2S_2,S_3,4S_4$成等差数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)证明$S_n+\frac{1}{S_n}\leqslant\frac{13}{6}(n\in\mathbf{N}^*)$.

5. 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且$(3-m)S_n+2ma_n=m+3(n\in\mathbf{N}^*)$,其中$m$为常数且$m\neq-3,m\neq0$.

(1)求证:$\{a_n\}$是等比数列;

(2)若数列$\{a_n\}$的公比满足$q=f(m)$且$b_1=a_1,b_n=\frac{3}{2}f(b_{n-1})(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant2)$,求证:$\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$为等差数列,并求$b_n$.

6. 已知数列$\{a_n\}$,S_n是其前n项和,并且$S_{n+1}=4a_n+2(n=1,2,\cdots),a_1=1$.

(1)设数列$b_n=a_{n+1}-2a_n(n=1,2,\cdots)$,求证:数列$\{b_n\}$是等比数列;

(2)设数列$c_n=\frac{a_n}{2^n}(n=1,2,\cdots)$,求证:数列$\{c_n\}$是等差数列;

(3)求数列$\{a_n\}$的通项公式及前n项和.

模板13 用倒序相加法求前n项和

模板探究

母题呈现	模板引入
设$f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$,求和:$S=f\left(\frac{1}{2\,013}\right)+f\left(\frac{2}{2\,013}\right)+\cdots+f\left(\frac{2\,012}{2\,013}\right)$.	本模板解决的是"在一个有限数列$\{a_n\}$中,与首末两项等距离的两项之和等于首末两项之和,求这些项之和"的问题.
解:$\because f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$,$\therefore f(1-x)=\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\frac{2}{4^x+2}$, $\therefore f(x)+f(1-x)=1$. 又$\because S=f\left(\frac{1}{2\,013}\right)+f\left(\frac{2}{2\,013}\right)+\cdots+f\left(\frac{2\,012}{2\,013}\right)$, $S=f\left(\frac{2\,012}{2\,013}\right)+f\left(\frac{2\,011}{2\,013}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{2\,013}\right)$, 上述两式相加,得$2S=2\,012$,$\therefore S=1\,006$.	第一步 确定$f(x)+f(1-x)=1$. 第二步 由$\frac{1}{2\,013}+\frac{2\,012}{2\,013}=1,\cdots$,再写出一个倒序相加的式子,把两个等式相加. 第三步 整理化简,求和.

数学教育家——杨辉(二) 同时"垛积术"是杨辉继沈括"隙积术"后,关于高阶等差级数的研究.杨辉将《九章算术》的246个题目按解题方法由浅入深的顺序,重新分为九类:乘除、分率、合率、互换、二衰分、叠积、盈不足、方程、勾股.杨辉非常重视数学教育的普及和发展,在《算法通变本末》中,他为初学者制订的"习算纲目"是中国数学教育史上的重要文献.



模板攻略

1. 模板解决思路

如果一个数列$\{a_n\}$与首末两项"等距离"的两项之和等于首末两项之和(一般情况下,首末两项之和为一个常数),则可将"正着写和"与"倒着写和"的两式相加,便得到一个常数列,求得此数列的和,两边都除以2,即得到数列$\{a_n\}$的前n项和.这一方法叫作倒序相加法.

2. 模板解决步骤

①第一步　求通项公式:即根据已知条件求出数列的通项公式.

②第二步　定和值:即根据数列通项公式的特征,判断a_m+a_{n-m}的值是否与m无关.

③第三步　倒序相加:即把数列前n项和写出来,然后把其顺序倒过来得到另外一个式子,两式相加.

④第四步　求和:即利用a_m+a_{n-m}的运算结果求解$2S_n$,从而求出S_n.

3. 典型例题

典例1　已知$f(x)=\frac{1}{2^x+\sqrt{2}}$,则$f(-5)+f(-4)+\cdots+f(0)+f(1)+\cdots+f(5)+f(6)=$______.

解析:$\because f(x)=\frac{1}{2^x+\sqrt{2}}$,

$\therefore f(1-x)=\frac{1}{2^{1-x}+\sqrt{2}}$

$=\frac{2^x}{\sqrt{2}\cdot 2^x+2}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2^x}{2^x+\sqrt{2}}$.

则$f(x)+f(1-x)$

$=\frac{1}{2^x+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2^x}{2^x+\sqrt{2}}$

$=\frac{1}{2^x+\sqrt{2}}\left(1+\frac{2^x}{\sqrt{2}}\right)$

$=\frac{1}{2^x+\sqrt{2}}\cdot\frac{2^x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.　①~②

$f(-5)+f(-4)+\cdots+f(0)+f(1)+\cdots+f(5)+f(6)$　③

$=6\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=3\sqrt{2}$.　④

答案:$3\sqrt{2}$

典例2　已知$\lg x+\lg y=1$,且$S_n=\lg x^n+\lg(x^{n-1}y)+\lg(x^{n-2}y^2)+\cdots+\lg y^n$,则$S_n=$______.

解析:因为$\lg x+\lg y=1$,

所以$\lg(xy)=1$.　①~②

因为$S_n=\lg x^n+\lg(x^{n-1}y)+\lg(x^{n-2}y^2)+\cdots+\lg(xy^{n-1})+\lg y^n$,

所以$S_n=\lg y^n+\lg(xy^{n-1})+\lg(x^2y^{n-2})+\cdots+\lg(x^{n-1}y)+\lg x^n$,

两式相加,得

$2S_n=(\lg x^n+\lg y^n)+[\lg(x^{n-1}y)+\lg(xy^{n-1})]+\cdots+(\lg y^n+\lg x^n)$　③

$=\lg(x^n\cdot y^n)+\lg(x^{n-1}y\cdot xy^{n-1})+\cdots+\lg(y^n\cdot x^n)$

$=n[\underbrace{\lg(xy)+\lg(xy)+\cdots+\lg(xy)}_{(n+1)个}]$

$=n(n+1)\lg(xy)$

$=n(n+1)$,

所以$S_n=\frac{1}{2}n(n+1)$.　④

答案:$\frac{1}{2}n(n+1)$

误区警示

在使用倒序相加法求和时要注意相加后求出的和是所求和的2倍,得出解题结果后不要忽视了除以2.

必修5

凯尔微博



用数学表达人生格言(一)　1. 王菊珍的百分数:我国科学家王菊珍对待实验失败有句格言,叫做"干下去还有50%成功的希望,不干便是100%的失败". 2. 托尔斯泰的分数:俄国大文豪托尔斯泰说:"一个人就好像一个分数,他的实际才能好比分子,而他对自己的估价好比分母. 分母越大,则分数的值就越小."

模板演练

答案详见 P430

已知函数 $f(x)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $f(x)+f(1-x)=\frac{1}{2}$.

(1)求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)(n\in\mathbf{N}^*)$ 的值；

(2)若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)$，那么数列 $\{a_n\}$ 是等差数列吗？试证之.

模板 14　错位相减法求前 n 项和 [5年20考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(浙江高考)已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=2n^2+n$，$n\in\mathbf{N}^*$，数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n=4\log_2 b_n+3$，$n\in\mathbf{N}^*$. (1)求 a_n，b_n； (2)求数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.	本模板解决的是“已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\{b_n\}$ 为等比数列，求 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前 n 项和”的问题.
解：(1)由 $S_n=2n^2+n$，得当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=3$； 当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=4n-1$，a_1 也满足此式，所以 $a_n=4n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$. 由 $4n-1=a_n=4\log_2 b_n+3$，得 $b_n=2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$. (2)由(1)知 $a_n\cdot b_n=(4n-1)\cdot 2^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$， 所以 $T_n=3+7\times 2+11\times 2^2+\cdots+(4n-1)\cdot 2^{n-1}$， $2T_n=3\times 2+7\times 2^2+\cdots+(4n-5)\cdot 2^{n-1}+(4n-1)\cdot 2^n$， 所以 $2T_n-T_n=(4n-1)2^n-[3+4(2+2^2+\cdots+2^{n-1})]$ $=(4n-5)2^n+5$. 故 $T_n=(4n-5)2^n+5$，$n\in\mathbf{N}^*$.	第一步　由(1)可知 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 分别是等差、等比数列. 第二步　由(1)已求出 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式. 第三步　写出 T_n，$2T_n$ 两个式子，并作差：$2T_n-T_n$. 第四步　求前 n 项和 T_n.

用数学表达人生格言(二)　3. 雷巴柯夫的常数与变数：俄国历史学家雷巴柯夫说：“时间是个常数，但对勤奋者来说是个‘变数’，用‘分’来计算时间的人比用‘小时’来计算时间的人的时间多59倍.” 4. 华罗庚的减号：数学家华罗庚指出：“在学习中要敢于做减法，就是减去前人已经解决的部分，看看还有哪些问题没有解决，需要我们去探索解决.”



模板攻略

1. 模板解决思路

若数列$\{a_n\}$为等差数列，数列$\{b_n\}$为等比数列，由这两个数列的对应项乘积组成的新数列为$\{a_nb_n\}$，当求该数列的前n项和时，常常采用将$\{a_nb_n\}$的各项乘以公比q，并项后错位一项与$\{a_nb_n\}$的同次项对应相减，即可转化为特殊数列的求和问题，所以这种数列求和的方法称为错位相减法.

具体操作过程如下：

设$\{a_n\}$的公差为d，$\{b_n\}$的公比为$q(q\neq1)$.

$S_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$，

$qS_n=a_1b_2+\cdots+a_{n-1}b_n+a_nb_{n+1}$，

两式相减，得$(1-q)S_n=a_1b_1+b_2d+\cdots+b_nd-a_nb_{n+1}=a_1b_1+d(b_2+b_3+\cdots+b_n)-a_nb_{n+1}$，

所以$S_n=\dfrac{a_1b_1+d(b_2+b_3+\cdots+b_n)-a_nb_{n+1}}{1-q}$.

需要注意的是$b_2+b_3+\cdots+b_n$是以b_2为首项，q为公比的等比数列的前$n-1$项和.

2. 模板解决步骤

1 第一步　巧拆分：即将数列的通项公式分解为等差数列和等比数列的乘积的形式.

2 第二步　确定等差、等比数列的通项公式.

3 第三步　构差式：即写出S_n的表达式，然后等式两边同时乘以公比或除以公比得到另外一个式子，两式作差.

4 第四步　求和：根据差式的特征准确求和.

3. 典型例题

典例 1　（湖南高考）设S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_1\neq0$，$2a_n-a_1=S_1\cdot S_n$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)求a_1,a_2，并求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{na_n\}$的前n项和.

解：(1)令$n=1$，得$2a_1-a_1=a_1^2$，即$a_1=a_1^2$.

因为$a_1\neq0$，所以$a_1=1$.

令$n=2$，得$2a_2-1=S_2=1+a_2$，解得$a_2=2$.

当$n\geqslant2$时，$2a_n-1=S_n$，$2a_{n-1}-1=S_{n-1}$，

两式相减得$2a_n-2a_{n-1}=a_n$，即$a_n=2a_{n-1}$.

于是数列$\{a_n\}$是首项为1，公比为2的等比数列.

因此，$a_n=2^{n-1}$.

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2^{n-1}$.

(2)由(1)知$na_n=n\cdot2^{n-1}$.　①~②

记数列$\{n\cdot2^{n-1}\}$的前n项和为B_n，于是

$B_n=1+2\times2+3\times2^2+\cdots+n\times2^{n-1}$，

$2B_n=1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n$，

两式相减得$-B_n=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}-n\cdot2^n=2^n-1-n\cdot2^n$.　③

从而$B_n=1+(n-1)\cdot2^n$.　④

误区警示

在两式作差时，若公比小于1时，在用qS_n-S_n求解S_n时，切勿漏掉负号.

典例 2　（山东高考）设等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_4=4S_2$，$a_{2n}=2a_n+1$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若数列$\{b_n\}$满足$\dfrac{b_1}{a_1}+\dfrac{b_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{b_n}{a_n}=1-\dfrac{1}{2^n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，求$\{b_n\}$的前$n$项和$T_n$.

解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d.

由$S_4=4S_2$，$a_{2n}=2a_n+1$得

$$\begin{cases}4a_1+6d=8a_1+4d,\\a_1+(2n-1)d=2a_1+2(n-1)d+1,\end{cases}$$

解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=2.\end{cases}$

因此$a_n=2n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(2)由已知$\dfrac{b_1}{a_1}+\dfrac{b_2}{a_2}+\cdots+\dfrac{b_n}{a_n}=1-\dfrac{1}{2^n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

当$n=1$时，$\dfrac{b_1}{a_1}=\dfrac{1}{2}$；

当$n\geqslant2$时，$\dfrac{b_n}{a_n}=1-\dfrac{1}{2^n}-\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)=\dfrac{1}{2^n}$.



用数学表达人生格言(三)　5. 季米特洛夫的正负号：季米特洛夫说："要利用时间思考一下一天之中做了些什么，是'正号'还是'负号'，倘若是'+'，则进步；倘若是'-'，就得吸取教训，采取措施."6. 爱因斯坦的公式：爱因斯坦在谈成功的秘诀时，写下一个公式：$A=x+y+z$，并解释道："A代表成功，x代表艰苦的劳动，y代表正确的方法，z代表少说空话."

所以$\frac{b_n}{a_n}=\frac{1}{2^n}, n\in \mathbf{N}^*$.

由(1)知，$a_n=2n-1, n\in \mathbf{N}^*$,

所以 $b_n=\frac{2n-1}{2^n}, n\in \mathbf{N}^*$,　①~②

又 $T_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$,

$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$,

两式相减得

$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{2}{2^n}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$

$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$,　③

所以 $T_n=3-\frac{2n+3}{2^n}$.　④

模板演练

➡ 答案详见 P431

1. (全国高考)设数列$\{a_n\}$满足 $a_1=2, a_{n+1}-a_n=3\cdot 2^{2n-1}$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)令 $b_n=na_n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

2. (辽宁高考)已知等差数列$\{a_n\}$满足 $a_2=0, a_6+a_8=-10$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)求数列$\left\{\frac{a_n}{2^{n-1}}\right\}$的前 n 项和.

3. (江西高考)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=-\frac{1}{2}n^2+kn$(其中 $k\in \mathbf{N}_+$)，且 S_n 的最大值为 8.

(1)确定常数 k，并求 a_n;

(2)求数列$\left\{\frac{9-2a_n}{2^n}\right\}$的前 n 项和 T_n.

4. (天津高考)已知$\{a_n\}$是等差数列，其前 n 项和为 S_n，$\{b_n\}$是等比数列，且 $a_1=b_1=2, a_4+b_4=27, S_4-b_4=10$.

(1)求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式;

(2)记 $T_n=a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n, n\in \mathbf{N}^*$，证明 $T_n+12=-2a_n+10b_n (n\in \mathbf{N}^*)$.

必修5

算术人生——加减乘除(一)　有一位作家曾经这样说过:人生是一种自我经营的过程，要经营就要讲运算. 所以，人生是离不开加减乘除的. 一个人生活得是否快乐、幸福，关键取决于其算术水平的高低. 人生需要加法. 人生在世，总是要追求一些东西，人生的加法，使人生更富有，更丰富多彩.

凯尔微博



模板 15 裂项相消法求前 n 项和 [5年12考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(全国高考)已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$a_5=5$,$S_5=15$,则数列$\left\{\frac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前 100 项和为( ). A. $\frac{100}{101}$ B. $\frac{99}{101}$ C. $\frac{99}{100}$ D. $\frac{101}{100}$	本模板解决的是"利用裂项相消法求数列前 n 项和"的问题.
解析:设数列$\{a_n\}$的公差为 d,则 $a_1+4d=5$,$S_5=5a_1+\frac{5\times4}{2}d=15$,得 $a_1=1$,$d=1$,故 $a_n=1+(n-1)\times1=n$. 所以 $\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, 所以 $S_{100}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}-\frac{1}{101}=1-\frac{1}{101}=\frac{100}{101}$. **答案**:A	第一步 先求出数列$\{a_n\}$的通项公式. 第二步 裂项:$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. 第三步 求和 S_{100}.

模板攻略

1. 模板解决思路

利用裂项相消法求和时,应注意抵消后并不一定只剩下第一项和最后一项,也有可能前面剩两项,再就是通项公式裂项后,有时需要调整前面的系数,使裂项前后等式两边保持相等.

常见的拆项公式有:

(1)若$\{a_n\}$是等差数列,则 $\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}\cdot\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$,$\frac{1}{a_n\cdot a_{n+2}}=\frac{1}{2d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$;

(2)$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$;

(3)$\frac{1}{n(n+k)}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+k}\right)$;

(4)$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$;

(5)$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$;

(6)$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$;

(7)$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+k}}=\frac{1}{k}(\sqrt{n+k}-\sqrt{n})$.

2. 模板解决步骤

第一步 定通项公式:即根据已知条件求出数列的通项公式.

第二步 巧裂项:即根据通项公式的特征准确裂项,将其表示为两项之差的形式.

第三步 消项求和:即把握消项的规律,准确求和.

3. 典型例题

典例 1 (江西高考)正项数列$\{a_n\}$满足:$a_n^2-(2n-1)a_n-2n=0$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式 a_n;



(2)令 $b_n=\frac{1}{(n+1)a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

解：(1)由：$a_n^2-(2n-1)a_n-2n=0$，得$(a_n-2n)(a_n+1)=0$.

由于$\{a_n\}$是正项数列，所以 $a_n=2n$.

(2)由于 $a_n=2n$，$b_n=\frac{1}{(n+1)a_n}$，

则 $b_n=\frac{1}{2n(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，　①~②

$T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{2(n+1)}$.　③

典例 2　(新课标全国高考)等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且 $2a_1+3a_2=1$，$a_3^2=9a_2a_6$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $b_n=\log_3a_1+\log_3a_2+\cdots+\log_3a_n$，求数列$\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$的前 n 项和.

解：(1)设数列$\{a_n\}$的公比为 q. 由 $a_3^2=9a_2a_6$ 得 $a_3^2=9a_4^2$，所以 $q^2=\frac{1}{9}$. 由条件可知 $q>0$，故 $q=\frac{1}{3}$.

由 $2a_1+3a_2=1$，得 $2a_1+3a_1q=1$，解得 $a_1=\frac{1}{3}$.

故数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{1}{3^n}$.

(2)$b_n=\log_3a_1+\log_3a_2+\cdots+\log_3a_n$

$=-(1+2+\cdots+n)$

$=-\frac{n(n+1)}{2}$.　①

故 $\frac{1}{b_n}=-\frac{2}{n(n+1)}=-2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$.　②

$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}$

$=-2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$

$=-\frac{2n}{n+1}$.　③

所以数列$\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$的前 n 项和为$-\frac{2n}{n+1}$.

模板演练

➡ 答案详见 P431

1. 求数列$\frac{1}{1^2+2}$，$\frac{1}{2^2+4}$，$\frac{1}{3^2+6}$，$\frac{1}{4^2+8}$，…的前 n 项和.

2. 求 $S_n=\frac{2^2+1}{2^2-1}+\frac{3^2+1}{3^2-1}+\frac{4^2+1}{4^2-1}+\cdots+\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2-1}$.

3. 已知等差数列$\{a_n\}$满足：$a_3=7$，$a_5+a_7=26$. $\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n.

(1)求 a_n 及 S_n；

(2)令 $b_n=\frac{1}{a_n^2-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

4. (新课标全国高考)已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 满足 $S_3=0$，$S_5=-5$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\left\{\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}\right\}$的前 n 项和.

必修5

算术人生——加减乘除(三)　我们要学会辩证看待人生、看待得失，用减法减去人生过重的负担. 否则，负担太重，人生不堪重负，往往事与愿违. 人生需要乘法. 人生的成功与否，与个人努力有关，更与机遇有关. 哲人说，人生的道路尽管很漫长，但要紧处就那么几步. 对于人生而言，奋斗固然重要，但能否抓住机遇也是十分关键的.



模板 16　分组求和法求前 n 项和 【5年10考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(重庆高考)设$\{a_n\}$是公比为正数的等比数列,$a_1=2$,$a_3=a_2+4$. (1)求$\{a_n\}$的通项公式; (2)设$\{b_n\}$是首项为1,公差为2的等差数列,求数列$\{a_n+b_n\}$的前n项和S_n.	本模板解决的是“求通项公式可以写成$c_n=a_n+b_n$形式的数列前n项和”的问题.
解:(1)设q为等比数列$\{a_n\}$的公比,则由$a_1=2$,$a_3=a_2+4$得$2q^2=2q+4$,即$q^2-q-2=0$, 解得$q=2$或$q=-1$(舍去),因此$q=2$. 所以$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$. (2)由题意知$b_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$. 所以$a_n+b_n=2^n+2n-1$. 所以$S_n=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}+n\times 1+\dfrac{n(n-1)}{2}\times 2=2^{n+1}+n^2-2$.	第一步　令$x_n=a_n+b_n$,利用已知条件求得$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的通项公式. 第二步　设$\{x_n\}$,$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的前n项和为S_n,T_n,U_n,代入公式求出T_n和U_n. 第三步　代入$S_n=T_n+U_n$,求出S_n.

模板攻略

1. 模板解决思路

(1)有一类数列,既不是等差数列,也不是等比数列,但可将数列适当拆开,转化为几个等差、等比数列求和的形式,分别求和后合并即可.

(2)分组求和法的实质就是把难以直接求和的数列拆分为可以直接求和的数列,所以熟练记忆常见数列的求和公式是解决此类问题的基础.

2. 模板解决步骤

1 第一步　定通项公式:即根据已知条件求出数列的通项公式.

2 第二步　巧拆分:即根据通项公式的特征,将其分解为几个可以直接求和的数列.

3 第三步　分别求和:即分别求出各个数列的和.

4 第四步　组合:即把拆分后每个数列的和进行组合,可求得原数列的和.

3. 典型例题

典例 1　求数列$1\frac{1}{2},3\frac{1}{4},5\frac{1}{8},\cdots,\left[(2n-1)+\frac{1}{2^n}\right]$的前$n$项和.

解:$S_n=1\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}+5\frac{1}{8}+\cdots+\left[(2n-1)+\frac{1}{2^n}\right]$　1

$=(1+3+5+\cdots+2n-1)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$　2

$=\dfrac{(1+2n-1)\cdot n}{2}+\dfrac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}$　3

$=n^2+1-\dfrac{1}{2^n}$.　4

典例 2　(安徽高考改编)设数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$,$a_2+a_4=8$,且对任意$n\in\mathbf{N}^*$,函数$f(x)=a_n-a_{n+1}+a_{n+2}-a_{n+1}\sin x-a_{n+2}\cos x$满足$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若$b_n=2\left(a_n+\frac{1}{2^{a_n}}\right)$,求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

解:(1)$f(x)=a_n-a_{n+1}+a_{n+2}-a_{n+1}\sin x-a_{n+2}\cos x$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 有 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a_n-a_{n+1}+a_{n+2}-a_{n+1}=0$,

即 $a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$,

故$\{a_n\}$为等差数列.

由 $a_1=2,a_2+a_4=8$,解得公差 $d=1$,

所以 $a_n=2+1\cdot(n-1)=n+1$.

(2)由 $b_n=2\left(a_n+\frac{1}{2^{a_n}}\right)$

$=2\left(n+1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)=2n+\frac{1}{2^n}+2$ 知, ①~②

$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=2n+2\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}$ ③

$=n^2+3n+1-\frac{1}{2^n}$. ④

模板演练

➡ 答案详见 P432

1. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^n+3n-1$,求数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n.

2. 已知数列$\{x_n\}$的首项 $x_1=3$,通项 $x_n=2^np+nq$($n\in\mathbf{N}^*$,p,q 为常数),且 x_1,x_4,x_5 成等差数列. 求:

(1)p,q 的值;

(2)数列$\{x_n\}$前 n 项和 S_n 的公式.

3. (山东高考)在等差数列$\{a_n\}$中,$a_3+a_4+a_5=84$,$a_9=73$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)对任意 $m\in\mathbf{N}^*$,将数列$\{a_n\}$中落入区间$(9^m,9^{2m})$内的项的个数记为 b_m,求数列$\{b_m\}$的前 m 项和 S_m.

4. 已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$n\in\mathbf{N}^*$,$a_3=5$,$S_{10}=100$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)设 $b_n=2^{a_n}+2n$,求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

必修 5

对联中的数学运算(一)　将数学演算引入到对联中,能启迪人的思维,激发读者的兴趣,特别是那些构思奇巧的数学对联,令人叹为观止. 清乾隆皇帝算是"风流才子",爱吟诗作对,附庸风雅. 他五十大寿时,有人撰寿联:"二万里山河,伊古以来未闻一朝一统二万里;五十年圣寿,自今而往尚有九千九百五十年."

凯尔微博



第三章 不等式

模板1 利用不等式的性质求代数式的取值范围

【5年2考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(辽宁高考)已知$-1<x+y<4$且$2<x-y<3$,则$z=2x-3y$的取值范围是______.(答案用区间表示)	本模板解决的是"已知a,b(a,b是含x,y的代数式)的取值范围,求c(含x,y的代数式)的取值范围"的问题.
解析:设$2x-3y=m(x+y)+n(x-y)=(m+n)x+(m-n)y$, $\because \begin{cases} m+n=2, \\ m-n=-3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=-\frac{1}{2}, \\ n=\frac{5}{2}, \end{cases}$ $\therefore -2<-\frac{1}{2}(x+y)<\frac{1}{2}, 5<\frac{5}{2}(x-y)<\frac{15}{2}$, 则 $3<-\frac{1}{2}(x+y)+\frac{5}{2}(x-y)<8$, 即 $3<2x-3y<8$. **答案:**$(3,8)$	第一步 令$2x-3y=m(x+y)+n(x-y)$,m,n为常数.化简该式,求出m,n的值. 第二步 分别求出$-\frac{1}{2}(x+y)$,$\frac{5}{2}(x-y)$的取值范围. 第三步 合并第二步,即得z的取值范围.

模板攻略

1. 模板解决思路

利用几个变量的范围来确定某个代数式的范围是一类常见的综合问题,解这类题目时,常利用不等式性质3的推论即"同向(异向)不等式的两边可以对应相加(相减)". 但应注意,这种转化不是等价变形,在一个解题过程中多次使用这种转化时,就有可能扩大真实的取值范围,得出错误答案. 正确解法是先建立待求范围的整体与已知范围的整体的等量关系,再通过"一次性不等关系的运算",求得待求的范围.

2. 模板解决步骤

1 第一步 把待求的代数式用已知的两个代数式表达出来,即令$c=ma+nb$(其中m,n为常数). 并求出m,n的值.

2 第二步 分别求出ma,nb的取值范围.

3 第三步 求出$ma+nb$的取值范围即得代数式c的取值范围.

3. 典型例题

典例1 (江苏高考)设实数x,y满足$3\leqslant xy^2\leqslant 8$,$4\leqslant \frac{x^2}{y}\leqslant 9$,则$\frac{x^3}{y^4}$的最大值是______.

思路分析:显然$\frac{x^3}{y^4}=(xy^2)^{-1}\left(\frac{x^2}{y}\right)^2$,但这和模板方法中说的"$ma+nb$"的形式不符,因此可两边取对



对联中的数学运算(二) 这诚然是歌功颂德,拍马吹牛,但后一句却含蕴深邃,50再加9 950岂不是"万岁"! 相传乾隆帝在游山玩水时即兴出下联:"八方桥,桥八方,站在八方桥上观八方,八方,八方,八八方."征上联,应对的难度很大,特别是反复使用数字. 只见才子纪晓岚对道:"万岁爷,爷万岁,跪倒万岁爷前呼万岁,万岁,万岁,万万岁!"

数，化成 $\lg\frac{x^3}{y^4}=-\lg xy^2+2\lg\frac{x^2}{y}$ 的形式.

解析：由于 $\frac{x^3}{y^4}=(xy^2)^{-1}\left(\frac{x^2}{y}\right)^2$，

则 $\lg\frac{x^3}{y^4}=-\lg xy^2+2\lg\frac{x^2}{y}$， ①

且 $\lg3\leqslant\lg xy^2\leqslant\lg8$，$\lg4\leqslant\lg\frac{x^2}{y}\leqslant\lg9$，

即 $-\lg8\leqslant-\lg xy^2\leqslant-\lg3$，$2\lg4\leqslant2\lg\frac{x^2}{y}\leqslant2\lg9$， ②

$\therefore -\lg8+2\lg4\leqslant-\lg xy^2+2\lg\frac{x^2}{y}\leqslant-\lg3+2\lg9$，

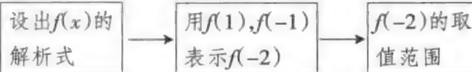
即 $\lg2\leqslant\lg\frac{x^3}{y^4}\leqslant\lg27$，

$\therefore 2\leqslant\frac{x^3}{y^4}\leqslant27$. ③

答案：27

典例 2 已知二次函数 $y=f(x)$ 的图象过原点，且 $1\leqslant f(-1)\leqslant2$，$3\leqslant f(1)\leqslant4$，求 $f(-2)$ 的取值范围.

思路分析：



解：因为二次函数 $y=f(x)$ 的图象过原点，所以设 $y=f(x)=ax^2+bx(a\neq0)$，

由题意知 $\begin{cases}1\leqslant f(-1)=a-b\leqslant2,\\3\leqslant f(1)=a+b\leqslant4.\end{cases}$

方法一（待定系数法）：

由题意知 $f(-2)=4a-2b$，设存在实数 x,y，使得 $4a-2b=x(a+b)+y(a-b)$，

即 $4a-2b=(x+y)a+(x-y)b$，所以 $\begin{cases}x+y=4,\\x-y=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=3,\end{cases}$

所以 $f(-2)=4a-2b=(a+b)+3(a-b)$. ①

又 $3\leqslant a+b\leqslant4$，$3\leqslant3(a-b)\leqslant6$， ②

所以 $6\leqslant(a+b)+3(a-b)\leqslant10$， ③

即 $f(-2)$ 的取值范围是 $[6,10]$.

方法二（运用方程思想）：

由 $\begin{cases}f(-1)=a-b,\\f(1)=a+b,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=\frac{1}{2}[f(-1)+f(1)],\\b=\frac{1}{2}[f(1)-f(-1)],\end{cases}$

所以 $f(-2)=4a-2b=3f(-1)+f(1)$. ①

又 $\begin{cases}1\leqslant f(-1)\leqslant2,\\3\leqslant f(1)\leqslant4,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}3\leqslant3f(-1)\leqslant6,\\3\leqslant f(1)\leqslant4,\end{cases}$ ②

所以 $6\leqslant3f(-1)+f(1)\leqslant10$，

即 $f(-2)$ 的取值范围是 $[6,10]$. ③

误区警示

同向（异向）不等式的两边可以相加（减），但是这种转化不是等价变形，如果在解题过程中多次使用这种转化，就有可能扩大了所求代数式的取值范围. 所以我们选用不等式性质求代数式的范围时务必小心谨慎，必要时改换求解的思路和方法.

知识要点

1. 不等式

用不等号（>，<，≥，≤，≠）表示不等关系的式子叫作不等式，如 $f(x)>g(x)$，$f(x)\geqslant g(x)$ 等.

用“>”，“<”连接的不等式叫作严格不等式；用“≤”，“≥”连接的不等式叫作非严格不等式.

2. 比较两个实数大小的依据

如果 $a-b$ 是正数，那么 $a>b$；如果 $a-b$ 等于零，那么 $a=b$；如果 $a-b$ 是负数，那么 $a<b$. 反过来也对，这可以表示为

$a-b>0\Leftrightarrow a>b$；$a-b=0\Leftrightarrow a=b$；$a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

注：符号“⇔”表示“等价于”，即可以相互推出.

精彩提示

利用实数的运算性质与大小顺序之间的关系，可以比较两个实数 a 与 b 的大小. 事实上，只需判断它们的差 $a-b$ 的符号.

对联中的数学运算（三） 真是对绝了，歌颂了皇上，讨得了欢心，难怪纪晓岚曾名噪一时. “北斗七星，水底连天十四点；南楼孤雁，月中带影一双飞.”采用倍数计算，由星空、水底、谷燕、月影构成一幅月夜雁飞图，充满着诗情画意. “双镜悬台，一女梳妆三对面，孤灯挂壁，两人作揖四低头.”将镜中影和灯下影巧制成数学对联.



3. 不等式的性质

性质 1(对称性)　如果 $a>b$,那么 $b<a$;如果 $b<a$,那么 $a>b$. 即 $a>b\Leftrightarrow b<a$.

性质 2(传递性)　如果 $a>b,b>c$,那么 $a>c$. 即 $a>b,b>c\Rightarrow a>c$.

性质 3　如果 $a>b$,那么 $a+c>b+c$. 还可以得出 $a+b>c\Rightarrow a+b+(-b)>c+(-b)\Rightarrow a>c-b$.

性质 4　如果 $a>b,c>0$,那么 $ac>bc$. 如果 $a>b$,$c<0$,那么 $ac<bc$.

性质 5　如果 $a>b,c>d$,那么 $a+c>b+d$.

性质 6　如果 $a>b>0,c>d>0$,那么 $ac>bd$.

性质 7　如果 $a>b>0$,那么 $a^n>b^n$,$(n\in\mathbf{N},n\geqslant 2)$.

性质 8　如果 $a>b>0$,那么 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$,$(n\in\mathbf{N},n\geqslant 2)$.

特别提示

$a>b\Leftrightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 不一定成立. 因为当 $ab<0$ 时,有 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$;当 $ab=0$ 时,$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 无意义;当 $ab>0$ 时,有 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

模板演练

➜ 答案详见 P432

1. 若 α,β 满足 $\begin{cases}-1\leqslant\alpha+\beta\leqslant 1,\\ 1\leqslant\alpha+2\beta\leqslant 3,\end{cases}$ 则 $\alpha+3\beta$ 的取值范围是 ______.

2. 已知 $1\leqslant\lg\frac{x}{y}\leqslant 2,2\leqslant\lg\frac{x^2}{\sqrt{y}}\leqslant 3$, 则 $\lg\frac{x^2}{\sqrt[3]{y}}$ 的取值范围是 ______.

3. 已知 $f(x)=ax^2-c$ 且 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1,-1\leqslant f(2)\leqslant 5$, 则 $f(3)$ 的取值范围是 ______.

4. 已知:$1\leqslant a-b\leqslant 2$ 且 $2\leqslant a+b\leqslant 4$,求 $4a-2b$ 的范围.

模板 2　一元二次不等式的解法 【5年22考】

模板探究

母 题 呈 现	模 板 引 入
(广东高考)不等式 $x^2+x-2<0$ 解集为 ______.	本模板解决的是“已知一元二次不等式或分式不等式,求其解集”的问题.
解析:由 $x^2+x-2<0$ 得 $(x+2)(x-1)<0$,解得 $-2<x<1$,故不等式的解集为 $\{x\mid -2<x<1\}$. **答案:**$\{x\mid -2<x<1\}$	第一步:直接解不等式. 第二步:写出不等式的解集.

凯尔微博



对联中的数学运算(四)　读者自然还会联想起李白的《月下独酌》:“花间一壶酒,独酌无相亲,举杯邀明月,对影成三人.”还有副对联也有同理之妙:“五百罗汉渡江,岸边波心千佛子,一个美人对月,人间天上两婵娟.”不仅对仗工整,而且情景高雅感人. 下面几幅数字对联也很有情趣. “七里山塘,行到半塘三里半;九溪蛮洞,经过中间五溪中.”

模板攻略

1. 模板解决思路

解一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$(或<0):当 $a>0$ 时,若相应一元二次方程的判别式 $\Delta>0$,则求两根或分解因式,根据“大于在两边,小于夹中间”写出解集;若 $\Delta=0$ 或 $\Delta<0$(这是特殊情形),则利用相应二次函数的图象写出不等式的解集.

当 $a<0$ 时,可将不等式两边同乘-1 转化为上述情况求解.

2. 模板解决步骤

①第一步　将不等式化为右边为零,左边为二次项系数大于零的不等式 $ax^2+bx+c>0(a>0)$或$ax^2+bx+c<0(a>0)$.

②第二步　求出相应的一元二次方程的根.

③第三步　利用二次函数的图象与 x 轴的交点确定一元二次不等式的解集.

若是分式不等式,则先将其转化为整式不等式,再按上述模板步骤解题.

3. 典型例题

典例 1　(重庆高考)不等式$\frac{x-1}{x+2}<0$ 的解集为(　　).

A. $(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,-2)$

C. $(-2,1)$　　D. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

解析:由 $\frac{x-1}{x+2}<0\Leftrightarrow(x-1)(x+2)<0$,　①

解得$-2<x<1$.　②

$\therefore\frac{x-1}{x+2}<0$的解集是$(-2,1)$. 故选C.　③

答案:C

典例 2　(江苏高考)已知$f(x)$是定义在 **R** 上的奇函数. 当 $x>0$ 时,$f(x)=x^2-4x$,则不等式$f(x)>x$ 的解集用区间表示为 ______.

解析:$\because f(x)$是定义在**R**上的奇函数,

$\therefore f(0)=0$,

又当$x<0$时,$-x>0$,

$\therefore f(-x)=x^2+4x$.

又$f(x)$为奇函数,$\therefore f(-x)=-f(x)$,

$\therefore f(x)=-x^2-4x(x<0)$,

$$\therefore f(x)=\begin{cases}x^2-4x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x^2-4x, & x<0.\end{cases}$$

(1)当$x>0$时,由$f(x)>x$,得$x^2-4x>x$,　①

解得$x>5$;　②~③

(2)当$x=0$时,$f(x)>x$无解;

(3)当$x<0$时,由$f(x)>x$,得$-x^2-4x>x$,　①

解得$-5<x<0$.　②~③

综上得不等式$f(x)>x$的解集用区间表示为$(-5,0)\cup(5,+\infty)$.

答案:$(-5,0)\cup(5,+\infty)$

必修5

知识要点

1. 一元二次不等式的有关概念

(1)定义

只含有一个未知数,并且未知数最高次数是2 的不等式,叫作一元二次不等式.

(2)一般表达式

一元二次不等式的一般表达形式是 $ax^2+bx+c>0$(或 $ax^2+bx+c<0$ 或 $ax^2+bx+c\geqslant0$ 或 $ax^2+bx+c\leqslant0$)$(a\neq0)$,其中 a,b,c 为常数.

(3)解与解集

使一元二次不等式成立的 x 的值叫作一元二次不等式的解,所有的解所组成的集合叫作一元二次不等式的解集.

2. 一元二次不等式的解法

一元二次不等式与相应的二次函数及一元二

对联中的数学运算(五)　取其半数,对仗十分工整.“七鸭游湖,数数三双一只;尺蛇出洞,量量九寸十分.”看似数字游戏,其实也显示出撰联者的精妙构思.“万砖千瓦,百匠造成一佛寺;一帆二橹,四人摇过八仙桥.”即有写实意味,又巧将数字排列对偶,组合得天衣无缝.



次方程的关系如下表:

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$的图象			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$的根	有两相异实根 x_1,x_2 $(x_1<x_2)$	有两相等实根 $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$的解集	$\{x\|x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\{x\|x\neq x_1\}$	$\{x\|x\in\mathbf{R}\}$
$ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$的解集	$\{x\|x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

特别提示

当 $a<0$ 时,可将不等式两边同乘-1转化为上述情况求解.另外,有时题目中会隐含这类问题的条件,如 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为$\{x|m<x<n\}$,这时必有条件$a<0$成立.

3. 分式不等式的解法

(1)$\frac{f(x)}{g(x)}>0\Leftrightarrow f(x)g(x)>0$.

(2)$\frac{f(x)}{g(x)}<0\Leftrightarrow f(x)g(x)<0$.

(3)$\frac{f(x)}{g(x)}\geqslant0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)g(x)\geqslant0,\\g(x)\neq0\end{cases}\Leftrightarrow f(x)g(x)>0$ 或 $f(x)=0$.

(4)$\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant0\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)g(x)\leqslant0,\\g(x)\neq0\end{cases}\Leftrightarrow f(x)g(x)<0$ 或 $f(x)=0$.

模板演练

➡ 答案详见 P433

1.(广东高考)不等式 $2x^2-x-1>0$ 的解集是( ).

A. $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ B. $(1,+\infty)$

C. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ D. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(1,+\infty)$

2.(全国高考)不等式$\frac{x-3}{x+2}<0$的解集为( ).

A. $\{x|-2<x<3\}$ B. $\{x|x<-2\}$

C. $\{x|x<-2$ 或 $x>3\}$ D. $\{x|x>3\}$

3.(上海高考)不等式 $\frac{x+1}{x}\leqslant3$ 的解集为______.

4.(湖南高考)不等式 $x^2-5x+6\leqslant0$ 的解集为______.

5.(上海高考)不等式$\frac{1}{x}<1$ 的解为______.

6.(上海高考)不等式$\frac{2-x}{x+4}>0$的解集是______.

模板3 求一元二次不等式中参数的值或取值范围

【5年8考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(福建高考)已知关于 x 的不等式 $x^2-ax+2a>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,则实数 a 的取值范围是______.	本模板解决的是"已知含参数的一元二次不等式满足条件 p,求参数的值或取值范围"的问题.
解析:不等式$x^2-ax+2a>0$在$\mathbf{R}$上恒成立,即$\Delta=(-a)^2-8a<0$,$\therefore0<a<8$,即 a 的取值范围是$(0,8)$. **答案**:$(0,8)$	第一步 将恒成立问题转化为一元二次方程问题. 第二步 结合一元二次方程的判别式列不等式. 第三步 解不等式即得取值范围.



数学灵感怎么来(一) 灵感是一种思维形式.它"表现为人对长期探索而未能解决的难题的一种突然性领悟,也就是对问题百思不得其解的一种'茅塞顿开'"."灵感是有规律的","灵感是有创造性的",灵感在解题中有不可低估的作用.灵感怎么来呢?一、变更情境,诱发灵感.变更问题情境,可让新情境带来的新信息去刺激灵感的发生,实现解决问题的目的.

模板攻略

1. 模板解决思路

(1)若已知一元二次不等式或分式不等式(含参数)的解集,求参数的值或取值范围时,其解题关键是要明确已知的解集的两个端点即为原一元二次不等式或分式不等式所对应的一元二次方程式的根.

(2)解决恒成立问题一定要弄清楚谁是自变量,谁是参数.一般地,知道谁的范围,谁就是自变量,求谁的范围,谁就是参数.

(3)对于一元二次不等式恒成立问题,恒大于0就是相应的二次函数的图象在给定的区间上全部在x轴上方,恒小于0就是相应的二次函数的图象在给定的区间上全部在x轴下方.

2. 模板解决步骤

1 第一步　将一元二次不等式转化为二次函数或一元二次方程问题.

2 第二步　根据二次函数或一元二次方程列出方程(组)或不等式(组).

3 第三步　解方程(组)或不等式(组),求出参数的值或取值范围.

3. 典型例题

典例1　(江苏高考)已知函数$f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$的值域为$[0,+\infty)$,若关于$x$的不等式$f(x)<c$的解集为$(m,m+6)$,则实数$c$的值为______.

解析:由值域为$[0,+\infty)$,

当$x^2+ax+b=0$时有$\Delta=a^2-4b=0$,即$b=\dfrac{a^2}{4}$,　①

$\therefore f(x)=x^2+ax+b=x^2+ax+\dfrac{a^2}{4}=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2$.

$\therefore f(x)=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2<c$,

得$-\sqrt{c}<x+\dfrac{a}{2}<\sqrt{c}$,$-\sqrt{c}-\dfrac{a}{2}<x<\sqrt{c}-\dfrac{a}{2}$.

$\because$不等式$f(x)<c$的解集为$(m,m+6)$,　①

$\therefore\left(\sqrt{c}-\dfrac{a}{2}\right)-\left(-\sqrt{c}-\dfrac{a}{2}\right)=2\sqrt{c}=6$,　②

解得$c=9$.　③

答案:9

典例2　(天津高考)设函数$f(x)=x^2-1$,对任意$x\in\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$,$f\left(\dfrac{x}{m}\right)-4m^2f(x)\leqslant f(x-1)+4f(m)$恒成立,则实数$m$的取值范围是______.

解析:$\because f(x)=x^2-1$,$x\in\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$,

$f\left(\dfrac{x}{m}\right)-4m^2f(x)\leqslant f(x-1)+4f(m)$对$x\in\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$恒成立,

即$\dfrac{x^2}{m^2}-1-4m^2(x^2-1)\leqslant(x-1)^2-1+4(m^2-1)$对$x\in\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$恒成立,

$\therefore\dfrac{1}{m^2}-4m^2-1\leqslant\dfrac{-2x-3}{x^2}$对$x\in\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$恒成立.

令$g(x)=\dfrac{-2x-3}{x^2}$,则$g(x)=-\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{2}{x}=-3\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{3x}\right)$

$=-3\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}$.　①

$\because x\geqslant\dfrac{3}{2}$,$\therefore 0<\dfrac{1}{x}\leqslant\dfrac{2}{3}$.

$\therefore$当$\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{3}$时,$g(x)_{\min}=-\dfrac{8}{3}$.

$\therefore\dfrac{1}{m^2}-4m^2-1\leqslant-\dfrac{8}{3}$,　②

整理得$12m^4-5m^2-3\geqslant0$,$(3m^2+1)(4m^2-3)\geqslant0$,

$4m^2-3\geqslant0$,即$m\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{2}$或$m\leqslant-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.　③

答案:$\left(-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$

知识要点

1.(1)已知不等式$ax^2+bx+c>0$的解集是$\{x|x<m$或$x>n\}$,其中$m<n$,则$x=m$或$x=n$是一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的两个根.

(2)已知不等式$ax^2+bx+c<0$的解集是$\{x|m<x<$

必修5

数学灵感怎么来(二)　二、利用直觉,诱发灵感.灵感是直觉的升华,有些数学问题特别是探索性求解问题,总让人产生无的放矢之感,数学直觉此时可使你"柳暗花明".三、类比联想,诱发灵感,在探索研究数学问题中,数学问题互相联系,解题的思想方法互相渗透,类比联想,可诱发灵感.



$n\}$，其中 $m<n$. 则 $x=m$ 或 $x=n$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根.

2. (1)不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解是全体实数(或恒成立)的条件是当 $a=0$ 时，$b=0,c>0$；当 $a\neq0$ 时，$\begin{cases}a>0,\\ \Delta<0.\end{cases}$

不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解是全体实数(或恒成立)的条件是当 $a=0$ 时，$b=0,c<0$；当 $a\neq0$ 时，$\begin{cases}a<0,\\ \Delta<0.\end{cases}$

(2)若 $x\in D$，函数 $f(x)\geqslant A$ 在 D 上恒成立，则等价于 $f(x)$ 在 D 上的最小值 $f(x)_{\min}\geqslant A$ 成立；

若 $f(x)\leqslant B$ 在 D 上恒成立，则等价于 $f(x)$ 在 D 上的最大值 $f(x)_{\max}\leqslant B$ 成立.

模板演练

➡ 答案详见 P433

1. (天津高考)设 $0<b<1+a$，若关于 x 的不等式 $(x-b)^2>(ax)^2$ 的解集中的整数恰有 3 个，则(　　).

A. $-1<a<0$　　B. $0<a<1$

C. $1<a<3$　　D. $3<a<6$

2. (山东高考)当 $x\in(1,2)$ 时，不等式 $x^2+mx+4<0$ 恒成立，则 m 的取值范围是______.

3. (湖北高考)已知关于 x 的不等式 $\dfrac{ax-1}{x+1}<0$ 的解集是 $(-\infty,-1)\cup\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$，则 $a=$______.

4. (天津高考)若关于 x 的不等式 $(2x-1)^2<ax^2$ 的解集中的整数恰有 3 个，则实数 a 的取值范围______.

5. 已知不等式 $ax^2+bx+2>0$ 的解集为 $\left\{x\left|-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{3}\right.\right\}$，求 $2x^2+bx+a<0$ 的解集.

必修5

模板 4　求解一元高次不等式 【5年4考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(江西高考)不等式 $\dfrac{x^2-9}{x-2}>0$ 的解集是______.	本模板解决的是“解一元三次(及以上)不等式，或解可化为一元三次(及以上)不等式的分式不等式”的问题.
解析：由 $\dfrac{x^2-9}{x-2}>0$，可化为 $(x^2-9)(x-2)>0$，即 $(x+3)(x-3)(x-2)>0$， （数轴图：-3，-2，-1，0，1，2，3，x，区间标 $+$、$-$） 利用数轴穿根法得 $-3<x<2$ 或 $x>3$. 答案：$\{x\mid-3<x<2$ 或 $x>3\}$	第一步　把分式不等式转化为整式不等式. 第二步　分解因式得 $(x+3)(x-3)(x-2)>0$. 第三步　画数轴，用“穿根法”在数轴上表示. 第四步　写出不等式的解(或解集).



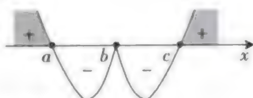
数学灵感怎么来(三)　四、转换解题途径诱发灵感. 正确的解题途径是成功解题的必要条件. 误入歧途，思想受阻，需及时改“道”，探寻灵感. 五、整体思考，诱发灵感. 许多数学问题求解时，通过对问题的整体形式、整体结构的观察后作出种种整体处理后，可立刻看出求解方案.

模板攻略

1. 模板解决思路

通常先对一元高次不等式进行因式分解，化为$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)>0$（或<0）的形式，然后运用"穿根法"求解. 利用此法时，注意将每个因式中x的系数化为正数，以防出错.

用曲线经各解穿数轴时，遵循奇过偶不过的原则，即遇到含x的项是奇次幂就穿过，偶次幂穿而不过，例如：用"穿根法"解不等式$(x-a)(x-b)^2(x-c)\geqslant 0(a<b<c)$时，作图如图所示. 其解集为$\{x|x\leqslant a$或$x=b$或$x\geqslant c\}$.



2. 模板解决步骤

①第一步　将$f(x)$最高次项的系数化为正数. 若解高次分式不等式时，可先将其转化为整式不等式.

②第二步　将$f(x)$分解为若干个一次因式的积或若干个二次不可分解因式的积.

③第三步　将每一个一次因式的根标在数轴上，从右上方依次通过每一点画曲线（注意重根情况，偶次方根穿而不过，奇次方根既穿又过）.

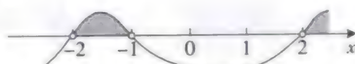
④第四步　根据曲线显示出的$f(x)$值的符号变化规律，写出不等式的解集.

3. 典型例题

典例1　（全国高考）不等式$\dfrac{x-2}{x^2+3x+2}>0$的解集是______.

解析：由$\dfrac{x-2}{x^2+3x+2}>0$，得$(x-2)(x^2+3x+2)>0$，即$(x-2)(x+1)(x+2)>0$.　①~②

如图.



③

用数轴穿根法得原不等式的解集为$\{x|-2<x<-1$或$x>2\}$.　④

答案：$\{x|-2<x<-1$或$x>2\}$

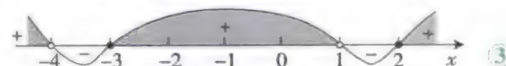
典例2　解不等式：$\dfrac{3x^2+7x-14}{x^2+3x-4}\geqslant 2$.

解：原不等式可化为$\dfrac{3x^2+7x-14}{x^2+3x-4}-2\geqslant 0$.

即$\dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+4)(x-1)}\geqslant 0$，　①

即$(x+3)(x-2)(x+4)(x-1)>0$或$(x+3)(x-2)=0$.　②

由数轴穿根法表示如图.



③

所以原不等式的解集为$\{x|x<-4$或$-3\leqslant x<1$或$x\geqslant 2\}$.　④

误区警示

在把分式不等式转化为整式不等式求解时，记住分母不为0.

模板演练

答案详见P434

1. （全国高考）不等式$\dfrac{x-1}{x^2-4}>0$的解集是（　　）.

A. $(-2,1)$　　B. $(2,+\infty)$

C. $(-2,1)\cup(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$

2. 不等式$\dfrac{x+5}{(x-1)^2}\geqslant 2$的解集是（　　）.

A. $\left[-3,\dfrac{1}{2}\right]$　　B. $\left[-\dfrac{1}{2},3\right]$

C. $\left[\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,3]$　　D. $\left[-\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,3]$

数学灵感怎么来（四）　六、调节精神状态，诱发灵感. 平时学习中，对一时难以解决的问题，不妨暂时搁置，调节一下精神状态，以便诱发灵感，继而解决问题. "有时你想一个问题，想了很久没想出来，不妨暂停一下，去干别的事情，因为下意识的思考还是存在的，这类思考也常常是有积极性的，可能会促进想出比较不平常的，似乎是突然性的好观念来，这时你就要抓住."

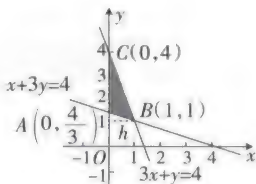


3. 解不等式：$\frac{x^2-3x-10}{x^2-1}\leqslant 0$.

4. 已知不等式$(ax^2+bx+c)(x+d)>0$的解集是$\{x|x<-3$或$1<x<4\}$. 求不等式$ax^3-(b+ad)x^2+(c+bd)x-cd\leqslant 0$的解集.

模板 5　求平面区域的面积【5年5考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(安徽高考)不等式组$\begin{cases}x\geqslant 0,\\x+3y\geqslant 4,\\3x+y\leqslant 4\end{cases}$所表示的平面区域的面积等于(　　). A. $\frac{3}{2}$　B. $\frac{2}{3}$　C. $\frac{4}{3}$　D. $\frac{3}{4}$	本模板解决的是"求不等式组表示的平面区域的面积"的问题.
解析:不等式组表示的平面区域如图所示. 由图易求$A\left(0,\frac{4}{3}\right)$, $B(1,1)$, $C(0,4)$. $\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\|AC\|\cdot h$ $=\frac{1}{2}\times\left(4-\frac{4}{3}\right)\times 1=\frac{4}{3}$.  **答案**:C	第一步　画出不等式组所表示的平面区域. 第二步　是规则的图形——三角形. 第三步　求出交点坐标,根据三角形面积公式求面积.

模板攻略

1. 模板解决思路

求平面区域的面积,先画出不等式组表示的平面区域,然后根据区域的形状求面积. 若图形为规则图形,则直接利用面积公式求解;若图形为不规则图形,可采取分割的方法,将平面区域分成几个规则图形,然后求解.

2. 模板解决步骤

1 第一步　画出不等式组所表示的平面区域.

2 第二步　若是不规则图形,则先将其分割为规则图形.

3 第三步　根据规则图形的面积公式求解.

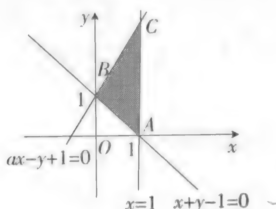
3. 典型例题

典例 1　(福建高考)在平面直角坐标系中,若不等式组$\begin{cases}x+y-1\geqslant 0,\\x-1\leqslant 0,\\ax-y+1\geqslant 0\end{cases}$($a$为常数)所表示的平面区域的面积等于2,则$a$的值为(　　).

A. -5　　B. 1　　C. 2　　D. 3

科学家与诗人(一)　有个科学家和一个诗人乘一辆火车,虽然两人互不相识,却挺有话聊. 科学家对诗人说:"你要不要玩个游戏,我们互相问对方问题,答不出来的要给对方10元,如何?"诗人心想自己这么穷酸,比赛又不太容易赢科学家,于是就推托拒绝了.

解析：不等式组 $\begin{cases}x+y-1\geqslant 0,\\x-1\leqslant 0,\\ax-y+1\geqslant 0\end{cases}$ 所围成的区域如图所示.



①

$\because$ 其面积为 2，$\therefore |AC|=4$，②~③

$\therefore C$ 的坐标为(1,4)，代入 $ax-y+1=0$，得 $a=3$. 故选 D.

答案：D

典例 2　(安徽高考)在平面直角坐标系中，O 是坐标原点，两定点 A,B 满足 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$，则点集 $\{P|\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},|\lambda|+|\mu|\leqslant 1,\lambda,\mu\in\mathbf{R}\}$ 所表示的区域的面积是(　　).

A. $2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{3}$

C. $4\sqrt{2}$　　D. $4\sqrt{3}$

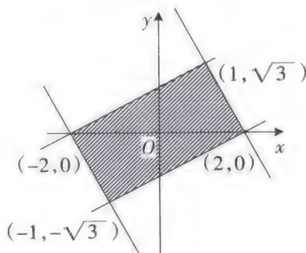
解析：由 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$ 知 $\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle=\frac{\pi}{3}$.

设 $\overrightarrow{OA}=(2,0)$，$\overrightarrow{OB}=(1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{OP}=(x,y)$，则 $\begin{cases}x=2\lambda+\mu,\\y=\sqrt{3}\mu,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}\mu=\frac{y}{\sqrt{3}},\\\lambda=\frac{1}{2}\left(x-\frac{y}{\sqrt{3}}\right).\end{cases}$

由 $|\lambda|+|\mu|\leqslant 1$ 得 $|\sqrt{3}x-y|+|2y|\leqslant 2\sqrt{3}$.

作可行域如图.



①

则所求面积 $S=2\times\frac{1}{2}\times 4\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.　②~③

答案：D

知识要点

1. 二元一次不等式(组)的相关概念

(1)二元一次不等式

含有两个未知数，并且未知数的次数为 1 的不等式.

(2)二元一次不等式组

由几个二元一次不等式组成的不等式组.

(3)二元一次不等式(组)的解集

满足二元一次不等式(组)的 x 和 y 的取值构成有序数对 (x,y)，所有这样的有序数对 (x,y) 构成的集合称为二元一次不等式(组)的解集.

2. 二元一次不等式与平面区域

一般地，在平面直角坐标系中，二元一次不等式 $Ax+By+C>0$，表示直线 $Ax+By+C=0$ 某一侧所有点组成的平面区域，把直线画成虚线，以表示区域不包括边界. 不等式 $Ax+By+C\geqslant 0$ 表示的平面区域包括边界，把边界画成实线. 直线 $Ax+By+C=0$ 叫作这两个区域的边界.

对于直线 $Ax+By+C=0$ 同一侧的所有点，把它的坐标 (x,y) 代入 $Ax+By+C$，所得的符号都相同，因此只需在直线 $Ax+By+C=0$ 的同一侧取某个特殊点 (x_0,y_0) 作为测试点，由 Ax_0+By_0+C 的符号就可以断定 $Ax+By+C>0$ 表示的是直线 $Ax+By+C=0$ 哪一侧的平面区域. 如果直线不过原点，则用原点的坐标来进行判断.

特别提示

对于直线 $Ax+By+C=0$ $(A>0)$，$Ax+By+C>0$ 表示直线右侧的区域，$Ax+By+C<0$ 表示直线左侧的区域.

科学家与诗人(二)　好胜的科学家依然不死心地说："那这样子好了，如果是我答不出来，就输给你 100 元，这样好不好？"在金钱的诱惑下，诗人也就答应了科学家. 科学家问："地球表面距离地心有几公里？"诗人答不出来，就拿了 10 元给科学家. 接着诗人就问："什么东西上山时是四条腿，下山时是五条腿？"



3. 二元一次不等式组与平面区域

二元一次不等式组表示的平面区域是各个不等式表示的平面区域的交集. 即各个不等式表示的平面区域的公共部分.

特别提示

二元一次不等式组表示的平面区域可能是一个封闭的区域，也可能是一个无限区域，在画区域时，不能"想当然"地认为某个封闭区域就是二元一次不等式组表示的区域.

模板演练

➡ 答案详见 P434

1. 若 $a\geqslant0,b\geqslant0$，且当 $\begin{cases}x\geqslant0,\\y\geqslant0,\\x+y\leqslant1\end{cases}$ 时，恒有 $ax+by\leqslant1$，则以 a,b 为坐标的点 $P(a,b)$ 所形成的平面区域的面积是(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. 1　　D. $\frac{\pi}{2}$

2. 已知关于 x,y 的不等式组 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant2,\\x+y-2\geqslant0,\\kx-y+2\geqslant0\end{cases}$ 所表示的平面区域的面积为 4，则 k 的值为(　　).

A. 1　　B. -3　　C. 1 或 -3　　D. 0

3. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知平面区域 $A=\{(x,y)\mid x+y\leqslant1$ 且 $x\geqslant0,y\geqslant0\}$，则平面区域 $B=\{(x+y,x-y)\mid(x,y)\in A\}$ 的面积为(　　).

A. 2　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{4}$

4. 已知不等式组 $\begin{cases}x-y+1\geqslant0,\\x+y-1\geqslant0,\\3x-y-3\leqslant0\end{cases}$ 表示的平面区域为 D，若直线 $y=kx+1$ 将区域 D 分成面积相等的两部分，则实数 k 的值是 ______.

模板 6　求线性目标函数的取值范围(或最值)

【每年必考】

模板探究

母 题 呈 现	模 板 引 入
(新课标全国高考)设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x-y+1\geqslant0,\\x+y-1\geqslant0,\\x\leqslant3,\end{cases}$ 则 $z=2x-3y$ 的最小值是(　　). A. -7　　B. -6　　C. -5　　D. -3	本模板解决的是"已知约束条件(或根据实际问题写出约束条件)，求线性目标函数取值范围(或最值)"的问题.
解析：由约束条件得可行域(如图)，当直线 $2x-3y-z=0$ 过点 $A(3,4)$ 时，$z_{min}=2\times3-3\times4=-6$. 故选 B. y　A(3,4)　x+y-1=0　1　O　1　3　x　x-y+1=0　x=3 **答案**：B	第一步　根据约束条件画出可行域. 第二步　把线性目标函数 $z=2x-3y$ 变形为 $y=\frac{2}{3}x-\frac{z}{3}$，求 z 的最小值即为求该直线系 y 轴上截距的最大值(在可行域内). 第三步　平移线性目标函数，易知在 $A(3,4)$ 处，z 最小. 第四步　把 $A(3,4)$ 代入 $z=2x-3y$ 中求最小值.

凯乐微博



科学家与诗人(三)　科学家这下子可是被考倒了，急急忙忙拿出了几张纸，在上面画着，就这样一直到了火车到站时，他还是算不出答案是什么，于是他就心甘情愿地拿了 100 元给诗人. 科学家不解地问："告诉我答案是什么，快告诉我吧！"只见诗人默默不语，从口袋掏了 10 元给他，赶快落跑！

模板攻略

1. 模板解决思路

解决线性规划问题首先要找到可行域，注意目标函数所表示的几何意义，然后数形结合找到目标函数达到最值时可行域的顶点（或边界上的点），但要注意作图一定要准确. 对于整点问题要验证解决.

2. 模板解决步骤

1 第一步　在平面直角坐标系内作出可行域（若是实际问题，则先写出约束条件，再作出可行域）.

2 第二步　考虑目标函数的几何意义，将目标函数进行变形得基本直线（如 $x+y=0$）.

3 第三步　确定最优解：在可行域内平行移动目标函数变形后的直线，从而确定最优解.

4 求最值　将最优解代入目标函数即可求出最大值或最小值.

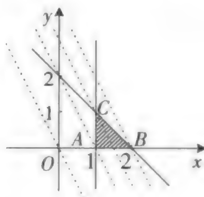
3. 典型例题

典例 1　（福建高考）若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 2,\\ x\geqslant 1,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=2x+y$ 的最大值和最小值分别为（　　）.

A. 4 和 3　　B. 4 和 2

C. 3 和 2　　D. 2 和 0

解析： 画出约束条件 $\begin{cases}x+y\leqslant 2,\\ x\geqslant 1,\\ y\geqslant 0\end{cases}$ 表示的图形，易知可行域为直角三角形 ABC（如图）.



1

由 $z=2x+y$ 得 $y=-2x+z$,　2

由图象可知，当直线 $y=-2x+z$ 过点 $B(2,0)$ 和点 $A(1,0)$ 时，z 分别取得最大值和最小值.　3

即 $z_{max}=2\times2+0=4$

$z_{min}=2\times1+0=2$.　4

答案： B

典例 2　（湖北高考）某旅行社租用 A、B 两种型号的客车安排 900 名客人旅行，A、B 两种车辆的载客量分别为 36 人和 60 人，租金分别为 1 600 元/辆和 2 400 元/辆，旅行社要求租车总数不超过 21 辆，且 B 型车不多于 A 型车 7 辆. 则租金最小为（　　）.

A. 31 200 元　　B. 36 000 元

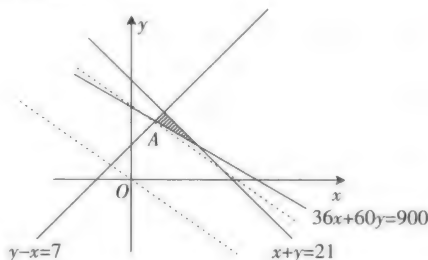
C. 36 800 元　　D. 38 400 元

解析： 设旅行社租用 A 型客车 x 辆，B 型客车 y 辆，租金为 z，

则线性约束条件为 $\begin{cases}x+y\leqslant 21,\\ y-x\leqslant 7,\\ 36x+60y\geqslant 900,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\end{cases}$

目标函数为 $z=1\ 600x+2\ 400y$.　1

画出可行域：



1

当目标函数 $z=1\ 600x+2\ 400y$ 经过点 $A(5,12)$ 时，z 取得最小值.　2～3

$z_{min}=1\ 600\times5+2\ 400\times12=36\ 800$（元）. 故选 C.　4

答案： C

读书的十大误区（一）　1. 主观臆断，情绪化. 2. 断章取义，不能全面性地看问题，以及时代背景. 3. 求全责备，任何一篇文章，甚至一本书，都不可能穷尽天下事物，都只能就某一事物，或一事物的某一个方面阐述；如果涉及的问题越多，越难说明问题，甚至于更加混乱. 4. 纠缠于细枝末节，钻牛角尖.



知识要点

线性规划的相关概念

线性约束条件	约束条件都是关于 x,y 的一次不等式
目标函数	要求最大(小)值的函数
线性目标函数	目标函数是关于变量 x,y 的一次解析式
线性规则	在线性约束条件下求线性目标函数的最大值或最小值问题
可行解	满足线性约束条件的解 (x,y)
可行域	由所有可行解组成的集合
最优解	使目标函数取得最大值或最小值的可行解

特别提示

(1)线性约束条件除用二元一次不等式表示外,有时还用二元一次方程表示.

(2)最优解有时是唯一的,有时不唯一,甚至是无穷多个.

(3)对于二元一次不等式组表示的平面区域,若存在使目标函数 $z=ax+by$ 达到最大值或最小值的点,那么最值一般在该区域的顶点或边界上取到.

(4)若题目中限定 $x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}$,最优解不一定在边界或顶点处取得,应在该区域的顶点或边界附近寻找.

(5)由于最优解是通过图形来观察的,故作图要准确,否则观察的结果可能有误.

模板演练

➡ 答案详见 P435

1. (湖南高考)若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} y\leqslant 2x, \\ x+y\leqslant 1, \\ y\geqslant -1, \end{cases}$ 则 $x+2y$ 的最大值是(　　).

A. $-\frac{5}{2}$　　B. 0　　C. $\frac{5}{3}$　　D. $\frac{5}{2}$

2. (天津高考)设变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} 3x+y-6\geqslant 0, \\ x-y-2\leqslant 0, \\ y-3\leqslant 0, \end{cases}$ 则目标函数 $z=y-2x$ 的最小值为(　　).

A. -7　　B. -4　　C. 1　　D. 2

3. (陕西高考)若点 (x,y) 位于曲线 $y=|x|$ 与 $y=2$ 所围成的封闭区域,则 $2x-y$ 的最小值是(　　).

A. -6　　B. -2　　C. 0　　D. 2

4. (四川高考)若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y\leqslant 8, \\ 2y-x\leqslant 4, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0, \end{cases}$ 且 $z=5y-x$ 的最大值为 a,最小值为 b,则 $a-b$ 的值是(　　).

A. 48　　B. 30　　C. 24　　D. 16

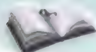
5. (湖南高考)若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y\leqslant 8, \\ 0\leqslant x\leqslant 4, \\ 0\leqslant y\leqslant 3, \end{cases}$ 则 $x+y$ 的最大值为 ______.

6. (广东高考)已知变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y+3\geqslant 0, \\ -1\leqslant x\leqslant 1, \\ y\geqslant 1, \end{cases}$ 则 $z=x+y$ 的最大值是 ______.

7. (陕西高考)若点 (x,y) 位于曲线 $y=|x-1|$ 与 $y=2$ 所围成的封闭区域,则 $2x-y$ 的最小值为 ______.

8. (新课标全国高考)设 x,y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y\geqslant -1, \\ x+y\leqslant 3, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0, \end{cases}$ 则 $z=x-2y$ 的取值范围为 ______.

凯乐微博



读书的十大误区(二)　5. 自以为是,自高自大,自命不凡."一叶障目,不见泰山."不能客观地看问题.以为自己全都是"对的",别人全都是"错的";事实上,自己的未必"全对",别人的也未必"全错".6. 停留在表面上,粗枝大叶,不理解深刻的内涵.7. 剑走偏锋,理解偏,以偏概全;甚至于不是就事论事,偷梁换柱,偷换概念;或东拉西扯,离题万里.

模板7　利用基本不等式求最值【5年30考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(天津高考)设 $a+b=2$,$b>0$,则当 $a=$______时,$\frac{1}{2\|a\|}+\frac{\|a\|}{b}$取得最小值.	本模板解决的是"利用已知条件和基本不等式,将要求最值的表达式经过变形、放缩后,求出最值"的问题.
解析:$\because a+b=2$,$\therefore \frac{1}{2\|a\|}+\frac{\|a\|}{b}=\frac{2}{4\|a\|}+\frac{\|a\|}{b}=\frac{a+b}{4\|a\|}+\frac{\|a\|}{b}=\frac{a}{4\|a\|}+\frac{b}{4\|a\|}+\frac{\|a\|}{b}\geqslant\frac{a}{4\|a\|}+2\sqrt{\frac{b}{4\|a\|}\times\frac{\|a\|}{b}}=\frac{a}{4\|a\|}+1$. 当且仅当$\frac{b}{4\|a\|}=\frac{\|a\|}{b}$且 $a<0$,即 $b=-2a$,$a=-2$ 时,$\frac{1}{2\|a\|}+\frac{\|a\|}{b}$取得最小值. **答案**:$-2$	第一步　根据 $a+b=2$ 将代数式中的"1"等量代换. 第二步　将代数式进行变形. 第三步　根据基本不等式易知$\frac{b}{4\|a\|}=\frac{\|a\|}{b}$时,代数式取得最小值.

模板攻略

1. 模板解决思路

(1)运用基本不等式求最值时,要注意:一是各项或因式为正值,二是和或积为定值,三是各项或因式能相等,即"一正、二定、三相等".这三个条件缺一不可.

(2)常用方法

①拆项、添项、配凑

此法常用在求分式型函数的最值中,如

$f(x)=\frac{x^2+7x+10}{x+1}=\frac{(x+1)^2+5(x+1)+4}{x+1}$.

②常值代换

这种方法常用于"已知 $ax+by=m(a,b,x,y$ 均为正数),求$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的最小值"和"已知$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$ $(a,b,x,y$ 均为正数),求 $x+y$ 的最小值"两类题型.

2. 模板解决步骤

1 第一步　将要求最值的表达式变形为两项和或积的形式.

2 第二步　利用基本不等式将变形后的代数式放缩为一个定值.

3 第三步　写出等号成立的条件,求出最值.

3. 典型例题

典例1　(福建高考)若 $2^x+2^y=1$,则 $x+y$ 的取值范围是(　　).

A. $[0,2]$　　B. $[-2,0]$

C. $[-2,+\infty)$　　D. $(-\infty,-2]$

解析:因为 $2^x>0$,$2^y>0$,

所以 $1=2^x+2^y\geqslant2\sqrt{2^x\cdot2^y}=2\sqrt{2^{x+y}}$,　1~2

故 $\sqrt{2^{x+y}}\leqslant\frac{1}{2}$,即 $2^{x+y}\leqslant\frac{1}{4}=2^{-2}$,

所以 $x+y\leqslant-2$,故选 D.　3

答案:D

典例2　(四川高考)已知函数 $f(x)=4x+\frac{a}{x}(x>0,a>0)$在 $x=3$ 时取得最小值,则 $a=$______.

解析:$\because x>0,a>0$,

必修5

读书的十大误区(三)　8. 人云亦云,没有是非,没有原则,没有自己的主张,没有自己的观点,没有自己的主见,没有自己的判断. 9. 常识不够,因知识面窄,知之甚少,无法理解,就误读,不能理解就乱理解. 10. 别有动机,故意歪曲,为了维护自私的"既得利益",为其错误的主张观点,可以找出一万条错误的理由进行诡辩.

凯尔微博


$\therefore f(x)=4x+\frac{a}{x}\geq 2\sqrt{4x\cdot\frac{a}{x}}=4\sqrt{a}$， ①~②

当且仅当$4x=\frac{a}{x}$时等号成立. 此时$a=4x^2$， ③

由已知$x=3$时函数取得最小值，

所以$a=4\times 9=36$.

答案：36

知识要点

1. 基本不等式及相关概念

(1)基本不等式：$\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$

①基本不等式成立的条件：$a>0,b>0$.

②等号成立的条件：当且仅当 $a=b$ 时取等号.

(2)算术平均数与几何平均数

设 $a>0,b>0$，则 a,b 的算术平均数为$\frac{a+b}{2}$，几何平均数为$\sqrt{ab}$，基本不等式可叙述为两个正数的算术平均数大于或等于它们的几何平均数. 基本不等式又称为均值不等式、均值定理.

2. 基本不等式的常见变形

(1)如果 a,b 均为实数，那么 $a^2+b^2\geq 2ab$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

(2)①$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geq 2$($a,b$ 同号)；

②$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\leq -2$($a,b$ 异号)；

③$x+\frac{1}{x}\geq 2(x>0)$；

④$x+\frac{1}{x}\leq -2(x<0)$.

(3)$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leq\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ $(a>0,b>0)$.

(4)$ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leq\frac{a^2+b^2}{2}$ $(a,b\in\mathbf{R})$.

3. 最值定理

(1)两个正数的和为定值时，它们的积有最大值，即若 $a>0,b>0$，且 $a+b=M$，M 为定值，则 $ab\leq\frac{M^2}{4}$，等号当且仅当 $a=b$ 时成立.

即 $a+b=M$，M 为定值时，$(ab)_{max}=\frac{M^2}{4}$.

(2)两个正数的积为定值时，它们的和有最小值，即若 $a>0,b>0$，且 $ab=P$，P 为定值，则 $a+b\geq 2\sqrt{P}$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立. 即 $ab=P$，P 为定值时，$(a+b)_{min}=2\sqrt{P}$.

模板演练

➡ 答案详见 P436

1.(重庆高考)已知 $x>0,y>0,x+2y+2xy=8$，则 $x+2y$ 的最小值是(　　).

A. 3　　B. 4　　C. $\frac{9}{2}$　　D. $\frac{11}{2}$

2.(陕西高考)设 $0<a<b$，则下列不等式中正确的是(　　).

A. $a<b<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$　　B. $a<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<b$

C. $a<\sqrt{ab}<b<\frac{a+b}{2}$　　D. $\sqrt{ab}<a<\frac{a+b}{2}<b$

3.(四川高考)设 $a>b>c>0$，则 $2a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}-10ac+25c^2$ 的最小值是(　　).

A. 2　　B. 4　　C. $2\sqrt{5}$　　D. 5

4.(浙江高考)设 x,y 为实数，若 $4x^2+y^2+xy=1$，则 $2x+y$ 的最大值是______.

5.(湖南高考)设 $x,y\in\mathbf{R}$，且 $xy\neq 0$，则$\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{x^2}+4y^2\right)$的最小值为______.

6.(浙江高考)若实数 x,y 满足 $x^2+y^2+xy=1$，则 $x+y$ 的最大值是______.

凯尔微博



数学太差的结果(一)　小学时我的数学太差. 记得有一天数学老师布置作业，有一道题是 3 的 2 次方，我想这不就是 3×2 吗，于是大笔一挥写了 6，结果可想而知. 第二天作业发下来了，老师批了一道红叉，还让我更正. 可我实在想不明白到底哪儿错了，于是更正的时候我又把答案写上等于 6，老师毫不留情地又给了我一道红叉.

第一章 常用逻辑用语

模板 1 求一个命题的逆命题或否命题或逆否命题【5年6考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(湖南高考)命题“若$\alpha=\frac{\pi}{4}$,则 $\tan\alpha=1$”的逆否命题是(　　). A. 若$\alpha\neq\frac{\pi}{4}$,则 $\tan\alpha\neq1$　B. 若$\alpha=\frac{\pi}{4}$,则 $\tan\alpha\neq1$ C. 若 $\tan\alpha\neq1$,则$\alpha\neq\frac{\pi}{4}$　D. 若 $\tan\alpha\neq1$,则$\alpha=\frac{\pi}{4}$	本模板解决的是“已知一个命题,写出其对应的逆命题或否命题或逆否命题，并会判断它们的真假”的问题.
解析:命题已具备“若 p,则 q”形式,其中“$\alpha=\frac{\pi}{4}$”的否定为“$\alpha\neq\frac{\pi}{4}$”,“$\tan\alpha=1$”的否定为“$\tan\alpha\neq1$”,交换位置,得逆否命题是“若 $\tan\alpha\neq1$,则$\alpha\neq\frac{\pi}{4}$”. **答案:**C	第一步　从题目中找出 p 和 q. 第二步　求出$\neg p,\neg q$ 的形式. 第三步　写出其逆否命题.

模板攻略

1. 模板解决思路

(1)在判断四种命题之间的关系时,首先要分清命题的条件与结论,再比较每个命题的条件与结论之间的关系,要注意四种命题关系的相对性,一个命题定为原命题,也就相应地有了它的“逆命题”“否命题”和“逆否命题”.

(2)互为逆否命题的两个命题是等价命题,即同为真或同为假. 根据这个结论我们可以把一些难于判断的命题转化为其逆否命题来判断，其中原命题和其逆否命题、其逆命题和其否命题都互为逆否命题.

2. 模板解决步骤

1 第一步　将命题表示成“若 p,则 q”的形式,其中 p 为条件,q 为结论.

2 第二步　表示出 p 和 q 的否定,即$\neg p$ 和$\neg q$.

3 第三步　逆命题:若 q,则 p;否命题:若$\neg p$,则$\neg q$;逆否命题:若$\neg q$,则$\neg p$.

4 第四步　判断逆命题、否命题、逆否命题的真假.

数学太差的结果(二)　如此往返三、四次,老师终于受不了了,把我叫进办公室反复跟我讲解:一个数多少次方就是把这个数与它自身相乘多少次,比如 3 的 2 次方就是 3×3,3 的 3 次方就是 3×3×3. 我死死地记住了. 后来期末考试,有一道填空题是这样的:1 的一百次方等于(　　). 我想起平时老师教我的,心想老师这也太狠点了吧,可这难不倒我.

凯尔微博



3. 典型例题

典例1 （天津高考）命题“若$f(x)$是奇函数，则$f(-x)$是奇函数”的否命题是（　　）.

A. 若$f(x)$是偶函数，则$f(-x)$是偶函数

B. 若$f(x)$不是奇函数，则$f(-x)$不是奇函数

C. 若$f(-x)$是奇函数，则$f(x)$是奇函数

D. 若$f(-x)$不是奇函数，则$f(x)$不是奇函数

解析：命题已具备“若p，则q”的形式. ①

“$f(x)$是奇函数”的否定是“$f(x)$不是奇函数”. “$f(-x)$是奇函数”的否定是“$f(-x)$不是奇函数”. ②

故所要求的否命题是“若$f(x)$不是奇函数，则$f(-x)$不是奇函数”. ③

答案：B

典例2 （山东高考）给出命题：若函数$y=f(x)$是幂函数，则函数$y=f(x)$的图象不过第四象限. 在它的逆命题、否命题、逆否命题三个命题中，真命题的个数是（　　）.

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

解析：原命题的逆命题为：若$y=f(x)$的图象不过第四象限，则函数$y=f(x)$是幂函数， ①～③

显然此命题为假. ④

又因为逆命题与否命题同真假，所以否命题为假. 原命题与逆否命题等价，而原命题为真，所以逆否命题为真. 故选C. ④

答案：C

知识要点

1. 命题

(1)定义

在数学中，把用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句叫作命题，其中判断为真的语句叫作真命题，判断为假的语句叫作假命题.

(2)命题的形式

一般形式为“若p，则q”，通常，我们把这种形式的命题中的p叫作命题的条件，q叫作命题的结论.

2. 四种命题

(1)定义

①互逆命题

一般地，对于两个命题，如果一个命题的条件和结论分别是另一个命题的结论和条件，那么我们把这样的两个命题叫作互逆命题. 其中一个命题叫作原命题，另一个叫作原命题的逆命题.

②互否命题

对于两个命题，其中一个命题的条件和结论恰好是另一个命题的条件的否定和结论的否定，我们把这样的两个命题叫作互否命题. 如果把其中的一个命题叫作原命题，那么另一个叫作原命题的否命题.

③互为逆否命题

对于两个命题，其中一个命题的条件和结论恰好是另一个命题的结论的否定和条件的否定，我们把这样的两个命题叫作互为逆否命题. 如果把其中的一个命题叫作原命题，那么另一个叫作原命题的逆否命题.

(2)四种命题的形式

如果原命题用若p，则q表示（p叫作原命题的条件，q叫作原命题的结论），p和q的否定用$\neg p$和$\neg q$表示，则四种命题的形式是：

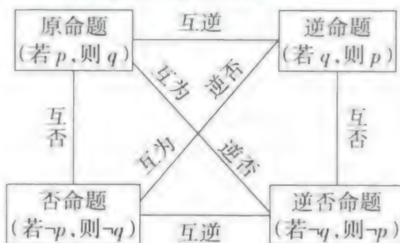
原命题：若p，则q；

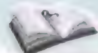
逆命题：若q，则p；

否命题：若$\neg p$，则$\neg q$；

逆否命题：若$\neg q$，则$\neg p$.

3. 四种命题间的相互关系





数学太差的结果（三） 我拿出一张草纸，在上面一遍遍地乘起来……当好不容易乘到第83次时，数学老师过来了，他站在我身后见我认真地在用1乘以1，眼看大功告成，他快步走上讲台说：“同学们，有一道题出错了，现在更正一下，那个1的一百次方的填空题，现在请把它改为1的一千次方.”我惊愕了，当即晕倒……

模板演练

➡ 答案详见 P437

1.（重庆高考）命题“若 p 则 q”的逆命题是(　　).

A. 若 q 则 p　　B. 若$\neg p$ 则$\neg q$

C. 若$\neg q$ 则$\neg p$　　D. 若 p 则$\neg q$

2. 设$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$是向量,命题“若$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$,则$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$”的逆否命题是(　　).

A. 若$\boldsymbol{a}\neq-\boldsymbol{b}$,则$|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$

B. 若$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$,则$|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$

C. 若$|\boldsymbol{a}|\neq|\boldsymbol{b}|$,则$\boldsymbol{a}\neq-\boldsymbol{b}$

D. 若$|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$,则$\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$

3.（重庆高考）命题“若一个数是负数,则它的平方是正数”的逆命题是(　　).

A.“若一个数是负数,则它的平方不是正数”

B.“若一个数的平方是正数,则它是负数”

C.“若一个数不是负数,则它的平方不是正数”

D.“若一个数的平方不是正数,则它不是负数”

4.（江西高考）下列命题是真命题的为(　　).

A. 若$\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$,则 $x=y$　　B. 若 $x^2=1$,则 $x=1$

C. 若 $x=y$,则$\sqrt{x}=\sqrt{y}$　　D. 若 $x<y$,则 $x^2<y^2$

模板 2　充分条件与必要条件的判断【5年60考】

模板探究

母题呈现	模板引入
（湖南高考）“$1<x<2$”是“$x<2$”成立的(　　). A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件 C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件	本模板解决的是“已知条件 p,判断命题 m 是命题 n 的××(充分不必要、必要不充分、充要、既不充分也不必要)条件”的问题.
解析:当 $1<x<2$ 时,必有 $x<2$; 而 $x<2$ 时,如 $x=0$ 时,推不出 $1<x<2$, 所以“$1<x<2$”是“$x<2$”的充分不必要条件. **答案**:A	第一步　“$1<x<2$”是条件,“$x<2$”是结论. 第二步　$1<x<2\Rightarrow x<2$;$x<2\nRightarrow 1<x<2$. 第三步　“$1<x<2$”是“$x<2$”成立的充分不必要条件.

模板攻略

1. 模板解决思路

(1)判断充分、必要条件时应注意的问题:

①要弄清先后顺序:“A 的充分不必要条件是 B”是指 B 能推出 A,且 A 不能推出 B;而“A 是 B 的充分不必要条件”则是指 A 能推出 B,且 B 不能推出 A;

②要善于举出反例:如果从正面判断或证明一个命题的正确或错误不易进行,那么可以通过举出恰当的反例来说明.

(2)当命题与数集有关时,可把充分、必要条件,转化为数集间的关系求解.

生活中的数学:实用的圆(一)　我们知道,圆是到定点的距离等于定长的点的轨迹.也就是说,圆周上的点到圆心的距离相等.这是圆的一个最重要而又最基本的性质.车轮就是利用圆的这个性质制成的.车轴装在车轮的圆心位置上,车轮边缘到车轴的距离是一定的.车子在行进中,车轴到路面的距离总是一样的.只要路面平整,车子就不会颠簸,给人以舒服的感觉.



2. 模板解决步骤

1 第一步　分清条件和结论，分清哪个是条件，哪个是结论.

2 第二步　找推式，判断"条件⇒结论"及"结论⇒条件"的真假.

3 第三步　下结论.

3. 典型例题

典例 1　（浙江高考）若 $\alpha\in\mathbf{R}$，则"$\alpha=0$"是"$\sin\alpha<\cos\alpha$"的（　　）.

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　D. 既不充分也不必要条件

解析： 若 $\alpha=0$，则 $\sin\alpha=0,\cos\alpha=1$，所以 $\sin\alpha<\cos\alpha$；若 $\sin\alpha<\cos\alpha$，α 有无数多个.　1～2

所以"$\alpha=0$"是"$\sin\alpha<\cos\alpha$"的充分不必要条件.　3

答案： A

典例 2　（福建高考）设点 $P(x,y)$，则"$x=2$ 且 $y=-1$"是"点 P 在直线 $l:x+y-1=0$ 上"的（　　）.

A. 充分而不必要条件　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　D. 既不充分也不必要条件

解析： 若 $x=2$ 且 $y=-1$，则 $x+y-1=0$；反之，若 $x+y-1=0$，则 x,y 有无数组解，如 $x=3,y=-2$ 等，不一定有 $x=2$ 且 $y=-1$.　1～2

所以"$x=2$ 且 $y=-1$"是"点 P 在直线 $l:x+y-1=0$ 上"的充分而不必要条件. 故选 A.　3

答案： A

误区警示

解题时易出现不能确定条件和结论，而把必要性和充分性搞反的情况，充分性是由条件推得结论，必要性是由结论推得条件.

知识要点

1. 充分条件与必要条件

一般地，"若 p，则 q"为真命题，是指由 p 通过推理可以得出 q. 这时，就说由 p 可推出 q，记作 $p\Rightarrow q$，并且说 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件.

2. 充要条件

一般地，如果既有 $p\Rightarrow q$，又有 $q\Rightarrow p$，就记作 $p\Leftrightarrow q$，此时，我们说，p 是 q 的充分必要条件，简称充要条件. 显然，如果 p 是 q 的充要条件，那么 q 也是 p 的充要条件.

概括地说，如果 $p\Leftrightarrow q$，那么 p 与 q 互为充要条件. "p 是 q 的充要条件"也说成"p 等价于 q""q 当且仅当 p"等.

特别提示

数学中的每一个数学概念都是用充要条件来定义的，反过来，每个数学概念的定义都可以看成充要条件，当作判断依据或概念所具有的性质.

3. 充分条件、必要条件的四种类型

关系式	结论
$p\Rightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$	p 是 q 的充分不必要条件
$p\nRightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$	p 是 q 的必要不充分条件
$p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$	p 是 q 的充要条件
$p\nRightarrow q$ 且 $q\nRightarrow p$	p 是 q 的既不充分也不必要条件

模板演练

➜ 答案详见 P437

1. （安徽高考）"$(2x-1)x=0$"是"$x=0$"的（　　）.

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

2. （天津高考）设 $x\in\mathbf{R}$，则"$x>\frac{1}{2}$"是"$2x^2+x-1>0$"的（　　）.

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

凯尔微博

生活中的数学：实用的圆（二）　假如我们把车轮做成方形的，把车轴放在车轮的对称中心，即便走在平坦的公路上，车子也会上下颠簸，坐车人的感觉也就不会舒服了. 用同样长度的材料围成一个多边形或圆，其中面积最大的是圆；用同样面积的材料做一个立方体或圆柱体，其中圆柱体的体积更大. 利用这个性质，人们制造了各种圆柱形制品：圆柱形的谷仓、地下管道等.

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

3. (湖北高考)设 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$,则"$abc=1$"是"$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\leqslant a+b+c$"的(　　).

A. 充分条件但不是必要条件

B. 必要条件但不是充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要的条件

4. (安徽高考)设平面α与平面β相交于直线 m,直线 a 在平面α内,直线 b 在平面β内,且 $b\perp m$,则"$\alpha\perp\beta$"是"$a\perp b$"的(　　).

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. (福建高考)已知集合 $A=\{1,a\}$,$B=\{1,2,3\}$,则"$a=3$"是"$A\subseteq B$"的(　　).

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

6. (山东高考)给定两个命题p,q. 若$\neg p$是q的必要而不充分条件,则p是$\neg q$的(　　).

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

模板 3　复合命题真假的判断 【5年6考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(山东高考)设命题p:函数$y=\sin 2x$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$;命题q:函数$y=\cos x$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{2}$对称. 则下列判断正确的是(　　). A. p为真　B. $\neg q$为假　C. $p\wedge q$为假　D. $p\vee q$为真	本模板解决的是"已知命题 p,命题 q,判断 $p\wedge q$,$p\vee q$,$\neg p$ 等复合命题的真假"的问题.
解析:函数$y=\sin 2x$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$,函数$y=\cos x$的对称轴为直线$x=k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,故p,q都是假命题,所以$p\wedge q$为假,C正确. **答案:**C	第一步　查看命题的构成形式. 第二步　由题意易判断命题 p,q 都是假命题. 第三步　易确定只有"$p\wedge q$ 为假"正确.

选择题的题型特点(一)　1. 概念性强:数学中的每个术语符号,乃至习惯用语,往往都有明确具体的含义,这个特点反映到选择题中,表现出来的就是试题的概念性强. 2. 充满思辨性:这个特点源于数学的高度抽象性、系统性和逻辑性,思辨性的要求充满题目的字里行间.



模板攻略

1. 模板解决思路

对于复合命题真假的判断，一定要分清其结构形式，确定构成它的简单命题 p 和 q. 首先对简单命题 p，q 的真假作出判断，然后根据真值表对复合命题的真假作出判断.

2. 模板解决步骤

1 第一步　确定复合命题的结构形式.

2 第二步　判断构成这个复合命题的每个简单命题的真假.

3 第三步　根据"真值表"判断复合命题的真假.

3. 典型例题

典例 1　(北京高考)若 p 是真命题，q 是假命题，则(　　).

A. $p\wedge q$是真命题　　B. $p\vee q$是假命题

C. $\neg p$是真命题　　D. $\neg q$是真命题

解析：由p是真命题，q是假命题，　1～2

得$p\wedge q$为假，$p\vee q$为真，$\neg p$为假，$\neg q$为真.　3

答案：D

典例 2　(新课标全国高考)已知命题 p_1：函数 $y=2^x-2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，p_2：函数 $y=2^x+2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数，则在命题 $q_1:p_1\vee p_2$，$q_2:p_1\wedge p_2$，$q_3:(\neg p_1)\vee p_2$ 和 $q_4:p_1\wedge(\neg p_2)$中，真命题是(　　).

A. q_1，q_3　　B. q_2，q_3

C. q_1，q_4　　D. q_2，q_4

思路分析：先利用指数函数的性质判断出命题p_1，p_2的真假，然后再根据真值表判断复合命题的真假.

解析：$\because y=2^x$在$\mathbf{R}$上为增函数，$\therefore y=2^{-x}$在$\mathbf{R}$上是减函数，$\therefore y=2^x-2^{-x}$在$\mathbf{R}$上是增函数，$\therefore p_1$：函数$y=2^x-2^{-x}$在$\mathbf{R}$上为增函数为真命题，p_2：函数$y=2^x+2^{-x}$在$\mathbf{R}$上为减函数为假命题，　1～2

故 $q_1:p_1\vee p_2$ 是真命题，$q_2:p_1\wedge p_2$ 是假命题，$q_3:(\neg p_1)\vee p_2$ 是假命题，$q_4:p_1\wedge(\neg p_2)$是真命题. 故真命题是 q_1，q_4，故选 C.　3

答案：C

误区警示

逻辑联结词中的"或"与日常用语中的"或"的含义存在区别，日常生活用语中的"p 或 q"包含两层含义：要么是 p，要么是 q，两者中只能选择一个，而不能两者全选，但逻辑联结词中"p或q"有三层意思：要么只是 p，要么只是 q，要么是 p 和 q，即两者中至少要有一个.

知识要点

1. "且""或""非"

(1)且：一般地，用联结词"且"把命题 p 和命题 q 联结起来，就得到一个新命题，记作 $p\wedge q$，读作"p 且 q".

(2)或：一般地，用联结词"或"把命题 p 和命题 q 联结起来，就得到一个新命题，记作 $p\vee q$，读作"p 或 q".

(3)非：一般地，对一个命题 p 全盘否定，就得到一个新命题，记作$\neg p$，读作"非 p"或"p 的否定".

2. 命题 $p\wedge q$，$p\vee q$，$\neg p$ 的真假判断

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$\neg p$
真	真	真	真	假
真	假	假	真	假
假	真	假	真	真
假	假	假	假	真

(1)当 p，q 都是真命题时，$p\wedge q$ 是真命题；当

选择题的题型特点(二)　3. 形数兼备：高考的数学选择题中，几何选择题常常隐藏着代数问题，而代数选择题往往又寓有几何图形的问题. 4. 解法多样化：数学选择题的备选项往往给题目的解答提供了丰富的有用信息，有相当大的提示性，为解题过程提供了广阔的天地.



p,q 两个命题中有一个命题是假命题,$p\wedge q$ 是假命题.

(2)当 p,q 两个命题中有一个命题是真命题时,$p\vee q$ 是真命题;当 p,q 两个命题都是假命题时,$p\vee q$ 是假命题.

(3)若 p 是真命题,则$\neg p$ 必是假命题;若 p 是假命题,则$\neg p$ 必是真命题.

特别提示

"$p\wedge q$"有假则假,"$p\vee q$"有真则真,"$\neg p$"真假相反.

3. 命题的否定与否命题的区别

(1)命题的否定"$\neg p$"是条件不变,否定结论得到的命题;否命题是对条件和结论同时否定得到的命题.

(2)"非"即否定的意思. 常见词语的否定如下:

原词	是	都是	完全	等于(=)	大于(>)	小于(<)	至少有一个	至多有一个	至多有 n 个
否定	不是	不都是	不完全	不等于(≠)	不大于(≤)	不小于(≥)	一个都没有	至少有两个	至少有(n+1)个

特别提示

(1)"p 且 q"的否定为"$\neg p$ 或$\neg q$",用符号语言表示为$\neg(p\wedge q)=(\neg p)\vee(\neg q)$.

(2)"p 或 q"的否定为"$\neg p$ 且$\neg q$",用符号语言表示为$\neg(p\vee q)=(\neg p)\wedge(\neg q)$.

模板演练

➡ 答案详见 P438

1. (湖北高考)在一次跳伞训练中,甲、乙两位学员各跳一次.设命题 p 是"甲降落在指定范围",q 是"乙降落在指定范围",则命题"至少有一位学员没有降落在指定范围"可表示为(　　).

A. $(\neg p)\vee(\neg q)$　　B. $p\vee(\neg q)$

C. $(\neg p)\wedge(\neg q)$　　D. $p\vee q$

2. 已知命题 p:所有的有理数都是实数;命题 q:正数的对数都是负数,则下列命题中为真命题的是(　　).

A. $(\neg p)\vee q$　　B. $p\wedge q$

C. $(\neg p)\vee(\neg q)$　　D. $(\neg p)\wedge(\neg q)$

3. 如果命题"p 且 q"是假命题,"$\neg q$"也是假命题,则(　　).

A. 命题"$\neg p$ 或 q"是假命题

B. 命题"p 或 q"是假命题

C. 命题"$\neg p$ 且 q"是真命题

D. 命题"p 且$\neg q$"是真命题

4. 已知命题 p:$\exists x\in\mathbf{R}$,使 $\sin x=\frac{\sqrt{5}}{2}$;命题 q:$\forall x\in\mathbf{R}$,都有 $x^2+x+1>0$. 给出下列结论:①命题"$p\wedge q$"是真命题;②命题"$p\wedge(\neg q)$是假命题;"③命题"$(\neg p)\vee q$"是真命题;④命题"$(\neg p)\vee(\neg q)$"是假命题. 其中正确的是(　　).

A. ②④　　B. ②③　　C. ③④　　D. ①②③

5. 已知命题 p:$\exists x\in\mathbf{R}$,$x^2+1<2x$;命题 q:若 $mx^2-mx-1<0$ 恒成立,则$-4<m<0$,那么(　　).

A. "$\neg p$"是假命题　　B. q 是真命题

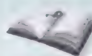
C. "p 或 q"为假命题　　D. "p 且 q"为真命题

6. 已知命题 p:若 $a>1$,则 $a^x>\log_a x$ 恒成立;命题 q:在等差数列$\{a_n\}$中,$m+n=p+q$ 是 $a_n+a_m=a_p+a_q$ 的充分不必要条件($m,n,p,q\in\mathbf{N}^*$). 则下面选项中真命题是(　　).

A. $(\neg p)\wedge(\neg q)$　　B. $(\neg p)\vee(\neg q)$

C. $p\vee(\neg q)$　　D. $p\wedge q$

怎样解题(一)　学数学就要做题,做数学题时针对不同层次的学生可提出三种不同的要求. 对于基础比较好的同学,应该是先做后看. 先做题,做完后再看同学怎么做的,老师怎么讲的,再看参考书上怎么讲的. 然后去比较还有没有别的方法,更好的方法,有比较有鉴别才有收获,懂得哪种方法好在什么地方,掌握这一点,就能解决很多问题.



模板 4　求含有一个量词的命题的否定 [5年14考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(重庆高考)命题"对任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $x^2\geq0$"的否定为(　　). A. 对任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $x^2<0$　B. 不存在 $x\in\mathbf{R}$,使得 $x^2<0$ C. 存在 $x_0\in\mathbf{R}$,使得 $x_0^2\geq0$　D. 存在 $x_0\in\mathbf{R}$,使得 $x_0^2<0$	本模板解决的是"求含有一个量词的全称命题或特称命题的否定"的问题.
解析:全称命题的否定是特称命题. "对任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $x^2\geq0$"的否定为"存在 $x_0\in\mathbf{R}$,使得 $x_0^2<0$",故选 D. **答案**:D	第一步　命题是全称命题,其否定是特称命题. 第二步　找出全称量词"任意"及结论"$x^2\geq0$". 第三步　写出"任意"的否定是"存在","$x^2\geq0$"的否定是"$x_0^2<0$",即得原命题的否定.

模板攻略

1. 模板解决思路

(1)全称命题和特称命题的否定中,"$\forall$ 与 $\exists$","$\geq$ 与 $<$","是"与"不是","都是"与"不都是","有"与"无","$\in$ 与 $\notin$","至少 n 个"与"至多 $n-1$ 个"等要进行互换.

(2)对于省略了量词的命题,应先挖掘命题中隐含的量词,改写含量词的完整形式,再写出命题的否定,可以结合它们的真假性(一真一假)进行验证.

2. 模板解决步骤

1 第一步　明确这个命题是全称命题还是特称命题.

2 第二步　找出命题中量词的位置及相应结论.

3 第三步　把命题中的全称量词改为存在量词或存在量词改为全称量词,同时否定结论,即得命题的否定.

3. 典型例题

典例1　(四川高考)设 $x\in\mathbf{Z}$,集合 A 是奇数集,集合 B 是偶数集. 若命题 $p:\forall x\in A,2x\in B$,则(　　).

A. $\neg p:\exists x\in A,2x\in B$　　B. $\neg p:\exists x\notin A,2x\in B$

C. $\neg p:\exists x\in A,2x\notin B$　　D. $\neg p:\forall x\notin A,2x\notin B$

解析:因为全称命题的否定是特称命题,　1

所以命题 $p:\forall x\in A,2x\in B$ 的否定为 $\neg p:\exists x\in A,2x\notin B$. 故选 C.　2~3

答案:C

典例 2　(安徽高考)命题"存在实数 x,使 $x>1$"的否定是(　　).

A. 对任意实数 x,都有 $x>1$

B. 不存在实数 x,使 $x\leq1$

C. 对任意实数 x,都有 $x\leq1$

D. 存在实数 x,使 $x\leq1$

解析:特称命题的否定是全称命题.　1

命题"存在实数 x,使 $x>1$",其否定为"对任意实数 x,都有 $x\leq1$",故选 C.　2~3

答案:C

凯尔微博



怎样解题(二)　对于学习能力、基础知识稍差一些的同学,可以边做边看,做了一部分,做不下去,可以请教一下别人,可以翻翻书,找找资料,受受启发再做. 基础比较差的学生,先看后做,可以先问问别人,或是找老师帮你点一点可以怎么考虑,再自己动手做,这样就能使不同层次的学生,在不同的程度上得到提高.

知识要点

1. 全称量词与全称命题

(1)短语"所有的""任意一个"在逻辑中通常叫作全称量词,并用符号"∀"表示.含有全称量词的命题,叫作全称命题.

(2)通常,将含有变量 x 的语句用 $p(x)$,$q(x)$,$r(x)$,…表示,变量 x 的取值范围用 M 表示,那么,全称命题"对 M 中任意一个 x,有 $p(x)$成立"可用符号简记为 $\forall x\in M,p(x)$,读作"对任意 x 属于 M,有 $p(x)$成立".

特别提示

常见的全称量词还有"一切""每一个""任给"等.

2. 存在量词与特称命题

(1)短语"存在一个""至少有一个"在逻辑中通常叫作存在量词,并用符号"∃"表示.含有存在量词的命题,叫作特称命题.

(2)特称命题"存在 M 中的元素 x_0,使 $p(x_0)$成立"可用符号简记为 $\exists x_0\in M,p(x_0)$,读作"存在 M 中的元素 x_0,使 $p(x_0)$成立".

特别提示

常见的存在量词还有"有些""有一个""对某个""有的"等.

3. 含有一个量词的命题的否定

(1)对于含有一个量词的全称命题的否定

全称命题 $p:\forall x\in M,p(x)$;

它的否定 $\neg p:\exists x_0\in M,\neg p(x_0)$.

全称命题的否定是特称命题.

(2)对于含有一个量词的特称命题的否定

特称命题 $p:\exists x_0\in M,p(x_0)$;

它的否定 $\neg p:\forall x\in M,\neg p(x)$.

特称命题的否定是全称命题.

模板演练

➡ 答案详见 P438

1. (湖北高考)命题"$\exists x_0\in \complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q},x_0^3\in\mathbf{Q}$"的否定是(　　).

A. $\exists x_0\notin \complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q},x_0^3\in\mathbf{Q}$　　B. $\exists x_0\in \complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q},x_0^3\notin\mathbf{Q}$

C. $\forall x\notin \complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q},x^3\in\mathbf{Q}$　　D. $\forall x\in \complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q},x^3\notin\mathbf{Q}$

2. (辽宁高考)已知命题 $p:\forall x_1,x_2\in\mathbf{R},[f(x_2)-f(x_1)](x_2-x_1)\geqslant 0$,则 $\neg p$ 是(　　).

A. $\exists x_1,x_2\in\mathbf{R},[f(x_2)-f(x_1)](x_2-x_1)\leqslant 0$

B. $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R},[f(x_2)-f(x_1)](x_2-x_1)\leqslant 0$

C. $\exists x_1,x_2\in\mathbf{R},[f(x_2)-f(x_1)](x_2-x_1)<0$

D. $\forall x_1,x_2\in\mathbf{R},[f(x_2)-f(x_1)](x_2-x_1)<0$

3. (湖北高考)命题"存在一个无理数,它的平方是有理数"的否定是(　　).

A. 任意一个有理数,它的平方是有理数

B. 任意一个无理数,它的平方不是有理数

C. 存在一个有理数,它的平方是有理数

D. 存在一个无理数,它的平方不是有理数

4. (安徽高考)命题"所有能被 2 整除的整数都是偶数"的否定是(　　).

A. 所有不能被 2 整除的整数都是偶数

B. 所有能被 2 整除的整数都不是偶数

C. 存在一个不能被 2 整除的整数是偶数

D. 存在一个能被 2 整除的整数不是偶数

5. (辽宁高考)已知命题 $p:\exists n\in\mathbf{N},2^n>1\,000$,则 $\neg p$ 为(　　).

A. $\forall n\in\mathbf{N},2^n\leqslant 1\,000$　　B. $\forall n\in\mathbf{N},2^n>1\,000$

C. $\exists n\in\mathbf{N},2^n\leqslant 1\,000$　　D. $\exists n\in\mathbf{N},2^n<1\,000$

怎样解题(三) 具体做题时有三个步骤:想一想,做一做,看一看.看到题目后,想它涉及到哪些基础知识,哪些基本方法,想它考你什么?拿到题就动手的做题习惯不好,很盲目,时间浪费了,还做不出来,想好了再动手,不管能不能做完能不能做对,都得要做.

凯尔微博



第二章 圆锥曲线与方程

模板1 求轨迹方程 【5年12考】

模板探究

母题呈现	模板引入
设圆 $C:(x-1)^2+y^2=1$，过原点 O 作圆的任意弦，求所作弦的中点的轨迹方程.	本模板解决的是"已知某动点满足已知条件 p，求该动点的轨迹方程"的问题.
解：根据题意画出图形. 设 OQ 为过 O 点的任意一条弦，$P(x,y)$ 为其中点，则 $CP\perp OQ$.因为 OC 中点为 $M\left(\frac{1}{2},0\right)$，故 $\lvert MP\rvert=\frac{1}{2}\lvert OC\rvert=\frac{1}{2}$，得所求弦的中点轨迹方程为 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}(0<x\leqslant 1)$.	第一步　设出 P 点坐标 (x,y). 第二步　确定与 P 相关的方程 $\lvert MP\rvert=\frac{1}{2}\lvert OC\rvert=\frac{1}{2}$. 第三步　化简方程，得轨迹方程，并注明自变量的取值范围.

模板攻略

1. 模板解决思路

求曲线方程的几种常用方法：

(1)直接法：如果动点运动的条件就是一些几何量的等量关系，这些条件简单明确，直接表述成含 x,y 的等式，就得到轨迹方程，这种方法称为直接法.

(2)定义法：如果能够确定动点的轨迹满足某种已知曲线的定义，则可用曲线定义写出方程，这种方法称为定义法.

(3)代入法：又称相关点法，其特点是动点 $M(x,y)$ 的坐标取决于已知曲线 C 上的点 (x',y') 的坐标，可先用 x,y 来表示 x',y'，再代入曲线 C 的方程，即得点 M 的轨迹方程.

(4)参数法：选取适当的参数，分别用参数表示动点坐标 x,y，得出轨迹的参数方程，消去参数，即得其普通方程.

2. 模板解决步骤

1 第一步　建立适当的坐标系，用有序实数对 (x,y) 表示曲线上任意一点 M 的坐标.

2 第二步　根据已知条件 p，建立与动点 $M(x,y)$ 的坐标有关的方程，如 $f(x,y)=0$.

3 第三步　化方程(如 $f(x,y)$)为最简形式，即得所要求的轨迹方程. 并注明自变量的取值范围.

3. 典型例题

典例1　(四川高考)如图，动点 M 与两定点 $A(-1,0)$，$B(2,0)$ 构成 $\triangle MAB$，且 $\angle MBA=2\angle MAB$. 设动点 M

怎样解题(四)　回头看一看，还有没有更好的方法，书上怎么讲的，老师怎么做的，回想联想再猜想，这样一比较，就能领悟到很多东西. 数学题靠做，但是在做题的过程中，还要学会总结分析，并建立错题集，时常翻阅，这样我们的解题能力才会得到提高.



的轨迹为 C.

(1)求轨迹 C 的方程;

(2)设直线 $y=-2x+m$ 与 y 轴相交于点 P,与轨迹 C 相交于点 Q,R,且 $|PQ|<|PR|$,求 $\left|\frac{PR}{PQ}\right|$ 的取值范围.

解:(1)设 M 的坐标为(x,y),显然有 $x>0$,且 $y\neq0$. ①

当 $\angle MBA=90°$ 时,点 M 的坐标为$(2,\pm3)$.

当 $\angle MBA\neq90°$ 时,$x\neq2$,由 $\angle MBA=2\angle MAB$,

$\tan\angle MBA=\frac{2\tan\angle MAB}{1-\tan^2\angle MAB}$,即 $-\frac{|y|}{x-2}=\frac{2\frac{|y|}{x+1}}{1-\left(\frac{|y|}{x+1}\right)^2}$, ②

化简可得 $3x^2-y^2-3=0$.

而点$(2,\pm3)$在曲线 $3x^2-y^2-3=0$ 上,

综上可知,轨迹 C 的方程为 $3x^2-y^2-3=0(x>1)$. ③

(2)由 $\begin{cases}y=-2x+m,\\3x^2-y^2-3=0\end{cases}$ 消去 y,可得

$x^2-4mx+m^2+3=0$. (*)

由题意,方程(*)有两根且均在$(1,+\infty)$内.

设 $f(x)=x^2-4mx+m^2+3$,所以 $\begin{cases}-\frac{-4m}{2}>1,\\f(1)=1^2-4m+m^2+3>0,\\\Delta=(-4m)^2-4(m^2+3)>0.\end{cases}$

解得 $m>1$,且 $m\neq2$.

设 Q,R 的坐标分别为$(x_Q,y_Q),(x_R,y_R)$,

由 $|PQ|<|PR|$ 有

$x_R=2m+\sqrt{3(m^2-1)}$,$x_Q=2m-\sqrt{3(m^2-1)}$.

所以 $\left|\frac{PR}{PQ}\right|=\frac{x_R}{x_Q}=\frac{2m+\sqrt{3(m^2-1)}}{2m-\sqrt{3(m^2-1)}}$

$=\frac{2+\sqrt{3\left(1-\frac{1}{m^2}\right)}}{2-\sqrt{3\left(1-\frac{1}{m^2}\right)}}=-1+\frac{4}{2-\sqrt{3\left(1-\frac{1}{m^2}\right)}}$,

由$m>1$,且$m\neq2$,有

$1<-1+\frac{4}{2-\sqrt{3\left(1-\frac{1}{m^2}\right)}}<7+4\sqrt{3}$,

且 $-1+\frac{4}{2-\sqrt{3\left(1-\frac{1}{m^2}\right)}}\neq7$.

所以 $\left|\frac{PR}{PQ}\right|$ 的取值范围是$(1,7)\cup(7,7+4\sqrt{3})$.

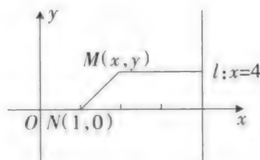
典例 2 (陕西高考)已知动点 $M(x,y)$ 到直线 $l:x=4$ 的距离是它到点 $N(1,0)$ 的距离的 2 倍.

(1)求动点 M 的轨迹 C 的方程;

(2)过点 $P(0,3)$ 的直线 m 与轨迹 C 交于 A,B 两点,若 A 是 PB 的中点,求直线 m 的斜率.

解:(1)设 M 到直线 l 的距离为 d,

根据题意,$d=2|MN|$.

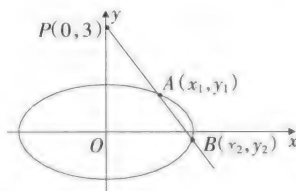


由此得 $|4-x|=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$, ①~②

化简得 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,

所以动点 M 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ③

(2)由题意,设直线 m 的方程为 $y=kx+3$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$.



$\because A$ 是 PB 的中点,

$\therefore x_1=\frac{x_2}{2}$,$y_1=\frac{3+y_2}{2}$.

又 $\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$,$\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1$,

联立上述 4 个等式解得 $\begin{cases}x_2=2,\\y_2=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_2=-2,\\y_2=0,\end{cases}$

即点 B 的坐标为$(2,0)$或$(-2,0)$,

所以直线 m 的斜率为 $-\frac{3}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$.

选修 2-1

学好数学第一步:预习　预习是学生自己摸索、自己动手动脑、自己阅读课文的过程,可以培养学生的阅读和自学能力、自我运用能力.课前要布置预习提纲,自己在课本上把关键句、重点词、概念、公式、定理划出来,养成边读边划边算的习惯.所要达到的要求:课本上的例题课前会做.



知识要点

1. 曲线方程的定义

在直角坐标系中，如果曲线 C(看作适合某条件的点的集合或适合某种条件的点的轨迹)上的点与一个二元方程 $f(x,y)=0$ 的实数解建立了如下的关系：

(1)曲线上的点的坐标都是这个方程的解；

(2)以这个方程的解为坐标的点都是曲线上的点.

那么这个方程叫作曲线的方程，这条曲线叫作方程的曲线.

2. 常见的轨迹

(1)在平面内，到两定点距离相等的点的轨迹是连接两定点的线段的垂直平分线.

(2)平面内到角两边距离相等的点的轨迹是这个角的平分线所在直线.

(3)平面内到定点的距离等于定长的点的轨迹是以定点为圆心，以定长为半径的圆.

(4)平面内到定直线的距离等于某一定值的点的轨迹是与这条直线平行的两条直线.

(5)平面内到两定点 F_1,F_2 距离之和为定值 $2a$ $(2a>|F_1F_2|)$ 的点的轨迹是以两定点为焦点，$2a$ 为长轴长的椭圆.

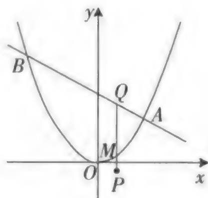
(6)平面内到两定点 F_1,F_2 距离差的绝对值为定值 $2a(0<2a<|F_1F_2|)$的点的轨迹是以两定点为焦点，实轴长为 $2a$ 的双曲线.

(7)平面内到定点和定直线距离相等(定点不在定直线上)的点的轨迹是以定点为焦点，定直线为准线的抛物线.

模板演练

➡ 答案详见 P438

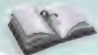
1. (安徽高考)如图，设 $\lambda>0$，点 A 的坐标为(1,1)，点 B 在抛物线 $y=x^2$ 上运动，点 Q 满足$\overrightarrow{BQ}=\lambda\overrightarrow{QA}$，经过点 Q 与 x 轴垂直的直线交抛物线于点 M，点 P 满足$\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{MP}$，求点 P 的轨迹方程.



2. (北京高考)在平面直角坐标系 xOy 中，点 B与点 $A(-1,1)$关于原点 O 对称，P 是动点，且直线 AP 与BP 的斜率之积等于$-\frac{1}{3}$.

(1)求动点 P 的轨迹方程；

(2)设直线 AP 和 BP 分别与直线 $x=3$ 交于点 M,N，问：是否存在点 P 使得$\triangle PAB$ 与$\triangle PMN$ 的面积相等？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，说明理由.



学好数学第二步：听课 听课要做到“一专三动”，即专心听老师对重点难点的剖析，听解法及思路分析、技巧等，在听课过程中对预习中的例题有不明之处提出疑问；其次在听课时还要勤思考，积极发言，敢于发表自己的见解. 认真做好堂上练习，认真听老师讲评及课后小结，积极动脑、动手、动口参与教学活动.

模板 2　求椭圆的标准方程【5年40考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(广东高考)已知中心在原点的椭圆 C 的右焦点为 $F(1,0)$,离心率等于 $\frac{1}{2}$,则 C 的方程是(　　). A. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$　B. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{\sqrt{3}}=1$ C. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$　D. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$	本模板解决的是"已知椭圆满足条件 p,用待定系数法求椭圆的标准方程"的问题.
解析:由右焦点为 $F(1,0)$,知焦点在 x 轴上. 设 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$. 由右焦点为 $F(1,0)$,可知 $c=1$,因为离心率等于 $\frac{1}{2}$,即 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,故 $a=2$,由 $a^2=b^2+c^2$ 知 $b^2=3$,故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. 故选 D. **答案**:D	第一步　由焦点坐标 $F(1,0)$ 知焦点位置. 第二步　设出椭圆的标准方程. 第三步　根据已知条件求待定系数 a,b. 第四步　写出椭圆的标准方程.

模板攻略

1. 模板解决思路

(1)在 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 和 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ 两个方程中都有 $a>b>0$ 的条件,要分清焦点的位置,只需要看 x^2 和 y^2 的分母的大小. 例如,方程 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1(m>0,n>0,m\neq n)$,当 $m>n$ 时表示焦点在 x 轴上的椭圆;当 $m<n$ 时表示焦点在 y 轴上的椭圆.

(2)如果椭圆焦点位置不能确定,可设方程 $Ax^2+By^2=1(A,B>0,A\neq B)$ 或 $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1(m^2\neq n^2)$.

2. 模板解决步骤

1 第一步　作判断:根据条件判断椭圆的焦点在 x 轴上,还是在 y 轴上,还是两个坐标轴都有可能.

2 第二步　设方程:根据上述判断设方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 或 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$,或设出含其他待定系数的方程.

3 第三步　找关系:根据已知条件,建立方程(组),求出待定系数.

4 第四步　得方程:解方程组,将解代入所设方程.

3. 典型例题

典例 1　(新课标全国高考)在平面直角坐标系 xOy 中,椭圆 C 的中心为原点,焦点 F_1,F_2 在 x 轴上,离

学好数学第三步:记笔记　这里主要指的是课堂笔记,因为每节课的时间有限,所以老师讲的东西一般都是精华部分,因此很有必要把它们记录下来,一来可以加深我们的理解,好记性不如烂笔头,二来可以方便我们以后复习查看. 如果对课堂讲述的知识不理解的同学更应该做笔记,以便课下细细琢磨,直到理解为止.



心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$. 过F_1的直线l交C于A,B两点，且$\triangle ABF_2$的周长为16，那么C的方程为________.

解析：设椭圆方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$. ①~②

由椭圆定义知，$\triangle ABF_2$的周长$=|AF_1|+|AF_2|+|BF_1|+|BF_2|=16=4a$，$\therefore a=4$. 由$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，得$c=2\sqrt{2}$，则$b^2=a^2-c^2=8$. ③

故所求C的方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$. ④

答案：$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$

典例2 (陕西高考节选)已知椭圆C_1：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，椭圆C_2以C_1的长轴为短轴，且与C_1有相同的离心率. 求椭圆C_2的方程.

解：由已知可设椭圆C_2的方程为$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{4}=1(a>2)$， ①~②

其离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，故$\frac{\sqrt{a^2-4}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得$a=4$， ③

故椭圆C_2的方程为$\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1$. ④

知识要点

1. 椭圆的定义

平面内与两个定点F_1,F_2的距离的和等于常数(大于$|F_1F_2|$)的点的轨迹叫作椭圆. 这两个定点叫作椭圆的焦点，两焦点间的距离叫作椭圆的焦距.

特别提示

将定义中的常数记为$2a$，则

(1)当$2a>|F_1F_2|$时，点的轨迹是椭圆.

(2)当$2a=|F_1F_2|$时，点的轨迹是线段F_1F_2.

(3)当$2a<|F_1F_2|$时，点的轨迹不存在.

2. 椭圆的标准方程

(1)$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，它表示焦点在$x$轴上，焦点分别是$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$的椭圆，这里$a^2=b^2+c^2$.

(2)$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，它表示焦点在$y$轴上，焦点分别是$F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$的椭圆，这里$a^2=b^2+c^2$.

特别提示

椭圆的标准方程中有$a>b>0$，且$c^2=a^2-b^2$.

模板演练

➜ 答案详见 P439

1. (广东高考)已知椭圆G的中心在坐标原点，长轴在x轴上，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，且G上一点到G的两个焦点的距离之和为12，则椭圆G的方程为________.

2. (江西高考)若椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的焦点在$x$轴上，过点$\left(1,\frac{1}{2}\right)$作圆$x^2+y^2=1$的切线，切点分别为$A,B$，直线$AB$恰好经过椭圆的右焦点和上顶点，则椭圆方程是________.

3. (湖南高考节选)在直角坐标系xOy中，已知中心在原点，离心率为$\frac{1}{2}$的椭圆E的一个焦点为圆C：$x^2+y^2-4x+2=0$的圆心. 求椭圆E的方程.

凯尔微博



学好数学第四步：复习 课后复习同预习一样，是个老生常谈的话题，但也是行之有效的方法，课堂的几十分钟不足以使我们学习和消化所学知识，需要我们在课下进行大量的练习与巩固，才能真正掌握所学知识.

4. (福建高考节选)已知中心在坐标原点 O 的椭圆 C 经过点 $A(2,3)$,且点 $F(2,0)$ 为其右焦点. 求椭圆 C 的方程.

模板 3　求椭圆的离心率 【5年30考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(福建高考)椭圆 Γ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2,焦距为 $2c$. 若直线 $y=\sqrt{3}(x+c)$与椭圆 Γ 的一个交点 M 满足 $\angle MF_1F_2=2\angle MF_2F_1$,则该椭圆的离心率等于 ______.	本模板解决的是"已知椭圆满足条件 p,结合 $c^2=a^2-b^2$,求椭圆的离心率"的问题.
解析: 因为直线 $y=\sqrt{3}(x+c)$过椭圆左焦点,且斜率为 $\sqrt{3}$,所以 $\angle MF_1F_2=60°$, $\angle MF_2F_1=30°$, $\angle F_1MF_2=90°$, 故 $\|MF_1\|=c$, $\|MF_2\|=\sqrt{3}c$, 由点 M 在椭圆上知, $c+\sqrt{3}c=2a$. 故离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1$. **答案:** $\sqrt{3}-1$	第一步　根据已知条件得出 $\|MF_1\|=c$, $\|MF_2\|=\sqrt{3}c$. 第二步　根据点 M 在椭圆上得出 $\|MF_1\|+\|MF_2\|=2a$. 第三步　求出 $\frac{c}{a}$ 的值,即得离心率.

模板攻略

1. 模板解决思路

(1)离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\Rightarrow\frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}$. 也就是说,给出离心率实质是给出了 a 与 b 的比值.

(2)若点 P 是椭圆上一点, F_1,F_2 是椭圆的两个焦点,由于 $e=\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}$,而 $2c=|F_1F_2|$, $2a=|PF_1|+|PF_2|$,因此可以把其转化到 $\triangle PF_1F_2$ 中,利用解三角形的知识来解决离心率问题.

2. 模板解决步骤

1 第一步　根据已知条件,得到关于 a,b,c 的关系式或方程(组).

2 第二步　直接求出 a,c 的值;也可根据 $b^2=a^2-c^2$,消去 b 得到关于 a,c 的方程,并化简.

3 第三步　求出 $\frac{c}{a}$ 的值,即得离心率 e.

学好数学第五步:错题　在平时的课堂作业中,自己做题时难免出现这样那样的错误,自己准备好一本笔记本,把作业本上的错题改正在笔记本上,并要求分析做错的原因,解决的策略及从错题中得到的收获都记录下来,整理成一本错题集.



3. 典型例题

典例 1 (四川高考)从椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上一点$P$向$x$轴作垂线,垂足恰为左焦点$F_1$,$A$是椭圆与$x$轴正半轴的交点,$B$是椭圆与$y$轴正半轴的交点,且$AB/\!/OP$($O$是坐标原点),则该椭圆的离心率是(　　).

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析:左焦点为$F_1(-c,0)$,$PF_1\perp x$轴,

当$x=-c$时,$\frac{c^2}{a^2}+\frac{y_P^2}{b^2}=1\Rightarrow y_P^2=b^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)=\frac{b^4}{a^2}\Rightarrow y_P=\frac{b^2}{a}$(负值不合题意,已舍去),点$P\left(-c,\frac{b^2}{a}\right)$,

由斜率公式得$k_{AB}=-\frac{b}{a}$,$k_{OP}=-\frac{b^2}{ac}$.

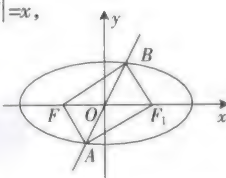
$\because AB/\!/OP$,$\therefore k_{AB}=k_{OP}\Rightarrow-\frac{b}{a}=-\frac{b^2}{ac}\Rightarrow b=c$.　①

$\because a^2=b^2+c^2=2c^2$,　②

$\therefore\frac{c^2}{a^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 C.　③

答案:C

典例 2 (辽宁高考)已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F$,$C$与过原点的直线相交于$A$,$B$两点,连接$AF$,$BF$. 若$|AB|=10$,$|AF|=6$,$\cos\angle ABF=\frac{4}{5}$,则$C$的离心率$e=$______.



解析:如图,设右焦点F_1,$|BF|=x$,

则$\cos\angle ABF=\frac{x^2+10^2-6^2}{20x}=\frac{4}{5}$,解得$x=8$,故$\angle AFB=90°$.

由椭圆及直线关于原点对称可知$|AF_1|=8$,且$\angle FAF_1=90°$,$\triangle FAF_1$是直角三角形,所以$|FF_1|=10$,

故$2a=|AF_1|+|AF|=8+6=14$,$2c=10$,　①~②

$e=\frac{c}{a}=\frac{5}{7}$.　③

答案:$\frac{5}{7}$

知识要点

1. 椭圆的简单几何性质

标准方程	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$
简图	y, B2, A1, F1, O, F2, A2, x, B1	A2, y, F2, B2, B1, O, x, F1, A1
中心	(0,0)	
顶点	$(\pm a,0),(0,\pm b)$	$(0,\pm a),(\pm b,0)$
焦点	$(\pm c,0)$	$(0,\pm c)$
对称性	关于x轴、y轴、原点对称	
范围	$-a\leqslant x\leqslant a,-b\leqslant y\leqslant b$	$-b\leqslant x\leqslant b,-a\leqslant y\leqslant a$
离心率	$e=\frac{c}{a}\ (0<e<1$,其中$c^2=a^2-b^2)$	
长轴、短轴	线段A_1A_2,B_1B_2分别叫作椭圆的长轴和短轴,它们的长分别等于$2a$和$2b$,a和b分别叫作椭圆的长半轴长和短半轴长	

特别提示

(1)离心率e的取值范围:$0<e<1$. e越接近1,则c越接近a,从而$b=\sqrt{a^2-c^2}$越小,因此椭圆越扁;反之,e越接近0,c越接近于0,从而b越接近于a,这时椭圆接近于圆. 当且仅当$a=b$时,$c=0$,这时两个焦点重合,图形变为圆,它的方程为$x^2+y^2=a^2$.

(2)椭圆的焦点永远在长轴上.

2. 椭圆的几个结论

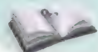
(1)椭圆的通径

过椭圆的焦点且垂直于长轴的弦叫作椭圆的通径,通径长为$\frac{2b^2}{a}$.

(2)两个最值

①椭圆上到中心距离最小的点是短轴的两个端点,到中心距离最大的点是长轴的两个端点.

②椭圆上到焦点距离最大和最小的点是长轴



学好数学第六步:总结 在进行单元小结或学期总结复习时,自己对所学过的每个知识点、每章节的内容加以综合归纳,注意知识的新旧联系、知识的前后联系、知识的横向联系,写出简明小结,使知识系统化、条理化、专题化. 有选择性地解一些各种类型和档次的习题,使学生掌握各类题的解题规律和方法,巩固所学内容. 特别提醒学生对错题集的整理.

的两个端点.

(3)焦点三角形

以椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上一点$P(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$和焦点$F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$为顶点的$\triangle PF_1F_2$称为焦点三角形,若$\angle F_1PF_2=\theta$,则

①$|PF_1|+|PF_2|=2a$;

②$4c^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\theta$;

③$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\theta=b^2\tan\frac{\theta}{2}$.

模板演练

➡ 答案详见 P439

1.(新课标全国高考)椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1$的离心率为(　　).

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2.(浙江高考)已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为$F$,右顶点为$A$,点$B$在椭圆上,且$BF\perp x$轴,直线$AB$交$y$轴于点$P$.若$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$,则椭圆的离心率是(　　).

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{2}$

3.(新课标全国高考)设F_1,F_2是椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点,$P$为直线$x=\frac{3a}{2}$上一点,$\triangle F_2PF_1$是底角为30°的等腰三角形,则$E$的离心率为(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{4}{5}$

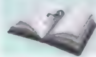
4.(江西高考)椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右顶点分别是$A,B$,左、右焦点分别是$F_1,F_2$.若$|AF_1|$,$|F_1F_2|$,$|F_1B|$成等比数列,则此椭圆的离心率为______.

模板4　求双曲线的标准方程【5年12考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(天津高考)已知抛物线$y^2=8x$的准线过双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一个焦点,且双曲线的离心率为2,则该双曲线的方程为______.	本模板解决的是"已知双曲线满足条件p,用待定系数法求双曲线的标准方程"的问题.
解析:由抛物线$y^2=8x$可知准线方程为$x=-2$, 所以双曲线的左焦点为$(-2,0)$,即$c=2$; 又因为离心率为2,所以$e=\frac{c}{a}=2$,故$a=1$, 由$a^2+b^2=c^2$知$b^2=3$,所以该双曲线的方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$. **答案:**$x^2-\frac{y^2}{3}=1$	第一步　由已知易知双曲线的标准方程的形式. 第二步　由抛物线的准线$x=-2$过双曲线的焦点求出c的值,再结合已知条件求出a,b的值. 第三步　代入a,b的值,写出双曲线的标准方程.

学好数学第七步:写考试总结　写考试总结是一个好习惯,考试总结可以帮我们找出学习之中不足之处,以及知识的薄弱环节,从而及时弥补不足,确定以后的学习方向.



模板攻略

1. 模板解决思路

待定系数法：先确定焦点是在 x 轴上还是在 y 轴上，设出标准方程，再由条件确定 a^2,b^2 的值，即"先定型，再定量"；如果焦点位置不好确定，可将双曲线方程设为 $\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=\lambda(\lambda\neq0)$，再根据条件求 m^2,n^2 及 λ 的值.

2. 模板解决步骤

1 第一步　作判断：根据条件判断双曲线的焦点在 x 轴上，还是在 y 轴上，还是两个坐标轴都有可能.

2 第二步　设方程：根据上述判断设方程 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 或 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，或设出含其他待定系数的方程.

3 第三步　找关系：根据已知条件，建立方程(组)，求出待定系数.

4 第四步　得方程：解方程(组)，将解代入所设方程.

3. 典型例题

典例 1　(广东高考)已知中心在原点的双曲线 C 的右焦点为 $F(3,0)$，离心率等于 $\frac{3}{2}$，则 C 的方程是(　　).

A. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{\sqrt{5}}=1$　　B. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

C. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{5}=1$　　D. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{\sqrt{5}}=1$

解析：由题意设 C 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$.　　1～2

由右焦点为 $F(3,0)$ 可知 $c=3$，又因为离心率等于 $\frac{3}{2}$，所以 $\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$，所以 $a=2$. 由 $c^2=a^2+b^2$ 知 $b^2=5$，　　3

故双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$. 故选 B.　　4

答案：B

典例 2　(湖南高考)已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的焦距为 10，点 $P(2,1)$ 在 C 的渐近线上，则 C 的方程为(　　).

A. $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$　　B. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$

C. $\frac{x^2}{80}-\frac{y^2}{20}=1$　　D. $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{80}=1$

解析：∵ 双曲线 C 的渐近线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ 且点 $P(2,1)$ 在渐近线上，∴ $\frac{4}{a^2}-\frac{1}{b^2}=0$，即 $a^2=4b^2$，

又 $a^2+b^2=c^2=25$，∴ $5b^2=25$，$b^2=5$，∴ $a^2=20$，　　1～3

即双曲线方程为 $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$. 故选 A.　　4

答案：A

知识要点

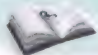
1. 双曲线的定义

平面内与两个定点 F_1,F_2 的距离的差的绝对值等于常数(小于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹叫作双曲线. 这两个定点叫作双曲线的焦点，两焦点间的距离叫作双曲线的焦距.

2. 双曲线的标准方程

(1) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，它表示焦点在 x 轴上，焦点分别是 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$ 的双曲线，这里 $c^2=a^2+b^2$.

(2) $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，它表示焦点在 y 轴上，焦点分别是 $F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$ 的双曲线，这里 $c^2=a^2+b^2$.



模板演练

➡ 答案详见 P440

1. (山东高考)已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两条渐近线均和圆 $C:x^2+y^2-6x+5=0$ 相切,且双曲线的右焦点为圆 C 的圆心,则该双曲线的方程为(　　).

A. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$　　B. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

C. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$　　D. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$

2. (新课标全国高考)已知双曲线 E 的中心为原点,$F(3,0)$是 E 的焦点,过 F 的直线 l 与 E 相交于 A,B 两点,且 AB 的中点为 $N(-12,-15)$,则 E 的方程为(　　).

A. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$　　B. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

C. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$　　D. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$

3. (山东高考)已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$和椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$有相同的焦点,且双曲线的离心率是椭圆离心率的两倍,则双曲线的方程为________.

4. (重庆高考节选)已知以原点O为中心,$F(\sqrt{5},0)$为右焦点的双曲线 C 的离心率 $e=\frac{\sqrt{5}}{2}$. 求双曲线 C 的标准方程及其渐近线方程.

模板 5　求双曲线的离心率或渐近线方程 【5年42考】

模板探究

母 题 呈 现	模 板 引 入
(湖南高考)设F_1,F_2是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两个焦点. 若在$C$上存在一点$P$,使$PF_1\perp PF_2$,且$\angle PF_1F_2=30°$,则$C$的离心率为 ______.	本模板解决的是“已知双曲线满足条件 p,求双曲线的离心率或渐近线方程”的问题.
解析:因为$PF_1\perp PF_2$,$\angle PF_1F_2=30°$, 所以$\lvert PF_2\rvert=\frac{1}{2}\lvert F_1F_2\rvert=c$, $\lvert PF_1\rvert=\frac{\sqrt{3}}{2}\lvert F_1F_2\rvert=\sqrt{3}c$, 由双曲线的定义知,$\lvert PF_1\rvert-\lvert PF_2\rvert=2a$,即$\sqrt{3}c-c=2a$, 所以离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}+1$. **答案**:$\sqrt{3}+1$	第一步　在$\mathrm{Rt}\triangle PF_1F_2$中,易求$\lvert PF_1\rvert=\sqrt{3}c$,$\lvert PF_2\rvert=c$. 第二步　由双曲线的定义,列出 a,c 间的关系式. 第三步　利用 $e=\frac{c}{a}$,求出$\frac{c}{a}$,即得离心率.

最大面积　一位农夫请了工程师、物理学家和数学家来,想用最少的篱笆围出最大的面积. 工程师用篱笆围出一个圆,宣称这是最优设计. 物理学家将篱笆拉开成一条长长的直线,假设篱笆有无限长,认为围起半个地球总够大了. 数学家好好嘲笑了他们一番. 他用很少的篱笆把自己围起来,然后说:“我现在是在外面.”



模板攻略

1. 模板解决思路

求双曲线的离心率有如下两种情况:

(1)a,c 易求出,代入 $e=\frac{c}{a}$ 即可得离心率.

(2)a,c 不易单独求出,可依据已知条件建立 a,b,c 的关系式,再结合 $c^2=a^2+b^2$,整体求出 $\frac{c}{a}$ 的值,即得离心率 e. 此时要注意关于 a,c 的齐次方程的解法技巧.

2. 模板解决步骤

1 第一步 根据已知条件,得到关于 a,b,c 的关系式或方程(组).

2 第二步 直接求出 a,b,c 的值;也可根据 $a^2+b^2=c^2$,消去 b 或消去 c 得到 a,c 之间的关系式或a,b 之间的关系式.

3 第三步 根据 $e=\frac{c}{a}$ 求离心率或根据渐近线方程 $y=\pm\frac{b}{a}x(y=\pm\frac{a}{b}x)$求其渐近线方程.

3. 典型例题

典例 1 (北京高考)若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为$\sqrt{3}$,则其渐近线方程为(　　).

A. $y=\pm 2x$　B. $y=\pm\sqrt{2}x$　C. $y=\pm\frac{1}{2}x$　D. $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$

解析:由离心率为$\sqrt{3}$,可知$\frac{c}{a}=\sqrt{3}$. ①

又 $c^2=a^2+b^2$,$b=\sqrt{2}a$. ②

因此双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\sqrt{2}x$,故选 B. ③

答案:B

误区警示

双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$,而双曲线$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的渐近线方程为 $y=\pm\frac{a}{b}x$,两者切勿相混淆.

典例 2 (辽宁高考)已知点(2,3)在双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上,$C$ 的焦距为 4,则它的离心率为 ________.

解析:设 $A(2,3)$,由已知 $2c=4$,得 $c=2$,

则 $F_1(-2,0)$,$F_2(2,0)$.

于是$|AF_1|=5$,$|AF_2|=3$,

根据双曲线定义,得 $2a=|AF_1|-|AF_2|=2$,

从而 $a=1$,又 $c=2$, ①~②

所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{1}=2$. ③

答案:2

典例 3 (湖南高考)设F_1,F_2是双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的两个焦点,$P$是 C 上的一点. 若$|PF_1|+|PF_2|=6a$,且$\triangle PF_1F_2$ 的最小内角为 30°,则 C 的离心率为 ________.

解析:不妨设点P在双曲线C的右支上,由双曲线定义知$|PF_1|-|PF_2|=2a$,

又因为$|PF_1|+|PF_2|=6a$,

联立以上两式得$|PF_1|=4a$,$|PF_2|=2a$,

因为$c>a$,所以在$\triangle PF_1F_2$ 中,$\angle PF_1F_2$ 为最小内角,

因此$\angle PF_1F_2=30°$,

在$\triangle PF_1F_2$ 中,由余弦定理可知,$|PF_2|^2=|PF_1|^2+|F_1F_2|^2-2|PF_1|\cdot|F_1F_2|\cdot\cos 30°$,

即 $4a^2=16a^2+4c^2-8\sqrt{3}ac$. ①~②

所以 $c^2-2\sqrt{3}ac+3a^2=0$,两边同除以a^2,得

$e^2-2\sqrt{3}e+3=0$,解得 $e=\sqrt{3}$. ③

答案:$\sqrt{3}$

误区警示

双曲线中 a,b,c 的关系式是 $c^2=a^2+b^2$,c 最大,而椭圆中 a,b,c 的关系式是 $a^2=b^2+c^2$,a 最大,注意它们的不同.

凯尔微博



黑色的羊 物理学家、天文学家和数学家走在苏格兰高原上,碰巧看到一只黑色的羊. "啊!"天文学家说道,"原来苏格兰的羊是黑色的.""得了吧, 仅凭一次观察你可不能这么说." 物理学家道,"你只能说那只黑色的羊是在苏格兰发现的.""也不对,"数学家道,"由这次观察你只能说:在这一时刻,这只羊,从我们观察的角度看过去,有一侧表面上是黑色的."

知识要点

1. 双曲线的简单几何性质

标准方程	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1(a,b>0)$
简图	（图：y, B_2, A_1, A_2, F_1, O, F_2, x, B_1）	（图：y, F_2, B_1, A_2, B_2, A_1, O, x, F_1）
中心	(0,0)	
顶点	$(\pm a,0)$	$(0,\pm a)$
焦点	$(\pm c,0)$	$(0,\pm c)$
对称性	关于 x 轴、y 轴、原点对称	
范围	$\lvert x\rvert\geqslant a,\ y\in\mathbf{R}$	$\lvert y\rvert\geqslant a,\ x\in\mathbf{R}$
渐近线	$y=\pm\frac{b}{a}x$	$y=\pm\frac{a}{b}x$
离心率	$e=\frac{c}{a}$ $(e>1$,其中 $c^2=a^2+b^2)$	
实轴、虚轴	线段 A_1A_2 叫作双曲线的实轴,它的长等于 $2a$,a 叫作双曲线的实半轴长;线段 B_1B_2 叫作双曲线的虚轴,它的长等于 $2b$,b 叫作双曲线的虚半轴长	

特别提示

(1)离心率 e 的取值范围:$e>1$. 当 e 越接近于 1 时,双曲线开口越小;e 越接近于 $+\infty$ 时,双曲线开口越大.

(2)双曲线的焦点永远在实轴上.

(3)双曲线的渐近线方程可以看成是将标准方程中等号右侧的 1 换成 0 后得到的两个方程.双曲线与它的渐近线无限接近,但永不相交.两条渐近线的倾斜角互补,斜率互为相反数,且关于 x 轴、y 轴对称.

2. 共轭双曲线

以已知双曲线的实轴为虚轴,虚轴为实轴的双曲线叫作已知双曲线的共轭双曲线.若已知双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,则其共轭双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1(a>0,b>0)$,它们有如下性质:

(1)互为共轭的双曲线有相同的渐近线,相同的焦距(焦点不同);

(2)它们的四个焦点在同一个圆:$x^2+y^2=a^2+b^2$ 上;

(3)它们的两个离心率的倒数的平方和为 1.

3. 双曲线的几个结论

(1)双曲线的通径

过双曲线的焦点且与双曲线实轴垂直的直线被双曲线截得的线段,称为双曲线的通径. 通径长为 $\frac{2b^2}{a}$.

(2)焦点三角形

已知 F_1,F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两个焦点,P 为双曲线上一点(异于顶点),$\angle F_1PF_2=\theta$,则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为 $S_{\triangle F_1PF_2}=\frac{1}{2}\lvert PF_1\rvert\lvert PF_2\rvert\sin\theta=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}b^2=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$.

模板演练

➜ 答案详见 P440

1. (新课标全国高考)已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$,则 C 的渐近线方程为(　　).

A. $y=\pm\frac{1}{4}x$　　B. $y=\pm\frac{1}{3}x$

C. $y=\pm\frac{1}{2}x$　　D. $y=\pm x$

2. (福建高考)设圆锥曲线 $\varGamma$ 的两个焦点分别为 F_1,

处处不可导　有一位国外的学者(搞数学研究的)到我们学校访问,住在学校外宾招待所,他要走的时候,我问他对我们学校的印象如何,他说:"你们学校的招待所太差了,以后再也不敢住了!"我急忙问其原因. 教授说道:"那吃饭的碗,碗口处处不可导,这哪是给人用的!"我听了,大笑,这教授比喻得还真形象!

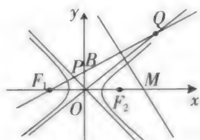


F_2, 若曲线 Γ 上存在点 P 满足 $|PF_1|:|F_1F_2|:|PF_2|=4:3:2$,则曲线 Γ 的离心率等于(　　).

A. $\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$　　B. $\frac{2}{3}$ 或 2

C. $\frac{1}{2}$ 或 2　　D. $\frac{2}{3}$ 或 $\frac{3}{2}$

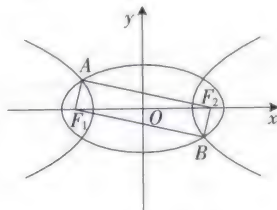
3. (浙江高考)如图,F_1,F_2 分别是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a,b>0)$的左、右焦点,$B$ 是虚轴的端点,直线 F_1B 与 C 的两条渐近线分别交于 P,Q 两点,线段 PQ 的垂直平分线与 x 轴交于点 M,若 $|MF_2|=|F_1F_2|$,则 C 的离心率是(　　).



A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

4. (浙江高考)如图 F_1,F_2 是椭圆 $C_1:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 与双曲线 C_2 的公共焦点,A,B 分别是 C_1,C_2 在第二、四象限的公共点. 若四边形 AF_1BF_2 为矩形,则 C_2 的离心率为(　　).



A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

5. (重庆高考)设双曲线 C 的中心为点 O,若有且只有一对相交于点 O,所成的角为 60°的直线 A_1B_1 和 A_2B_2,使 $|A_1B_1|=|A_2B_2|$,其中 A_1,B_1 和 A_2,B_2 分别是这对直线与双曲线 C 的交点,则该双曲线的离心率的取值范围是(　　).

A. $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},2\right]$　　B. $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3},2\right)$

C. $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$　　D. $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$

模板 6　求抛物线的标准方程及定义的应用问题

【5年24考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(陕西高考)设抛物线的顶点在原点,准线方程为 $x=-2$,则抛物线的方程是(　　). A. $y^2=-8x$　B. $y^2=8x$　C. $y^2=-4x$　D. $y^2=4x$	本模板解决的是"已知抛物线满足的条件,求抛物线的标准方程或根据抛物线解决相关问题"的问题.
解析:依题意,设抛物线的方程为 $y^2=2px(p>0)$,由准线方程为 $x=-2$,得 $-\frac{p}{2}=-2$,所以 $p=4$,故所求抛物线方程为 $y^2=8x$. 故选 B. **答案**:B	第一步　设出抛物线的标准方程. 第二步　根据题意求出参数的值. 第三步　代入参数的值即得抛物线的方程.

凯尔微博



统计学家　有个从未管过自己孩子的统计学家,在一个星期六下午妻子要外出买东西时,勉强答应照看一下 4 个年幼好动的孩子. 当妻子回家时,他交给妻子一张纸条,上写:"擦眼泪 11 次;系鞋带 15 次;给每个孩子吹玩具气球各 5 次,每个气球的平均寿命 10 秒钟;警告孩子不要横穿马路 26 次;孩子坚持要穿过马路 26 次;我还想再过这样的星期六 0 次."

模板攻略

1. 模板解决思路

求抛物线的标准方程时，首先确定标准方程的类型，并将其用有关参数 p 表示出来，然后再结合问题的条件，建立参数 p 满足的等式，求得 p 的值，再代入所设方程，即一定位，二定量，最后写过程.

2. 模板解决步骤

1 第一步　明确抛物线的类型，并设出相应的抛物线方程.

2 第二步　结合已知条件求出参数的值.

3 第三步　写出抛物线方程.

4 第四步　结合抛物线的定义求得结论.

3. 典型例题

典例 1　(山东高考)设斜率为 2 的直线 l 过抛物线 $y^2=ax(a\neq0)$的焦点 F，且和 y 轴交于点 A. 若 $\triangle OAF$(O 为坐标原点)的面积为 4，则抛物线的方程为(　　).

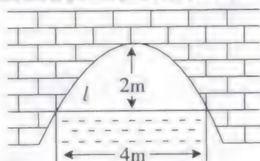
A. $y^2=\pm4x$　B. $y^2=\pm8x$　C. $y^2=4x$　D. $y^2=8x$

解析：抛物线 $y^2=ax(a\neq0)$的焦点 F 的坐标为$\left(\frac{a}{4},0\right)$，则直线 l 的方程为 $y=2\left(x-\frac{a}{4}\right)$，它与 y 轴的交点为 $A\left(0,-\frac{a}{2}\right)$，所以$\triangle OAF$ 的面积为 $\frac{1}{2}\left|\frac{a}{4}\right|\cdot\left|\frac{a}{2}\right|=4$，解得 $a=\pm8$.　1~2

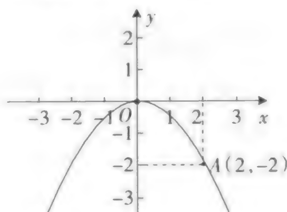
所以抛物线方程为 $y^2=\pm8x$.　3

答案：B

典例 2　(陕西高考)如图是抛物线形拱桥，当水面在 l 时，拱顶离水面 2 米，水面宽 4 米，水位下降 1 米后，水面宽 ________ 米.



解析：设水面与桥的一个交点为 A，如图建立直角坐标系，则 A 的坐标为$(2,-2)$. 设抛物线方程为 $x^2=-2py$，　1



将点 $A(2,-2)$代入抛物线方程得 $p=1$.　2

抛物线方程为 $x^2=-2y$.　3

设水位下降 1 米后水面与桥的交点坐标为$(x_0,-3)$，则 $x_0^2=-2\times(-3)=6$，$x_0=\pm\sqrt{6}$，

所以水面宽度为 $2\sqrt{6}$(米).　4

答案：$2\sqrt{6}$

知识要点

1. 抛物线的定义

平面内与一个定点 F 和一条定直线 l(l 不经过点 F)距离相等的点的轨迹叫作抛物线. 点 F 叫作抛物线的焦点，直线 l 叫作抛物线的准线.

2. 抛物线的标准方程

(1)当抛物线的焦点在 x 轴上时，其标准方程是 $y^2=2px(p>0)$，焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$或 $y^2=-2px(p>0)$，焦点 $F\left(-\frac{p}{2},0\right)$.

(2)当抛物线的焦点在 y 轴上时，其标准方程是 $x^2=2py(p>0)$，焦点 $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$或 $x^2=-2py(p>0)$，焦点 $F\left(0,-\frac{p}{2}\right)$.

选修 2-1

数学奇才　数学课上，小明趴在桌子上睡觉，数学老师没有发觉，还在滔滔不绝地讲课. 下课了，小明醒来，问同桌的数学课代表："我睡了多久了？"数学课代表说："你已经睡了一节课，大概 2 400 秒，40 分钟，三分之二小时，三十六分之一天，一千零八十分之一个月，一万二千九百六十分之一年，一百二十九万六千分之一世纪了吧！"



模板演练

➜ 答案详见 P441

1. (新课标全国高考)已知直线 l 过抛物线 C 的焦点,且与 C 的对称轴垂直,l 与 C 交于 A,B 两点,$|AB|=12$,P 为 C 的准线上一点,则 $\triangle ABP$ 的面积为(　　).

A. 18　　B. 24　　C. 36　　D. 48

2. (福建高考)过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 作倾斜角为 45°的直线交抛物线于 A,B 两点,若线段 AB 的长为 8,则 $p=$________.

3. 已知抛物线的顶点在原点,焦点在 x 轴上,且过点 $M(1,2)$,则该抛物线的方程为________.

4. (北京高考)若抛物线 $y^2=2px$ 的焦点坐标为(1,0),则 $p=$________;准线方程为________.

模板 7　利用抛物线的性质求面积或长度【5年22考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(新课标全国高考)O 为坐标原点,F 为抛物线 $C:y^2=4\sqrt{2}x$ 的焦点,P 为 C 上一点,若 $\|PF\|=4\sqrt{2}$,则 $\triangle POF$ 的面积为(　　). A. 2　B. $2\sqrt{2}$　C. $2\sqrt{3}$　D. 4	本模板解决的是"已知抛物线满足条件 p,根据抛物线的性质及抛物线焦点弦的性质,求解抛物线中的面积或长度"的问题.
解析:如图,设点P的坐标为(x_0,y_0), 由 $\|PF\|=x_0+\sqrt{2}=4\sqrt{2}$, 得 $x_0=3\sqrt{2}$,代入抛物线方程 得 $y_0^2=4\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=24$, 所以 $\|y_0\|=2\sqrt{6}$, 所以 $S_{\triangle POF}=\frac{1}{2}\|OF\|\|y_0\|$. $=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2\sqrt{6}=2\sqrt{3}$. 故选 C. **答案**:C	第一步　根据抛物线的性质,结合 $\|PF\|=4\sqrt{2}$ 列方程. 第二步　解方程求得点 P 的横坐标,代入抛物线得 $\|y_0\|$. 第三步　把数据代入面积公式求面积.

模板攻略

1. 模板解决思路

在使用抛物线的几何性质解决问题时,一定要区分抛物线的开口方向,根据不同的开口方向来确定其几何性质.

2. 模板解决步骤

1 第一步　设未知数,根据已知条件,结合抛物线的性质列方程(组).

2 第二步　解方程(组),并求出相关的量.

3 第三步　代入相关量,求得面积或长度.



不必紧张　小明洗澡时不小心吞下一小块肥皂,他的妈妈慌慌张张地打电话向家庭医生求助.医生说:"我现在还有几个病人在,可能要半小时后才能赶过去."小明妈妈说:"在你来之前,我该做什么?"医生说:"给小明喝一杯白开水,然后用力跳一跳,你就可以让小明用嘴巴吹泡泡消磨时间了."

3. 典型例题

典例 1　(辽宁高考)设抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为 F，准线为 l，P 为抛物线上一点，$PA\perp l$，A 为垂足，如果直线 AF 的斜率为 $-\sqrt{3}$，那么 $|PF|=$(　　).

A. $4\sqrt{3}$　　B. 8　　C. $8\sqrt{3}$　　D. 16

解析：设 $A(-2,y_0)$，又 $F(2,0)$，则 $k_{AF}=-\frac{y_0}{4}=-\sqrt{3}$，　1

$\therefore y_0=4\sqrt{3}$，将 $y_0=4\sqrt{3}$ 代入 $y^2=8x$ 得 $x_P=6$，　2

$\therefore |PF|=|PA|=6+2=8.$　3

答案：B

典例 2　(四川高考)已知抛物线关于 x 轴对称，它的顶点在坐标原点 O，并且经过点 $M(2,y_0)$. 若点 M 到该抛物线焦点的距离为 3，则 $|OM|=$(　　).

A. $2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 4　　D. $2\sqrt{5}$

解析：设抛物线方程为 $y^2=2px(p>0)$，则焦点坐标为 $\left(\frac{p}{2},0\right)$，准线方程为 $x=-\frac{p}{2}$，

$\because$ 点 M 在抛物线上，

$\therefore$ 点 M 到焦点的距离等于到准线的距离，

即 $2+\frac{p}{2}=3$，$\therefore p=2$ 且 $y_0^2=4p=8$.　1～2

根据两点距离公式，得

$|OM|=\sqrt{2^2+y_0^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.　3

答案：B

知识要点

1. 抛物线的简单几何性质

标准方程	$y^2=2px$ $(p>0)$	$y^2=-2px$ $(p>0)$	$x^2=2py$ $(p>0)$	$x^2=-2py$ $(p>0)$
简图				
焦点	$\left(\frac{p}{2},0\right)$	$\left(-\frac{p}{2},0\right)$	$\left(0,\frac{p}{2}\right)$	$\left(0,-\frac{p}{2}\right)$
顶点	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
准线方程	$x=-\frac{p}{2}$	$x=\frac{p}{2}$	$y=-\frac{p}{2}$	$y=\frac{p}{2}$
对称轴	x轴	x轴	y轴	y轴
焦半径	$\|MF\|=x_0+\frac{p}{2}$	$\|MF\|=-x_0+\frac{p}{2}$	$\|MF\|=y_0+\frac{p}{2}$	$\|MF\|=-y_0+\frac{p}{2}$
范围	$x\geqslant0,y\in\mathbf{R}$	$x\leqslant0,y\in\mathbf{R}$	$y\geqslant0,x\in\mathbf{R}$	$y\leqslant0,x\in\mathbf{R}$

p 的几何意义是抛物线焦点到准线的距离，对于方程 $y^2=2px(p>0)$，当 x 值确定时，p 值越大，$|y|$ 也越大，抛物线开口越大.

2. 抛物线焦点弦的性质

当直线通过抛物线的焦点时所得弦称为焦点弦.

设 AB 是过抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 的弦，若 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则

(1) $x_1x_2=\frac{p^2}{4}$，$y_1y_2=-p^2$；

(2) 弦长 $|AB|=x_1+x_2+p=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$($\alpha$ 为弦 AB 的倾斜角)；

(3) $\frac{1}{|FA|}+\frac{1}{|FB|}=\frac{2}{p}$；

(4) 以弦 AB 为直径的圆与准线相切.

模板演练

➡ 答案详见 P441

1. (安徽高考)过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 的直线交抛物线于 A，B 两点，O 是坐标原点. 若 $|AF|=3$，则 $\triangle AOB$ 的面积为(　　).

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

2. (湖南高考)设抛物线 $y^2=8x$ 上一点 P 到 y 轴的

钥匙　一把坚实的大锁挂在大门上，一根铁杆费了九牛二虎之力，还是无法将它撬开. 钥匙来了，他瘦小的身子钻进锁孔，只轻轻一转，大锁就"啪"地一声打开了. 铁杆奇怪地问："为什么我费了那么大力气也打不开，而你却轻而易举地就把它打开了呢？"钥匙说："因为我最了解他的心."

距离是4,则点 P 到该抛物线焦点的距离是(　　).

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 12

3. (江西高考)已知点 $A(2,0)$,抛物线 $C:x^2=4y$ 的焦点为 F,射线 FA 与抛物线 C 相交于点 M,与其准线相交于点 N,则 $|FM|:|MN|=$(　　).

A. $2:\sqrt{5}$　　B. $1:2$

C. $1:\sqrt{5}$　　D. $1:3$

4. (安徽高考)过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F 的直线交该抛物线于 A,B 两点. 若 $|AF|=3$,则 $|BF|=$______.

模板8　求直线与圆锥曲线相交时的弦长【5年14考】

模板探究

母题呈现	模板引入
斜率为1的直线 l 过点(0,1),且与椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 相交于 A,B 两点,则 $\|AB\|=$______.	本模板解决的是"已知圆锥曲线 C 和直线 l,求圆锥曲线被直线所截的弦长"的问题.
解析:由已知易求直线方程为 $y=x+1$,联立方程得 $\begin{cases}y=x+1,\\ \frac{x^2}{4}+y_2=1,\end{cases}$ 消去 y 得 $5x^2+8x=0$. 所以 $x_1+x_2=-\frac{8}{5}$, $x_1x_2=0$. 则 $\|AB\|=\sqrt{2}\cdot\|x_1-x_2\|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{8\sqrt{2}}{5}$. **答案:** $\frac{8\sqrt{2}}{5}$	第一步　求出直线 l 的方程. 第二步　联立,得 $\begin{cases}y=x+1,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1.\end{cases}$ 第三步　消去 y 得关于 x 的一元二次方程. 第四步　由 $\|AB\|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$ 求得弦长.

模板攻略

1. 模板解决思路

突破直线与圆锥曲线相交时的弦长问题这一难点有两种基本方法:一是直接求两交点的坐标,利用两点间距离公式计算弦长(有时此法更直接);二是设而不求,数形结合,活用定义(特指焦点弦问题),运用弦长公式和根与系数的关系计算弦长(若直线斜率为 k,直线与圆锥曲线的交点为 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则 $|AB|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$ 或 $\sqrt{\left(1+\frac{1}{k^2}\right)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}$,联立直线方程与圆锥曲线方程,消元后得到一元二次方程,利用根与系数的关系整体代入).

2. 模板解决步骤

1 第一步　求出圆锥曲线与直线的方程.

2 第二步　联立直线方程与圆锥曲线方程.

3 第三步　消去 y(或 x),得到关于 x(或 y)的一元二次方程.

4 第四步　代入弦长公式求出弦长,或分别求出 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 用距离公式求解.

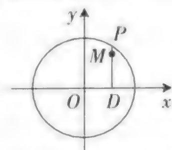
凯尔微博



第一名　毕业典礼上,校长宣布全年级第一名的同学上台领奖,可是连续叫了好几声之后,那位学生才慢慢地走上台. 后来,老师问那位学生说:"怎么了?是不是生病了?还是没听清楚?"学生答:"不是的,我是怕其他同学没听清楚."名与利是多少人的捆绑、多少人的心结?

3. 典型例题

典例 1　(陕西高考)如图,设 P 是圆 $x^2+y^2=25$ 上的动点,点 D 是 P 在 x 轴上的投影,M 为 PD 上一点,且 $|MD|=\frac{4}{5}|PD|$.



(1)当 P 在圆上运动时,求点 M 的轨迹 C 的方程;

(2)求过点(3,0)且斜率为 $\frac{4}{5}$ 的直线被 C 所截线段的长度.

解:(1)设 $M(x,y)$,$P(x_P,y_P)$,则 $x_P=x$,

因为 $|MD|=\frac{4}{5}|PD|$,得 $|y|=\frac{4}{5}|y_P|$,$|y_P|=\frac{5}{4}|y|$.

又点 P 在 $x^2+y^2=25$ 上,

故 $x_P^2+y_P^2=25$,则 $x^2+\left(\frac{5}{4}y\right)^2=25$,

即 C:$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

(2)过点(3,0)且斜率为 $\frac{4}{5}$ 的直线方程为 $y=\frac{4}{5}(x-3)$.　①

设直线交 C 于 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

联立直线与椭圆方程消 y 得

$\frac{x^2}{25}+\frac{1}{16}\left[\frac{4}{5}(x-3)\right]^2=1$,$2x^2-6x+9=25$,

即 $x^2-3x-8=0$,　②~③

所以 $x_1+x_2=3$,$x_1x_2=-8$. 于是

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$=\sqrt{(x_1-x_2)^2+\left[\frac{4}{5}(x_1-x_2)\right]^2}$$

$$=\sqrt{\left(1+\frac{16}{25}\right)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$$

$$=\sqrt{\frac{41}{25}\times(9+32)}=\frac{41}{5}.$$　④

典例 2　(北京高考)已知椭圆 G:$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. 过点 $(m,0)$ 作圆 $x^2+y^2=1$ 的切线 l 交椭圆 G 于 A,B 两点.

(1)求椭圆 G 的焦点坐标和离心率;

(2)将 $|AB|$ 表示为 m 的函数,并求 $|AB|$ 的最大值.

解:(1)由已知得 $a=2$,$b=1$ 所以 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$,

所以椭圆 G 的焦点坐标为 $(-\sqrt{3},0)$,$(\sqrt{3},0)$,

离心率为 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2)由题意知,$|m|\geq 1$.

当 $m=1$ 时,切线 l 的方程为 $x=1$,　①

点 A,B 的坐标分别为 $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\left(1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,　2~3

此时 $|AB|=\sqrt{3}$.　④

当 $m=-1$ 时,同理可得 $|AB|=\sqrt{3}$.

当 $|m|>1$ 时,设切线 l 的方程为 $y=k(x-m)$.　①

由 $\begin{cases}y=k(x-m),\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$　②

得 $(1+4k^2)x^2-8k^2mx+4k^2m^2-4=0$.　③

设 A,B 两点的坐标分别为 (x_1,y_1),(x_2,y_2),

则 $x_1+x_2=\frac{8k^2m}{1+4k^2}$,$x_1x_2=\frac{4k^2m^2-4}{1+4k^2}$.

又由 l 与圆 $x^2+y^2=1$ 相切,

得 $\frac{|km|}{\sqrt{k^2+1}}=1$,即 $m^2k^2=k^2+1$.

所以 $|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$$=\sqrt{(1+k^2)[(x_2+x_1)^2-4x_1x_2]}$$

$$=\sqrt{(1+k^2)\left[\frac{64k^4m^2}{(1+4k^2)^2}-\frac{4(4k^2m^2-4)}{1+4k^2}\right]}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}|m|}{m^2+3}.$$　④

由于当 $m=\pm1$ 时,$|AB|=\sqrt{3}$,

所以 $|AB|=\frac{4\sqrt{3}|m|}{m^2+3}$,$m\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

因为 $|AB|=\frac{4\sqrt{3}|m|}{m^2+3}=\frac{4\sqrt{3}}{|m|+\frac{3}{|m|}}\leq 2$,

当且仅当 $m=\pm\sqrt{3}$ 时,$|AB|=2$,

所以 $|AB|$ 的最大值为 2.

谚语中的加法　"三山六水一分田,天下凡人种不全",山占大地的三份、水占大地的六份、田占大地的一份,那么整个大地就有 3+6+1=10(份),这么多的份数既表现了大地物产的丰富,又告诫人们做什么事都不要太贪."新三年,旧三年,缝缝补补又三年",一件衣服能穿多少年呢? 3+3+3=9(年),由此含蓄道出了生活的艰苦.

凯尔微博


模板演练

答案详见 P442

1. (新课标全国高考)已知圆 $M:(x+1)^2+y^2=1$,圆$N:(x-1)^2+y^2=9$,动圆 P 与圆 M 外切并且与圆 N 内切,圆心 P 的轨迹为曲线 C.
(1)求 C 的方程;
(2)l 是与圆 P,圆 M 都相切的一条直线,l 与曲线 C 交于 A,B 两点,当圆 P 的半径最长时,求 $|AB|$.

2. (湖南高考)已知 F_1,F_2 分别是椭圆 $E:\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 的左、右焦点,F_1,F_2 关于直线 $x+y-2=0$ 的对称点是圆 C 的一条直径的两个端点.
(1)求圆 C 的方程;
(2)设过点 F_2 的直线 l 被椭圆 E 和圆 C 所截得的弦长分别为 a,b. 当 ab 最大时,求直线 l 的方程.

模板 9 求直线与圆锥曲线的位置关系问题 【每年必考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(浙江高考)设 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点,过点 $P(-1,0)$的直线 l 交抛物线 C 于 A,B 两点,点 Q 为线段 AB 的中点. 若$\|FQ\|=2$,则直线 l 的斜率等于 ______.	本模板解决的是"已知直线与圆锥曲线(椭圆、双曲线、抛物线)满足条件 p,求直线与圆锥曲线的位置关系、直线的方程、参数的值或取值范围、直线过定点、证明定值、求最值"的问题.
解析:令直线 l 的方程为 $x=ty-1$, 由$\begin{cases}x=ty-1,\\y^2=4x\end{cases}$得 $y^2-4ty+4=0$. 设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=4t$,$y_1y_2=4$,$x_1+x_2=4t^2-2$, 所以 $x_Q=2t^2-1$,$y_Q=2t$,$\|FQ\|^2=(x_Q-1)^2+y_Q^2=4$,代入解得,$t=\pm1$ 或$t=0$(舍去),即直线 l 的斜率为±1. **答案:**±1	第一步 根据题意巧妙设直线 l 的方程. 第二步 联立,并消去 x,得 $y^2-4ty+4=0$. 第三步 根据点 Q 为线段 AB 的中点列式. 第四步 求出 t,$\frac{1}{t}$ 的值即为直线 l 的斜率.

凯尔微博



谚语中的减法 "三魂少了二魂,七魄只剩一魄",还剩下几魂呢?3-2=1(魂),减少了几魄呢?7-1=6(魄),由两次减法运算,淋漓尽致地表现了此时此刻的惊恐至极."鸡无三只腿,娘无二条心",鸡有几只腿呢?当然是两只,那么就多说了 3-2=1(只),相对应,娘有几条心呢?也要减去一条心,当然只有 2-1=1(条)心了.

模板攻略

1. 模板解决思路

(1)解判断直线与已知圆锥曲线的位置关系或求直线 l 的方程及圆锥曲线方程中的参数问题的一般方法是将直线方程与圆锥曲线方程联立,进而转化为一元二次方程,利用判别式和根与系数的关系来求解.

(2)范围问题必然要涉及不等式,找到产生不等式的原因是解题的关键,这个不等式可能是题目给出的不等式,也可能是判别式的符号、圆锥曲线的范围等.

(3)求解定点问题的关键是选用合理的参数建立直线系或者曲线系方程,由方程的恒成立找到定点坐标.

(4)求解定值问题的关键是引进参数,建立与其有关的求解目标的代数表达式,只要这个代数表达式与引进的参数无关即可.

2. 模板解决步骤

1 第一步　求出(或设出)圆锥曲线和直线的方程.

2 第二步　联立直线方程和圆锥曲线方程,消去 y(或消去 x),得到关于 x(或 y)的一元二次方程.

3 第三步　利用已知条件 p,写出判别式与零的关系或得到关于直线方程的系数的方程(组)或有关参数的方程(组)或写出与定点、定值有关的式子,并化简或将与最值相关的式子写成函数形式,并写出相应的变量的取值范围.

4 第四步　得出相应结论(判断位置关系或求直线的方程或求参数的值、取值范围或证明直线过定点或证明定值问题或求最值).

3. 典型例题

典例 1　(安徽高考)设椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{1-a^2}=1$ 的焦点在 x 轴上.

(1)若椭圆 E 的焦距为 1,求椭圆 E 的方程;

(2)设 F_1,F_2 分别是椭圆 E 的左、右焦点,P 为椭圆 E 上第一象限内的点,直线 F_2P 交 y 轴于点 Q,并且 $F_1P\perp F_1Q$. 证明:当 a 变化时,点 P 在某定直线上.

解:(1)因为焦距为1,所以$2a^2-1=\frac{1}{4}$,解得$a^2=\frac{5}{8}$.

故椭圆E的方程为$\frac{8x^2}{5}+\frac{8y^2}{3}=1$.

(2)设$P(x_0,y_0)$,$F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$,其中$c=\sqrt{2a^2-1}$.

由题设知$x_0\neq c$,则直线F_1P的斜率$k_{F_1P}=\frac{y_0}{x_0+c}$,

直线F_2P的斜率$k_{F_2P}=\frac{y_0}{x_0-c}$.

故直线F_2P的方程为$y=\frac{y_0}{x_0-c}(x-c)$.　1

当$x=0$时,$y=\frac{cy_0}{c-x_0}$,即点Q坐标为$\left(0,\frac{cy_0}{c-x_0}\right)$.

因此,直线F_1Q的斜率为$k_{F_1Q}=\frac{y_0}{c-x_0}$.

由于$F_1P\perp F_1Q$,所以$k_{F_1P}\cdot k_{F_1Q}=\frac{y_0}{x_0+c}\cdot\frac{y_0}{c-x_0}=-1$.

化简得$y_0^2=x_0^2-(2a^2-1)$.　3

代入椭圆E的方程,由于点$P(x_0,y_0)$在第一象限,解得$x_0=a^2$,$y_0=1-a^2$,即点P在定直线$x+y=1$上.　4

典例 2　(天津高考)设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左焦点为 F,离心率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$,过点 F 且与 x 轴垂直的直线被椭圆截得的线段长为$\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

(1)求椭圆的方程;

(2)设 A,B 分别为椭圆的左、右顶点,过点 F 且斜率为 k 的直线与椭圆交于 C,D 两点. 若$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=8$,求 k 的值.

解:(1)设 $F(-c,0)$,由 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,知 $a=\sqrt{3}c$. 过点 F 且与 x 轴垂直的直线的方程为 $x=-c$,代入椭圆方程有 $\frac{(-c)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,解得 $y=\pm\frac{\sqrt{6}b}{3}$,于是

谚语中的乘法　"百年三万六千日,光阴只有瞬息间",一年如果按照 360 日计算,百年就有 360×100=36 000(日),把"36 000 日"与"瞬息"相对照,表明了光阴易逝,我们要珍惜时间."怀揣了二十五只兔子,百爪抓心",一只兔子 4 只脚,25 只兔子就有 4×25=100(只)脚,通过乘法运算描绘了此时心情的痛苦不堪.

$\frac{2\sqrt{6}b}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，解得 $b=\sqrt{2}$，又 $a^2-c^2=b^2$，从而 $a=\sqrt{3}$，$c=1$，所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$. ①

(2)设点 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，由 $F(-1,0)$ 得直线 CD 的方程为 $y=k(x+1)$，由方程组 $\begin{cases}y=k(x+1),\\ \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$ 消去 y，整理得 $(2+3k^2)x^2+6k^2x+3k^2-6=0$. ②

由根与系数的关系可得 $x_1+x_2=-\frac{6k^2}{2+3k^2}$，$x_1x_2=\frac{3k^2-6}{2+3k^2}$.

因为 $A(-\sqrt{3},0)$，$B(\sqrt{3},0)$，

所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}=(x_1+\sqrt{3},y_1)\cdot(\sqrt{3}-x_2,-y_2)+(x_2+\sqrt{3},y_2)\cdot(\sqrt{3}-x_1,-y_1)$

$=6-2x_1x_2-2y_1y_2$

$=6-2x_1x_2-2k^2(x_1+1)(x_2+1)$

$=6-(2+2k^2)x_1x_2-2k^2(x_1+x_2)-2k^2$

$=6+\frac{2k^2+12}{2+3k^2}$. ③

由已知得 $6+\frac{2k^2+12}{2+3k^2}=8$，解得 $k=\pm\sqrt{2}$. ④

误区警示

这类问题对运算能力要求较高，计算量较大，很容易出现计算错误，需要在计算过程中细心、耐心.

知识要点

1. 直线与椭圆的位置关系

直线与椭圆的位置关系有三种：相离(没有公共点)，相切(只有一个公共点)，相交(有两个公共点).

将直线方程与椭圆方程联立组成方程组，消去一个未知数 y(或 x)得到关于 x(或 y)的一元二次方程.

(1)$\Delta<0\Leftrightarrow$方程组无实数解$\Leftrightarrow$直线与椭圆相离.

(2)$\Delta=0\Leftrightarrow$方程组有一组解$\Leftrightarrow$直线与椭圆相切.

(3)$\Delta>0\Leftrightarrow$方程组有两组解$\Leftrightarrow$直线与椭圆相交.

2. 直线与双曲线的位置关系

将直线方程与双曲线方程联立组成方程组，消去一个未知数.

(1)若得到的方程为一次方程，即直线与双曲线的渐近线平行，此时直线与双曲线相交且只有一个公共点.

(2)若得到的方程为二次方程，则

$\Delta<0\Leftrightarrow$方程组无实数解$\Leftrightarrow$直线与双曲线相离.

$\Delta=0\Leftrightarrow$方程组有一组解$\Leftrightarrow$直线与双曲线相切.

$\Delta>0\Leftrightarrow$方程组有两组解$\Leftrightarrow$直线与双曲线相交.

3. 直线与抛物线的位置关系

判断直线 l 与抛物线 C 的位置关系时，通常将直线 l 的方程 $Ax+By+C=0$(A，B 不同时为 0)代入抛物线 C 的方程 $F(x,y)=0$，消去 y 得到一个关于变量 x 的一元方程.

即 $\begin{cases}Ax+By+C=0,\\ F(x,y)=0,\end{cases}$ 消去 y 后得 $ax^2+bx+c=0$.

(1)当 $a\neq0$ 时，若 $\Delta>0$，则直线 l 与抛物线 C 相交；$\Delta=0$，直线 l 与抛物线 C 相切；$\Delta<0$，直线 l 与抛物线 C 相离.

(2)当 $a=0$ 时，即得到一个一次方程，则 l 与 C 相交，且只有一个交点，此时直线 l 与抛物线 C 的对称轴平行或重合.

4. 定值问题

(1)解析几何中的定值问题的证明可运用函数的思想方法来解决. 证明过程可总结为“变量→函数→定值”，具体操作程序如下：

①变量——选择适当的量为变量；

②函数——把要证明为定值的量表示成上述变量的函数；

③定值——把得到的函数解析式化简，消去变量得到定值.

(2)求定值问题常见的方法有两种：

①从特殊入手，求出定值，再证明这个值与变量无关.

②直接推理、计算，并在此过程中消去变量，从而得到该值与变量无关.

凯尔微博



谚语中的除法 “病有四百四病，药有八百八方”，有病不用怕，自有药方来去病，一病有 $880\div440=2$(方)等着呢，运算后哪里还有恐惧，这是多么积极主动的处世态度. “千年房屋换百主”，房屋每 $1000\div100=10$(年)就要换一主呀！由此表明了事物的发展变化.

模板演练

➡ 答案详见 P443

1.（陕西高考）已知动圆过定点 $A(4,0)$，且在 y 轴上截得弦 MN 的长为 8.

(1)求动圆圆心的轨迹 C 的方程；

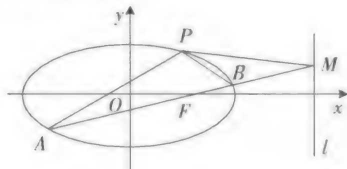
(2)已知点 $B(-1,0)$，设不垂直于 x 轴的直线 l 与轨迹 C 交于不同的两点 P,Q，若 x 轴是 $\angle PBQ$ 的角平分线，证明直线 l 过定点.

2.（江西高考）如图，椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $P\left(1,\frac{3}{2}\right)$，离心率 $e=\frac{1}{2}$，直线 l 的方程为 $x=4$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)AB 是经过右焦点 F 的任一弦（不经过点 P），设直线 AB 与直线 l 相交于点 M，记 PA,PB,PM 的斜率分别为 k_1,k_2,k_3.

问：是否存在常数 λ，使得 $k_1+k_2=\lambda k_3$？若存在，求 λ 的值；若不存在，说明理由.



3.（安徽高考）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦距为 4，且过点 $P(\sqrt{2},\sqrt{3})$.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)设 $Q(x_0,y_0)(x_0y_0\neq 0)$ 为椭圆 C 上一点. 过点 Q 作 x 轴的垂线，垂足为 E. 取点 $A(0,2\sqrt{2})$，连接 AE. 过点 A 作 AE 的垂线交 x 轴于点 D. 点 G 是点 D 关于 y 轴的对称点，作直线 QG. 问这样作出的直线 QG 是否与椭圆 C 一定有唯一的公共点？并说明理由.

4.（山东高考）椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1,F_2，离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，过 F_1 且垂直于 x 轴的直线被椭圆 C 截得的线段长为 1.

(1)求椭圆 C 的方程；

(2)点 P 是椭圆 C 上除长轴端点外的任一点，连接 PF_1,PF_2. 设 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线 PM 交 C 的长轴于点 $M(m,0)$，求 m 的取值范围；

(3)在(2)的条件下，过点 P 作斜率为 k 的直线 l，使得 l 与椭圆 C 有且只有一个公共点. 设直线 PF_1,PF_2 的斜率分别为 k_1,k_2，若 $k\neq 0$，试证明 $\frac{1}{kk_1}+\frac{1}{kk_2}$ 为定值，并求出这个定值.

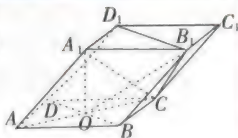
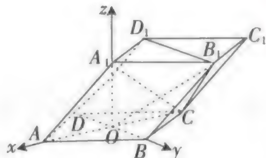
自然数记趣——走向成功的“三”(一)　中国古人认为，“三”是一个成功的数字. 史记云：“数始于一，终于十，成于三”，《老子》则说：“道生一，一生二，二生三，三生万物.”亚里士多德说：“人类所需要的知识有三：理论、使用、鉴别.”法国生物学家巴斯德说：“立志、工作、成功是人类活力的三大要素.”



第三章　空间向量与立体几何

模板 1　用向量法证明平行或垂直 【每年必考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(陕西高考节选)如图,四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是正方形,O 为底面中心,$A_1O\perp$平面 $ABCD$,$AB=AA_1=\sqrt{2}$. 证明:$A_1C\perp$平面 BB_1D_1D. 	本模板解决的是"在立体几何中,建立直角坐标系,通过向量坐标之间的计算,求证线线、线面、面面的平行或垂直"的问题.
证明:由题设易知 OA,OB,OA_1 两两垂直,以 O 为原点建立直角坐标系,如图.  $\because AB=AA_1=\sqrt{2}$, $\therefore OA=OB=OA_1=1$, $\therefore A(1,0,0),B(0,1,0)$, $C(-1,0,0),D(0,-1,0)$, $A_1(0,0,1)$. 由 $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}$,易得 $B_1(-1,1,1)$. $\because \overrightarrow{A_1C}=(-1,0,-1),\overrightarrow{BD}=(0,-2,0),\overrightarrow{BB_1}=(-1,0,1)$, $\therefore \overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0$, $\therefore A_1C\perp BD,A_1C\perp BB_1$, 又 $BD\cap BB_1=B$,且 $BD,BB_1\subset$平面 BB_1D_1D, $\therefore A_1C\perp$平面 BB_1D_1D.	第一步　以 O 为原点建立空间直角坐标系. 第二步　用坐标表示向量 $\overrightarrow{A_1C},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BB_1}$. 第三步　由 $\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0\Rightarrow A_1C\perp BD,A_1C\perp BB_1$. 第四步　由 $A_1C\perp BD,A_1C\perp BB_1\Rightarrow A_1C\perp$平面 BB_1D_1D.

模板攻略

1. 模板解决思路

(1)平行问题的证明方法:

①证明空间两直线平行,可以先转化为空间两向量共线,即只需证明表示两条直线的向量满足实数倍数关系. 如证明 $AB/\!/CD$,只需证 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CD}$.

②证明面面平行,只要证明一平面内两条相交直线平行于另一平面内的两条直线即可. 也就将其转化为证明线线平行的问题.

③遇到中点问题常作中位线,用中位线定理解题,也是几何中的常用方法.

(2)垂直问题的证明方法:

①要证线线垂直,可以转化为对应的向量垂直.

②要证线面垂直,可以转化为证明这条直线与平面内两条相交直线垂直.



自然数记趣——走向成功的"三"(二)　"立志是事业之门,工作是登堂入室的旅程,旅程的尽头是成功."法国天文学家戴布劳格林总结自己经验有三大原则:广见闻,多阅读,勤实践. 法国文学家卢梭把读书分为三个步骤:储存、比较、批判. 陈景润说:"学习要有三心:一是信心,二是决心,三是恒心."郭沫若期望青年必须具有"三大基础"即思想基础、科学基础和语文基础.

2. 模板解决步骤

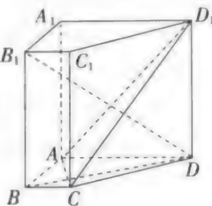
1 第一步 选点建立空间直角坐标系，并把相应的点用坐标的形式表示出来.

2 第二步 把证明线线、线面、面面平行或垂直的相关向量用坐标表示出来.

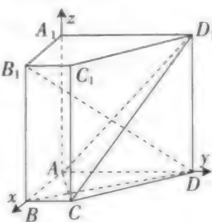
3 第三步 根据线线、线面、面面平行或垂直列式计算.

4 第四步 证出结论.

3. 典型例题



典例 1 (湖南高考节选)如图，在直棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AD // BC$，$\angle BAD=90°$，$AC \perp BD$，$BC=1$，$AD=AA_1=3$. 证明：$AC \perp B_1D$.



证明： 易知，AB, AD, AA_1 两两垂直. 如图，以 A 为坐标原点，AB, AD, AA_1 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系. 设 $AB=t$，则有 $A(0,0,0)$，$B(t,0,0)$，$B_1(t,0,3)$，$C(t,1,0)$，$C_1(t,1,3)$，$D(0,3,0)$，$D_1(0,3,3)$. 1

从而 $\overrightarrow{B_1D}=(-t,3,-3)$，$\overrightarrow{AC}=(t,1,0)$，$\overrightarrow{BD}=(-t,3,0)$. 2

因为 $AC \perp BD$，所以 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-t^2+3+0=0$，解得 $t=\sqrt{3}$ 或 $t=-\sqrt{3}$（舍去）.

于是 $\overrightarrow{B_1D}=(-\sqrt{3},3,-3)$，$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{3},1,0)$.

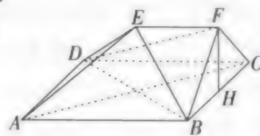
因为 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{B_1D}=-3+3+0=0$， 3

所以 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{B_1D}$，即 $AC \perp B_1D$. 4

典例 2 (安徽高考)如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是正方形，$EF // AB$，$EF \perp FB$，$AB=2EF$，$\angle BFC=90°$，$BF=FC$，H 为 BC 的中点.

(1)求证：$FH //$ 平面 EDB；

(2)求证：$AC \perp$ 平面 EDB.



证明： ∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形，∴ $AB \perp BC$.

又 $EF // AB$，∴ $EF \perp BC$.

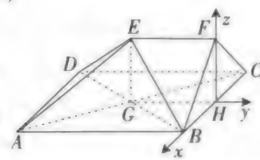
又 $EF \perp FB$，$BC \cap FB=B$，

∴ $EF \perp$ 平面 BFC. ∴ $EF \perp FH$，∴ $AB \perp FH$.

又 $BF=FC$，H 为 BC 的中点，

∴ $FH \perp BC$. 而 $AB \cap BC=B$，

∴ $FH \perp$ 平面 ABC.



以 H 为坐标原点，$\overrightarrow{HB}$ 为 x 轴正方向，$\overrightarrow{HF}$ 为 z 轴正方向，

建立如图所示的空间直角坐标系.

设 $BH=1$，则 $A(1,-2,0)$，$B(1,0,0)$，$C(-1,0,0)$，$D(-1,-2,0)$，$E(0,-1,1)$，$F(0,0,1)$. 1

(1)设 AC 与 BD 的交点为 G，连接 GE，GH，

则 $G(0,-1,0)$，∴ $\overrightarrow{GE}=(0,0,1)$， 2

又 $\overrightarrow{HF}=(0,0,1)$，∴ $\overrightarrow{HF} // \overrightarrow{GE}$.

$GE \subset$ 平面 EDB，$HF \not\subset$ 平面 EDB，

∴ $FH //$ 平面 EDB. 3～4

(2) $\overrightarrow{AC}=(-2,2,0)$，$\overrightarrow{GE}=(0,0,1)$， 2

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{GE}=0$，∴ $AC \perp GE$. 3

又 $AC \perp BD$，$EG \cap BD=G$，∴ $AC \perp$ 平面 EDB. 4

知识要点

1. 空间向量的坐标运算

(1)空间向量数量积的坐标运算

若 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，

则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

(2)空间向量共线与垂直的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，

则 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_1=\lambda b_1, a_2=\lambda b_2, a_3=\lambda b_3(\lambda\in\mathbf{R})$.

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$.

(3)空间向量的模、夹角和距离公式

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，

则 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$，

$$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

若 $A(a_1,b_1,c_1)$，$B(a_2,b_2,c_2)$，

谚语中的一至十(一) “不受一番冰雪苦，哪得梅花扑鼻香”，巧妙而传神地说出了成功的来之不易.“借板搭桥，两相方便”，形象的说明了用思巧妙，双方受益.“话有三说，巧说为妙”，“三说”与“巧说”相对应，突现了说话要讲究艺术性.“坏心人难过四方，夜蝙蝠怕见太阳”，说明了“坏心人”终究要被人们认清他的丑恶面目.

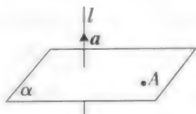


则 $d_{AB}=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2}$.

2. 平面的法向量

(1)定义

如图,直线 $l\perp\alpha$,取直线 l 的方向向量 $\boldsymbol{a}$,则向量 $\boldsymbol{a}$ 叫作平面 α 的法向量.



给定一点 A 和一个向量 $\boldsymbol{a}$,那么,过点 A,以向量$\boldsymbol{a}$为法向量的平面是完全确定的.

(2)平面法向量的求法

求平面法向量的步骤:

①设出平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.

②找出(求出)平面内的两个不共线的向量的坐标 $\boldsymbol{a}=(a_1,b_1,c_1)$,$\boldsymbol{b}=(a_2,b_2,c_2)$.

③根据法向量的定义建立关于 x,y,z 的方程组

$$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}=0.\end{cases}$$

④解方程组,取其中的一组解,即得法向量.由于一个平面的法向量有无数个,故可在代入方程组的解中取一个最简单的作为平面的法向量.

3. 平行与垂直的向量表示

设直线 l,m 的方向向量分别为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,平面 α,β 的法向量分别为$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$,则由直线、平面的位置关系以及直线的方向向量和平面的法向量,可以归纳出如下结论:

$l/\!/m\Leftrightarrow\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{b},k\in\mathbf{R}$;

$l\perp m\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$;

$l/\!/\alpha\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{u}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}=0$;

$l\perp\alpha\Leftrightarrow\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{u}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{u},k\in\mathbf{R}$;

$\alpha/\!/\beta\Leftrightarrow\boldsymbol{u}/\!/\boldsymbol{v}\Leftrightarrow\boldsymbol{u}=k\boldsymbol{v},k\in\mathbf{R}$;

$\alpha\perp\beta\Leftrightarrow\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}\Leftrightarrow\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$.

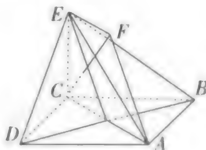
模板演练

➡ 答案详见 P444

1.(北京高考)如图,正方形 $ABCD$ 和四边形$ACEF$所在的平面互相垂直,$CE\perp AC$,$EF/\!/AC$,$AB=\sqrt{2}$,$CE=EF=1$.

(1)求证:$AF/\!/$平面 BDE;

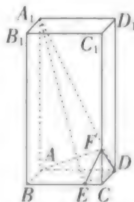
(2)求证:$CF\perp$平面 BDE.



2.(天津高考)如图,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E,F 分别是棱 BC,CC_1 上的点,$CF=AB=2CE$,$AB:AD:AA_1=1:2:4$.

(1)求异面直线 EF 与 A_1D 所成角的余弦值;

(2)证明 $AF\perp$平面 A_1ED.





模板 2　用向量法求空间距离【5年13考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(江苏高考)如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,$PD\perp$ 平面 $ABCD$,$PD=DC=BC=1$,$AB=2$,$AB\parallel DC$,$\angle BCD=90°$. (1)求证:$PC\perp BC$; (2)求点 A 到平面 PBC 的距离.	本模板解决的是"在立体几何中,建立空间直角坐标系,通过向量坐标之间的计算,求点与点的距离、点到线的距离、点到面的距离、线与线的距离、线与面的距离、面与面的距离"的问题.
解:建立如图所示空间直角坐标系 $Dxyz$, 则 $P(0,0,1)$,$C(0,1,0)$,$B(1,1,0)$. (1)证明:$\overrightarrow{PC}=(0,1,-1)$,$\overrightarrow{BC}=(-1,0,0)$. $\because \overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{BC}=0\times(-1)+1\times0+(-1)\times0=0$,$\therefore PC\perp BC$. (2)设平面$PBC$的法向量$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则有 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y-z=0,\\ -x=0.\end{cases}$ 令$y=1$,得$\boldsymbol{n}=(0,1,1)$. $\because A(1,-1,0)$,$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$, $\therefore$点A到平面PBC的距离 $d=\dfrac{\lvert\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}\rvert}{\lvert\boldsymbol{n}\rvert}=\dfrac{\lvert(0,2,0)\cdot(0,1,1)\rvert}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$.	第一步　建立直角坐标系,并求出平面 PBC 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$. 第二步　在平面 PBC 上找一点 B,求出$\overrightarrow{AB}$. 第三步　利用公式 $\alpha=\dfrac{\lvert\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}\rvert}{\lvert\boldsymbol{n}\rvert}$ 求距离.

模板攻略

1. 模板解决思路

求点到平面的距离的关键是找到平面的法向量和斜线段对应的向量,然后利用向量的投影求点到平面的距离;直线与平面平行时,直线上任一点到平面的距离叫直线与平面的距离;异面直线的距离是夹在两条异面直线之间的公垂线段长.

2. 模板解决步骤

①第一步　建立空间直角坐标系,将题目中给的条件用坐标表示出来,并求出该平面的一个法向量.

②第二步　找出从该点出发的平面的任一条斜线段对应的向量.

③第三步　求出法向量与斜线段向量的数量积的绝对值再除以法向量的模,即可求出点到平面的距离.

线面距、面面距均可转化为点面距,用求点面距的方法进行求解.

选修2-1

挑水与挖井(一)　有两个和尚分别住在相邻两座山上的庙里,这两座山之间有一条小溪,因此这两个和尚总会在清晨下山去溪边挑水的时候相遇,每次相遇,他们都会相互问好.久而久之,他们便成为了好朋友.日复一日,年复一年.就这样,他们在每天山上山下的相遇中不知不觉地就过了五年.

凯尔微博

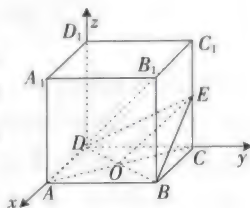


3. 典型例题

典例 （全国高考）已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2$，$CC_1=2\sqrt{2}$，E 为 CC_1 的中点，则直线 AC_1 与平面 BED 的距离为（　　）.

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 1

解析：设下底面中心为 O，由三角形 ACC_1 的中位线知 $AC_1/\!/OE$，所以直线 AC_1 与平面 BED 的距离为点 C_1 到平面 BED 的距离，建立空间直角坐标系如图.



由 $D(0,0,0)$，$B(2,2,0)$，$E(0,2,\sqrt{2})$，$C_1(0,2,2\sqrt{2})$，所以 $\overrightarrow{DE}=(0,2,\sqrt{2})$，$\overrightarrow{DB}=(2,2,0)$，设平面 BED 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$ 所以

$\begin{cases}2x+2y=0,\\ 2y+\sqrt{2}z=0,\end{cases}$ 取 $y=1$，则 $\boldsymbol{n}=(-1,1,-\sqrt{2})$，　　1

所以 $\boldsymbol{n}$ 的单位向量为 $\boldsymbol{n}_0=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

又 $\overrightarrow{C_1E}=(0,0,-\sqrt{2})$，　　2

所以点 C_1 到平面 BED 的距离 $d=\left|\overrightarrow{C_1E}\cdot\boldsymbol{n}_0\right|=\left|-\frac{1}{2}\times0+\frac{1}{2}\times0+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times(-\sqrt{2})\right|=1$，　　3

即直线 AC_1 与平面 BED 的距离为1.

答案：D

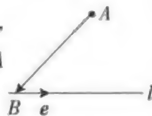
知识要点

1. 两点间的距离的求法

A，B 两点间的距离为 $|AB|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$.

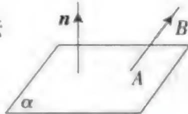
2. 点线距离的求法

如图，在直线 l 上任取一点 B，取直线 l 的一个方向向量 $\boldsymbol{e}$，则点 A 到 l 的距离为 $|\overrightarrow{AB}|\cdot\sin\langle\overrightarrow{AB},\boldsymbol{e}\rangle$.



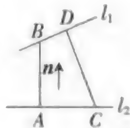
3. 点面距离的求法

如图，设 $\boldsymbol{n}$ 是平面 α 的一个法向量，AB 是平面 α 的一条斜线，则点 B 到平面 α 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$.



4. 两异面直线距离的求法

如图，设 l_1，l_2 是两条异面直线，$\boldsymbol{n}$ 是 l_1 与 l_2 公垂线段 AB 的方向向量，又 C，D 分别是 l_1，l_2 上的任意两点，则 l_1 与 l_2 的距离是 $d=|\overrightarrow{AB}|=\frac{|\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$.



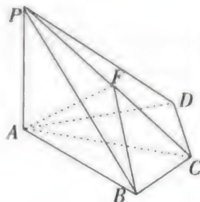
5. 两平行平面间距离的求法

把求两平行平面间的距离转化为求点面距离.

模板演练

➡ 答案详见 P445

1.（重庆高考节选）如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 底面 $ABCD$，$BC=CD=2$，$AC=4$，$\angle ACB=\angle ACD=\frac{\pi}{3}$，$F$ 为 PC 的中点，$AF\perp PB$. 求 PA 的长.





2. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，$PD\perp$ 平面 $ABCD$，且 $PD=1$，E,F 分别为 AB,BC 的中点.

(1)求点 D 到平面 PEF 的距离；

(2)求直线 AC 到平面 PEF 的距离.

模板 3　用向量法求空间角 【每年必考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(四川高考)如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M,N 分别是 CD,CC_1 的中点，则异面直线 A_1M 与 DN 所成角的大小是______.	本模板解决的是“在立体几何中，建立空间直角坐标系，通过向量坐标之间的计算，求线线、线面、面面所成的角或三角函数值”的问题.
解析：建立空间直角坐标系如图所示，设正方体的棱长为 1，则 $D(0,0,0)$，$A_1(1,0,1)$，$M\left(0,\frac{1}{2},0\right)$，$N\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，则 $\overrightarrow{A_1M}=\left(-1,\frac{1}{2},-1\right)$，$\overrightarrow{DN}=\left(0,1,\frac{1}{2}\right)$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{A_1M},\overrightarrow{DN}\rangle=\frac{\overrightarrow{A_1M}\cdot\overrightarrow{DN}}{\lvert\overrightarrow{A_1M}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{DN}\rvert}=0$，所以 $\overrightarrow{A_1M}\perp\overrightarrow{DN}$，故异面直线 A_1M 与 DN 所成角的大小为 $90°$. **答案：**$90°$	第一步　建立空间直角坐标系，求点 D,A_1,M,N 的坐标. 第二步　求向量 $\overrightarrow{A_1M},\overrightarrow{DN}$. 第三步　计算 $\cos\langle\overrightarrow{A_1M},\overrightarrow{DN}\rangle=0\Rightarrow A_1M$ 与 DN 所成角的大小为 $90°$.

模板攻略

1. 模板解决思路

求各种角的方法一般都是先确定两个向量(方向向量或者法向量)，求这两个向量夹角的余弦值或正弦值，注意确定所求夹角与向量夹角的关系，最后得到所求的角或角的三角函数值.

2. 模板解决步骤

1 第一步　建立空间直角坐标系，将题目中给出的条件用坐标表示出来.

2 第二步　将所求角涉及的直线的方向向量和平面法向量求出来.

3 第三步　代入公式求出角的三角函数值或角.

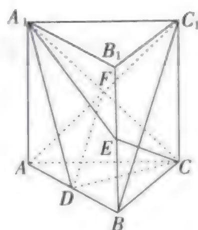
3. 典型例题

典例　(新课标全国高考)如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D,E 分别是 AB,BB_1 的中点，$AA_1=AC=$

挑水与挖井(三)　他心想：“我的朋友可能生病了，那个庙里就他一个人，生了病也没人照顾，怪可怜的. 我要过去看看他，看看能帮上什么忙.”说去就去，把看望的东西一拿，就爬上了左边这座山，去探望他的老朋友. 到了山上的庙里，看到他的老友，不禁为之大吃一惊，他不但没有生病，而且还在庙前打太极拳，生龙活虎的，一点也不像很久没喝水的人.



$CB=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$.



(1)证明：BC_1∥平面A_1CD；

(2)求二面角$D-A_1C-E$的正弦值.

解：(1)证明：连接AC_1交A_1C于点F，则F为AC_1中点. 又D是AB中点，连接DF，则BC_1∥DF.

因为$DF\subset$平面A_1CD，$BC_1\not\subset$平面A_1CD，

所以BC_1∥平面A_1CD.

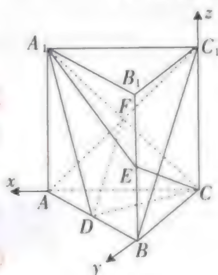
(2)由$AC=CB=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$，得$AC\perp BC$.

以C为坐标原点，$\overrightarrow{CA}$的方向为x轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系$C-xyz$.

设$CA=2$，则$D(1,1,0)$，$E(0,2,1)$，$A_1(2,0,2)$，　1

$\overrightarrow{CD}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{CE}=(0,2,1)$，$\overrightarrow{CA_1}=(2,0,2)$.

设$\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$是平面$A_1CD$的法向量，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA_1}=0,\end{cases}$



即$\begin{cases}x_1+y_1=0,\\ 2x_1+2z_1=0.\end{cases}$

可取$\boldsymbol{n}=(1,-1,-1)$.　2

同理，设$\boldsymbol{m}$是平面A_1CE的法向量，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CA_1}=0.\end{cases}$

可取$\boldsymbol{m}=(2,1,-2)$.　2

从而$\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

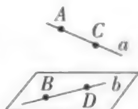
故$\sin\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\sqrt{6}}{3}$.　3

即二面角$D-A_1C-E$的正弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

知识要点

1. 求异面直线所成的角

已知a,b为两异面直线，A,C与B,D分别是a,b上的任意两点(如图)，异面直线a,b所成的角为θ，则



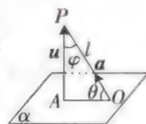
$$\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|}.$$

特别提示

两异面直线所成的角可以通过这两条直线的方向向量的夹角来求得，但二者不完全相等，当两方向向量的夹角是钝角时，应取其补角作为两异面直线所成的角.

2. 求直线和平面所成的角

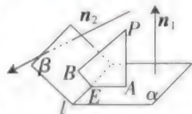
设直线l的方向向量为$\boldsymbol{a}$，平面α的法向量为$\boldsymbol{u}$，直线l与平面α所成的角为θ，$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{u}$的夹角为φ，则有



$$\sin\theta=|\cos\varphi|=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{u}|}.$$

3. 求平面和平面所成的角(二面角)

如图，若$PA\perp\alpha$于A，$PB\perp\beta$于B，平面PAB交l于E，则$\angle AEB$为二面角$\alpha-l-\beta$的平面角，$\angle AEB+\angle APB=180°$. 若$\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$分别为面$\alpha,\beta$的法向量，$\angle AEB=\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle$或$\pi-\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle$，即二面角$\theta$等于它的两个面的法向量的夹角（或夹角的补角）.



(1)当法向量$\boldsymbol{n}_1$与$\boldsymbol{n}_2$的方向分别指向二面角的内侧与外侧时，二面角θ等于法向量$\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$的夹角$\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle$，于是$\cos\theta=\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$.

(2)当法向量$\boldsymbol{n}_1$与$\boldsymbol{n}_2$的方向同时指向二面角的内侧或外侧时，二面角θ等于法向量$\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$的夹角的补角$\pi-\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle$，于是$\cos\theta=\cos(\pi-\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle)=-\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$.

凯尔微博



挑水与挖井(四)　他觉得非常好奇，便问到："我已经有一个多月没有见你下山挑水了，为什么你看起来好像精神很好的样子？难道你练的太极拳可以不用喝水吗？"左边这座山的和尚笑着对他说："来来来，我带你去看个东西."右边山上的和尚跟着他走到庙后的院子，左边山上的和尚指着一口井.

模板演练

➡ 答案详见 P446

1. (广东高考)如图1,在等腰直角三角形 ABC 中,$\angle A=90°$,$BC=6$,D,E 分别是 AC,AB 上的点,$CD=BE=\sqrt{2}$,O 为 BC 的中点. 将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起,得到如图2所示的四棱锥 $A'-BCDE$,其中 $A'O=\sqrt{3}$.
(1)证明:$A'O\perp$ 平面 $BCDE$;
(2)求二面角 $A'-CD-B$ 的平面角的余弦值.

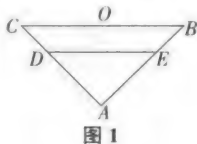


图 1

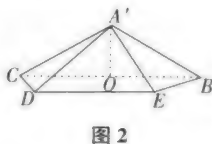
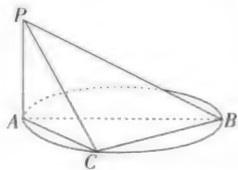
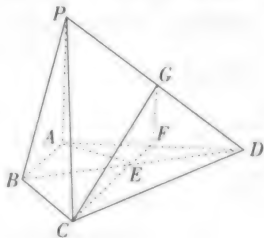


图 2

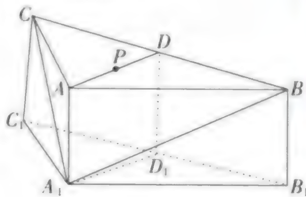
2. (辽宁高考)如图,AB 是圆的直径,PA 垂直圆所在的平面,C 是圆上的点.
(1)求证:平面 $PAC\perp$ 平面 PBC;
(2)若 $AB=2$,$AC=1$,$PA=1$,求二面角 $C-PB-A$ 的余弦值.



3. (江西高考)如图,四棱锥 $P-ABCD$ 中,$PA\perp$ 平面 $ABCD$,E 为 BD 的中点,G 为 PD 的中点,$\triangle DAB\cong\triangle DCB$,$EA=EB=AB=1$,$PA=\frac{3}{2}$,连接 CE 并延长交 AD 于 F.
(1)求证:$AD\perp$ 平面 CFG;
(2)求平面 BCP 与平面 DCP 的夹角的余弦值.



4. (四川高考)如图,在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,侧棱 $AA_1\perp$ 底面 ABC,$AB=AC=2AA_1$,$\angle BAC=120°$,D,D_1 分别是线段 BC,B_1C_1 的中点,P 是线段 AD 的中点.
(1)在平面 ABC 内,试作出过点 P 与平面 A_1BC 平行的直线 l,说明理由,并证明直线 $l\perp$ 平面 ADD_1A;
(2)设(1)中的直线 l 交 AB 于点 M,交 AC 于点 N,求二面角 $A-A_1M-N$ 的余弦值.



挑水与挖井(五) 他说:"这五年来,我每天做完功课后,都会抽空挖这口井,即使有时很忙,也是能挖多少算多少. 如今我终于可以喝到自己挖的泉水了,以后我也不必再下山挑水,可以有更多时间练我喜欢的太极拳."大道理:生存在这个世界上,一定要有未雨绸缪、居安思危的思想,这样才能够保证经常有"水"喝.



第一章　导数及其应用

模板 1　求函数在某点的导数 【5年32考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(湖南高考)曲线 $y=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}-\frac{1}{2}$ 在点 $M\left(\frac{\pi}{4},0\right)$ 处的切线的斜率为(　　). A. $-\frac{1}{2}$　B. $\frac{1}{2}$　C. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$	本模板解决的是"已知复合函数 $f(x)$,求其在点 $M(x_0,y_0)$ 的导数 $f'(x_0)$(或切线的斜率)"的问题.
解析: $\because y=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}-\frac{1}{2}$, $\therefore y'=\frac{\cos x(\sin x+\cos x)-\sin x(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}=\frac{1}{1+\sin 2x}$, 把 $x=\frac{\pi}{4}$ 代入得 $y'\|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$. **答案:** B	第一步　将已知函数写成函数的四则运算或复合形式. 第二步　利用导数公式及导数运算法则求出 y'. 第三步　将 $x=\frac{\pi}{4}$ 代入求出切线的斜率.

模板攻略

1. 模板解决思路

求函数在某点的导数的关键是求该函数的导函数,一般是利用基本初等函数的导数公式和导数运算法则来求导函数.此外复合函数的求导法则也是求函数导函数的一种途径. 求出导函数后再将已知点的横坐标代入即可.

2. 模板解决步骤

1 第一步　将 $f(x)$ 写成函数的四则运算或复合形式.

2 第二步　利用导数公式求出导函数.

3 第三步　将 x_0 代入求出 $f'(x_0)$.

3. 典型例题

典例 1　(新课标全国高考)曲线 $y=x(3\ln x+1)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 ________.

思路分析: 求切线方程只需求出切点和斜率即可,切点 $(1,1)$ 已知,斜率即导数值.

解析: 因为 $f'(x)=3\ln x+1+x\times\frac{3}{x}=3\ln x+4$,　1~2

所以该函数在点 $(1,1)$ 的切线斜率为 $k=4$,　3

所以切线方程为 $y-1=4(x-1)$,即 $y=4x-3$(或 $4x-y-3=0$).

答案: $y=4x-3$(或 $4x-y-3=0$)

典例 2　(广东高考)曲线 $y=x^3-x+3$ 在点 $(1,3)$ 处的切线方程为 ______.

解析: $\because y=x^3-x+3$,　1

$\therefore y'=3x^2-1$　2

$\therefore y$ 在点 $(1,3)$ 处的切线斜率 $k=3\times1^2-1=2$.　3

$\therefore$ 切线方程为 $y-3=2(x-1)$,即 $2x-y+1=0$.

答案: $2x-y+1=0$

凯尔微博



点灯(一)　在一个漆黑的夜晚,远行寻佛的苦行僧走到了一个荒僻的村落中,村民们在漆黑的街道中默默地行走着. 苦行僧转过一条巷道,他看见有一团昏黄的灯从巷道的深处静静地亮过来. 身旁的一位村民说:"瞎子过来了.""瞎子?"苦行僧愣了,他问身旁的一位村民:"那挑着灯笼的真是一位盲人吗?"

知识要点

1. 基本初等函数的导数公式

(1)若$f(x)=c$,则$f'(x)=0$.

(2)若$f(x)=x^{\alpha}(\alpha\in \mathbf{Q}^{*})$,则$=\alpha x^{\alpha-1}$.

(3)若$f(x)=\sin x$,则$f'(x)=\cos x$.

(4)若$f(x)=\cos x$,则$f'(x)=-\sin x$.

(5)若$f(x)=a^{x}$,则$f'(x)=a^{x}\ln a$.

(6)若$f(x)=e^{x}$,则$f'(x)=e^{x}$.

(7)若$f(x)=\log_{a}x$,则$f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$.

(8)若$f(x)=\ln x$,则$f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

2. 导数运算法则

(1)$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$.

(2)$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

(3)$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^{2}}(g(x)\neq 0)$.

补充说明

$[cf(x)]'=cf'(x)$(常数与函数的积的导数,等于常数乘函数的导数).

3. 复合函数的导数

(1)复合函数定义

一般地,对于两个函数$y=f(u)$和$u=g(x)$,如果通过变量u,y可以表示成x的函数,那么称这个函数为函数$y=f(u)$和$u=g(x)$的复合函数,记作$y=f(g(x))$.

(2)复合函数求导法则

复合函数$y=f(g(x))$的导数和函数$y=f(u)$,$u=g(x)$的导数间的关系为$y_x'=y_u'\cdot u_x'$,即y对x的导数等于y对u的导数与u对x的导数的乘积.

4. 切线方程的求法

曲线$y=f(x)$的切线有以下两种不同类型:

(1)点$P(x_0,y_0)$在函数$f(x)$的图象上,过该点的切线有两种情况:

①若点P是"切点",此时切线方程为$y=f'(x)(x-x_0)+y_0$;

②若点P不是"切点",此时需先设出切点,然后利用导数的几何意义求出切点坐标,最后求得切线方程.

(2)点$P(x_0,y_0)$不在函数$f(x)$的图象上,求过该点的曲线$y=f(x)$的切线,求法同上述(1)中的第二种情况.

补充说明

在求切线方程时,要注意"过某点的切线"与"在某点处的切线"是不一样的.

模板演练

➔ 答案详见P447

1. (全国高考)曲线$y=e^{-2x}+1$在点(0,2)处的切线与直线$y=0$和$y=x$围成的三角形的面积为(　　).

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{2}{3}$　　D. 1

2. (新课标全国高考)曲线$y=\dfrac{x}{x+2}$在点$(-1,-1)$处的切线方程为(　　).

A. $y=2x+1$　　B. $y=2x-1$

C. $y=-2x-3$　　D. $y=-2x-2$

3. 已知函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上满足$f(2-x)=2x^2-7x+6$,则曲线$y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程是(　　).

A. $y=2x-1$　　B. $y=x$

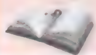
C. $y=3x-2$　　D. $y=-2x+3$

4. 已知函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上满足$f(x)=2f(2-x)-x^2+8x-8$,则曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程是(　　).

A. $y=2x-1$　　B. $y=x$

点灯(二)　他得到的答案是肯定的.苦行僧百思不得其解.一个双目失明的人,他根本就没有白天和黑夜的概念,他看不到高山流水,也看不到柳绿桃红的世界万物,他甚至不知道灯光是什么样子的,他挑一盏灯笼岂不令人可笑？那灯笼渐渐近了,昏黄的灯光渐渐地从深巷移游到了僧人的鞋上.

凯尔微博



C. $y=3x-2$　　　　D. $y=-2x+3$

5. (江西高考)设函数$f(x)$在$(0,+\infty)$内可导,且$f(e^x)=x+e^x$,则$f'(1)=$________.

6. (辽宁高考)已知P,Q为抛物线$x^2=2y$上两点,点P,Q的横坐标分别为4,-2,过P,Q分别作抛物线的切线,两切线交于点A,则点A的纵坐标为______.

模板2　已知切线方程求参数的值【5年35考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(全国高考)已知曲线$y=x^4+ax^2+1$在点$(-1,a+4)$处切线的斜率为8,则$a=$(　　). A. 9　B. 6　C. -9　D. -6	本模板解决的是"已知函数在某点处的切线方程或斜率,求函数中的参数"的问题.
解析:$\because y'=4x^3+2ax,\therefore y'\|_{x=-1}=-2a-4$. $\therefore -2a-4=8$. 解得$a=-6$. **答案:**D	第一步　先将曲线在$(-1,a+4)$的导数求出来. 第二步　根据斜率列关于参数的方程. 第三步　解参数方程,求得参数.

模板攻略

1. 模板解决思路

求参数值的关键在于列出关于参数的方程,因此应先根据已知条件,求得函数在已知点处的切线方程(或斜率),然后列出方程求解即可.

2. 模板解决步骤

1 第一步　根据基本函数的导数公式和导数运算法则求出函数在已知点处的导数值.

2 第二步　根据已知条件中的切线方程(或切线斜率)列出关于参数的方程.

3 第三步　解参数方程,求出参数的值.

3. 典型例题

典例1　(广东高考)若曲线$y=kx+\ln x$在点$(1,k)$处的切线平行于x轴,则$k=$________.

思路分析:曲线在点$(1,k)$处的切线平行于x轴,即曲线在该点处的切线斜率为0.

解析:$\because y'=k+\frac{1}{x},\therefore y'|_{x=1}=k+1$.　①

$\because$曲线在点$(1,k)$处的切线平行于x轴,

$\therefore k+1=0$.　②

$\therefore k=-1$.　③

答案:-1

典例2　(安徽高考节选)设定义在$(0,+\infty)$上的函数$f(x)=ax+\frac{1}{ax}+b(a>0)$.若曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y=\frac{3}{2}x$,求$a,b$的值.

解:$\because f'(x)=a-\frac{1}{ax^2},\therefore f'(1)=a-\frac{1}{a}$.　①

由题设知$a-\frac{1}{a}=\frac{3}{2}$.　②

解得$a=2$或$a=-\frac{1}{2}$(不合题意,舍去).　③

将 $a=2$ 代入 $f(1)=a+\frac{1}{a}+b=\frac{3}{2}$，解得 $b=-1$.

$\therefore a=2, b=-1$.

本题中要求 $a>0$，故在解关于 a 的方程时，注意根的取舍，不要误认为解出来的值都符合要求.

知识要点

导函数

(1)定义：称 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 为 $f(x)$ 的导函数(简称导数).

(2)几何意义：函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是在曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率. 相应地，切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$.

导数的几何意义是曲线在某一点处的切线的斜率，物理意义是运动物体在某一时刻的瞬时速度.

模板演练

➡ 答案详见 P448

1. (全国高考)若曲线 $y=x^2+ax+b$ 在点 $(0,b)$ 处的切线方程是 $x-y+1=0$，则(　　).

A. $a=1, b=1$　　B. $a=-1, b=1$

C. $a=1, b=-1$　　D. $a=-1, b=-1$

2. 曲线 $y=ax^3+bx-1$ 在点 $(1,f(x))$ 处的切线方程为 $y=x$，则 $b-a=$(　　).

A. -3　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 直线 $y=kx+1$ 与曲线 $y=x^3+ax+b$ 相切于点 $A(1,2)$，则 $a^b=$(　　).

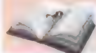
A. -8　　B. -6　　C. -1　　D. 5

4. (辽宁高考)设函数 $f(x)=x+ax^2+b\ln x$，曲线 $y=f(x)$ 过 $P(1,0)$，且在 P 点处的切线斜率为 2. 求 a,b 的值.

5. (北京高考)已知函数 $f(x)=ax^2+1(a>0)$，$g(x)=x^3+bx$. 若曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 在它们的交点 $(1,c)$ 处具有公共切线，求 a,b 的值.

点灯(四)　但那盲人却说："不，我是为了自己."“为你自己?”僧人又愣了. 盲者缓缓向僧人说："你是否因为夜色漆黑而被其他行人碰撞过?”僧人说："是的，刚才不留心还被两个人碰了一下."盲人听了，深沉地说："但我就没有. 虽说我什么也看不见，但我挑了这盏灯笼，既为别人照亮了路，也更让别人看到了我自己，这样，他们就不会因为看不见而碰撞我了."

凯尔微博



模板3　求函数的单调区间【5年49考】

模板探究

母题呈现	模板引入
（辽宁高考）函数 $y=\frac{1}{2}x^2-\ln x$ 的单调递减区间为(　　). A. $(-1,1]$　B. $(0,1]$　C. $[1,+\infty)$　D. $(0,+\infty)$	本模板解决的是"已知函数 $f(x)$，求其单调区间"的问题.
解析：$\because y=\frac{1}{2}x^2-\ln x(x>0)$，$\therefore y'=x-\frac{1}{x}(x>0)$，由 $y'\leqslant 0$，解得 $0<x\leqslant 1$，故选B. **答案**：B	第一步　求出函数的定义域. 第二步　求出该函数的导函数. 第三步　解不等式 $y'\leqslant 0$ 求出单调递减区间.

模板攻略

1. 模板解决思路

求函数的单调区间即为求使其导函数为正(或负)的 x 值的范围，先正确求出函数的导函数，然后再在函数的定义域内解导函数的不等式即可.

2. 模板解决步骤

1 第一步　根据所给函数的特点，确定函数的定义域.

2 第二步　利用导数运算法则求出函数的导数.

3 第三步　在函数定义域内，解不等式 $f'(x)>0$，得函数的单调递增区间；解不等式 $f'(x)<0$，得函数的单调递减区间.

3. 典型例题

典例1　（新课标全国高考节选）设函数 $f(x)=e^x-ax-2$.求 $f(x)$ 的单调区间.

思路分析：求 $f(x)$ 的单调区间即解不等式 $f'(x)>0$（或<0），此处注意参数 a 的正负的讨论.

解：$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，　1

$f'(x)=e^x-a$.　2

若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，若 $a>0$，则当 $x\in(-\infty,\ln a)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(\ln a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

所以当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,+\infty)$；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,\ln a)$，单调递增区间是 $(\ln a,+\infty)$.　3

典例2　（山东高考）已知函数 $f(x)=\frac{\ln x+k}{e^x}$（$e=2.718\ 28\cdots$ 是自然对数的底数，k 为常数），曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与 x 轴平行.

(1)求 k 的值；

(2)求 $f(x)$ 的单调区间.

解：(1)由 $f(x)=\frac{\ln x+k}{e^x}$，得 $x\in(0,+\infty)$.　1

$$f'(x)=\frac{(\ln x+k)'e^x-(\ln x+k)(e^x)'}{e^{2x}}=\frac{\frac{1}{x}-\ln x-k}{e^x}.$$

由曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与 x 轴平行可知 $f'(1)=\frac{\frac{1}{1}-\ln 1-k}{e}=0$，解得 $k=1$.



(2)$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-1-\ln x}{e^x}$, $x\in(0,+\infty)$.　2

令 $f'(x)=0$,可得 $x=1$.

当 $0<x<1$ 时,$\frac{1}{x}-1-\ln x>0$,$f'(x)>0$;

当 $x>1$ 时,$\frac{1}{x}-1-\ln x<0$,$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,1)$,

单调递减区间是 $(1,+\infty)$.　3

课后警示

本题的易错点在于:(1)函数 $f(x)$ 的正确求导;(2)求 $f(x)$ 的单调区间必须在定义域中求.

知识要点

函数单调性的判断

一般地,函数的单调性与其导函数的正负有如下关系:在某个区间 (a,b) 内,如果 $f'(x)>0$,那么函数 $y=f(x)$ 在这个区间内单调递增;如果 $f'(x)<0$,那么函数 $y=f(x)$ 在这个区间内单调递减.

特别提示

(1)如果在 (a,b) 内恒有 $f'(x)=0$,那么 $f(x)$ 在 (a,b) 内是常数.

(2)$f'(x)>0$ 是 $f(x)$ 在此区间上为增函数的充分而不必要条件.

模板演练

➡ 答案详见 P448

1. (广东高考)函数 $f(x)=(x-3)e^x$ 的单调递增区间是(　　).

A. $(-\infty,2)$　B. $(0,3)$　C. $(1,4)$　D. $(2,+\infty)$

2. (辽宁高考)函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$f(-1)=2$,对任意 $x\in\mathbf{R}$,$f'(x)>2$,则 $f(x)>2x+4$ 的解集为(　　).

A. $(-1,1)$　B. $(-1,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)$　D. $(-\infty,+\infty)$

3. (广东高考)设 $a>0$,讨论函数 $f(x)=\ln x+a(1-a)x^2-2(1-a)x$ 的单调性.

4. (天津高考)设 $a\in[-2,0]$,已知函数

$$f(x)=\begin{cases}x^3-(a+5)x, & x\leqslant 0,\\ x^3-\dfrac{a+3}{2}x^2+ax, & x>0.\end{cases}$$

(1)证明 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内单调递减,在区间 $(1,+\infty)$ 内单调递增;

(2)设曲线 $y=f(x)$ 在点 $P_i(x_i,f(x_i))$ $(i=1,2,3)$ 处的切线相互平行,且 $x_1x_2x_3\neq 0$.证明 $x_1+x_2+x_3>-\frac{1}{3}$.

想法决定我们的生活(一)　有位秀才第三次进京赶考,住在一个经常住的店里.考试前两天他做了两个梦,第一个梦是梦到自己在墙上种白菜;第二个梦是下雨天,他戴了斗笠还打伞.这两个梦似乎有些深意,秀才第二天就赶紧去找算命的解梦.算命的一听,连拍大腿说:"你还是回家吧.你想想,高墙上种菜不是白费劲吗?戴斗笠打雨伞不是多此一举吗?"

模板 4　求函数的极值 【每年必考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(陕西高考)设函数$f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$,则(　　). A. $x=\frac{1}{2}$为$f(x)$的极大值点　B. $x=\frac{1}{2}$为$f(x)$的极小值点 C. $x=2$为$f(x)$的极大值点　D. $x=2$为$f(x)$的极小值点	本模板解决的是"已知函数$f(x)$,求其极值点或极值"的问题.
解析:$\because f(x)=\frac{2}{x}+\ln x(x>0)$, $\therefore f'(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}$, 令$f'(x)=0$,则$x=2$. 当$0<x<2$时,$f'(x)<0$, 当$x>2$时,$f'(x)>0$, 所以$x=2$为$f(x)$极小值点,故选D. **答案**:D	第一步　求出导数$f'(x)$. 第二步　解方程$f'(x)=0$,求其根. 第三步　观察在方程$f'(x)=0$根的两侧$f'(x)$的符号,判断是否为极值点.

模板攻略

1. 模板解决思路

求函数的极值的重点在于解使导函数等于0的方程的根,再观察导函数的值在根的两侧是否变号,根据符号的变化特点判断函数值是否为极值.

2. 模板解决步骤

1 第一步　求出已知函数$f(x)$的导函数$f'(x)$.

2 第二步　解方程$f'(x)=0$,求出其解.

3 第三步　观察符号的变化情况,当$f'(x_0)=0$时:如果在x_0附近的左侧$f'(x)>0$,右侧$f'(x)<0$,那么$f(x_0)$是极大值,$x=x_0$是极大值点;在x_0附近的左侧$f'(x)<0$,右侧$f'(x)>0$,那么$f(x_0)$是极小值,$x=x_0$是极小值点.

3. 典型例题

典例 1　(陕西高考)设函数$f(x)=xe^x$,则(　　).

A. $x=1$为$f(x)$的极大值点

B. $x=1$为$f(x)$的极小值点

C. $x=-1$为$f(x)$的极大值点

D. $x=-1$为$f(x)$的极小值点

解析:$f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$.　1

令$f'(x)=0$,则$x=-1$.　2

当$x<-1$时,$f'(x)<0$,

当$x>-1$时,$f'(x)>0$,

所以$x=-1$为$f(x)$的极小值点.　3

答案:D

典例 2　(重庆高考)设$f(x)=a\ln x+\frac{1}{2x}+\frac{3}{2}x+1$,其中$a\in\mathbf{R}$,曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线垂直于$y$轴.

(1)求a的值;

(2)求函数$f(x)$的极值.

想法决定我们的生活(二)　秀才一听,心灰意冷,回店收拾包袱准备回家.店老板非常奇怪地问:"你不是明天才考试吗,今天怎么就回乡了?"秀才如此这般说了一番,店老板乐了:"哟,我也会解梦的.我倒觉得,你这次一定要留下来.你想想,墙上种菜不是高种吗?戴斗笠打伞不是说明你这次有备无患吗?"秀才一听,更有道理,于是精神振奋地参加考试,居然中了个探花.



解：(1)因为 $f(x)=a\ln x+\frac{1}{2x}+\frac{3}{2}x+1$，

所以 $f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{2}$.

由于曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线垂直于 y 轴，故该切线斜率为 0，即 $f'(1)=0$，

从而 $a-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=0$，解得 $a=-1$.

(2)由(1)知 $f(x)=-\ln x+\frac{1}{2x}+\frac{3}{2}x+1(x>0)$，

$f'(x)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{3}{2}=\frac{3x^2-2x-1}{2x^2}$，　1

$\therefore f'(x)=\frac{(3x+1)(x-1)}{2x^2}$.

令 $f'(x)=0$，

解得 $x_1=1,x_2=-\frac{1}{3}$ ($x_2=-\frac{1}{3}$ 不在定义域内，舍去)，　2

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$.

故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 $f(1)=3$.　3

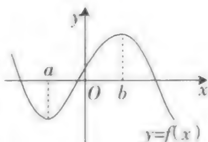
误区警示

不能单纯地认为 $f'(x)=0$ 的根 $x=x_0$ 就是 $f(x)$ 的极值点，必须还要看在 x_0 附近 $f'(x)$ 的符号有无变化.只有当 $f'(x)$ 在 $x=x_0$ 左右符号发生变化，$f(x_0)$才是极值，否则不是.

知识要点

极值的相关概念

(1)极小值点与极小值



如图，函数 $y=f(x)$ 在点 $x=a$ 的函数值 $f(a)$ 比它在点 $x=a$ 附近其他点的函数值都小，$f'(a)=0$；而且在点 $x=a$ 附近的左侧 $f'(x)<0$，右侧 $f'(x)>0$，则把点 a 叫作函数 $y=f(x)$ 的极小值点，$f(a)$叫作函数 $y=f(x)$ 的极小值.

(2)极大值点与极大值

如图，函数 $y=f(x)$ 在点 $x=b$ 的函数值 $f(b)$ 比它在点 $x=b$ 附近其他点的函数值都大，$f'(b)=0$；而且在点 $x=b$ 附近的左侧 $f'(x)>0$，右侧 $f'(x)<0$，则把点 b 叫作函数 $y=f(x)$ 的极大值点，$f(b)$叫作函数 $y=f(x)$ 的极大值.

极小值点、极大值点统称为极值点，极小值和极大值统称为极值.

特别提示

(1)函数的极大值不一定大于极小值.

(2)在给定的一个区间上，函数可能有若干个极值点，也可能不存在极值点.

(3)可导函数的极值点必须是导数为 0 的点，但导数为 0 的点不一定是极值点. 例如，函数 $y=x^3$ 在 $x=0$ 时，$y'|_{x=0}=0$，但不是极值点.

模板演练

答案详见 P450

1. (浙江高考)已知 e 为自然对数的底数，设函数 $f(x)=(e^x-1)(x-1)^k(k=1,2)$，则(　　).

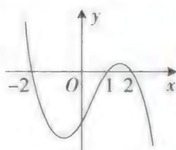
A. 当 $k=1$ 时，$f(x)$在 $x=1$ 处取到极小值

B. 当 $k=1$ 时，$f(x)$在 $x=1$ 处取到极大值

C. 当 $k=2$ 时，$f(x)$在 $x=1$ 处取到极小值

D. 当 $k=2$ 时，$f(x)$在 $x=1$ 处取到极大值

2. (重庆高考)设函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上可导，其导函数为 $f'(x)$，且函数 $y=(1-x)f'(x)$ 的图象如图所示，则下列结论中一定成立的是(　　).



A. 函数 $f(x)$有极大值 $f(2)$和极小值 $f(1)$



B. 函数$f(x)$有极大值$f(-2)$和极小值$f(1)$

C. 函数$f(x)$有极大值$f(2)$和极小值$f(-2)$

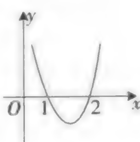
D. 函数$f(x)$有极大值$f(-2)$和极小值$f(2)$

3. 函数$y=\frac{x}{\ln x}$在区间$(1,+\infty)$上(　　).

A. 是减函数　　B. 是增函数

C. 有极小值　　D. 有极大值

4. 已知函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx$，其导函数$y=f'(x)$的图象经过点$(1,0)$，$(2,0)$，如图所示，则下列说法中所有不正确的序号是______.



①当$x=\frac{3}{2}$时，函数$f(x)$取得极小值；

②$f(x)$有两个极值点；

③当$x=2$时，函数$f(x)$取得极小值；

④当$x=1$时，函数$f(x)$取得极大值.

5. (福建高考)已知函数$f(x)=x-1+\frac{a}{e^x}$($a\in\mathbf{R}$，e为自然对数的底数).

(1)若曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线平行于x轴，求a的值；

(2)求函数$f(x)$的极值.

6. (江苏高考)若函数$y=f(x)$在$x=x_0$处取得极大值或极小值，则称x_0为函数$y=f(x)$的极值点.

已知a,b是实数，1和−1是函数$f(x)=x^3+ax^2+bx$的两个极值点.

(1)求a和b的值.

(2)设函数$g(x)$的导函数$g'(x)=f(x)+2$，求$g(x)$的极值点.

模板5　求函数的最值 [5年38考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(江苏高考)已知函数$f(x)=x^3-12x+8$在区间$[-3,3]$上的最大值与最小值分别为M,m，则$M-m$=______.	本模板解决的是"已知函数$f(x)$，求其最值"的问题.
解析：$f'(x)=3x^2-12$. 令$f'(x)=0$，解得$x_1=-2,x_2=2$. $\because f(-3)=17,f(3)=-1,f(-2)=24,f(2)=-8$， $\therefore M=24,m=-8$， $\therefore M-m=32$. 答案：32	第一步　求出使$f'(x)=0$的根x_1,x_2. 第二步　计算$f(x)$在x_1,x_2及区间端点处的函数值. 第三步　比较各函数值，最大的即为最大值，最小的即为最小值.

模板攻略

1. 模板解决思路

解决本模板的依据是在闭区间上,函数的最值一定在极值点或端点处取得,故可通过比较函数在极值点和端点处的函数值的大小求得最值,若在其他区间类型上,则可结合函数的单调性求解.

2. 模板解决步骤

1 第一步　求出导数$f'(x)$,令$f'(x)=0$,得x_0,x_1,…,x_n.

2 第二步　求出$f(x_0)$,$f(x_1)$,…,$f(x_n)$和定义域区间端点函数值$f(a)$,$f(b)$.

3 第三步　比较$f(x_0)$,$f(x_1)$,…,$f(x_n)$和$f(a)$,$f(b)$,最大的即为最大值,最小的即为最小值.

3. 典型例题

典例 1　(浙江高考)已知$a\in\mathbf{R}$,函数$f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$.

(1)若$a=1$,求曲线$y=f(x)$在点$(2,f(2))$处的切线方程;

(2)若$|a|>1$,求$f(x)$在闭区间$[0,2|a|]$上的最小值.

思路分析:(1)由导数的几何意义——切线斜率,求得切线方程;(2)求区间上的最值,首先求极值,再考虑极值是否在区间内,进行讨论求解.

解:(1)当$a=1$时,$f'(x)=6x^2-12x+6$,所以$f'(2)=6$.

又因为$f(2)=4$,所以切线方程为$y=6x-8$.

(2)记$g(a)$为$f(x)$在闭区间$[0,2|a|]$上的最小值.

$f'(x)=6x^2-6(a+1)x+6a=6(x-1)(x-a)$.

令$f'(x)=0$,得到$x_1=1$,$x_2=a$.　1

$f(0)=0$,$f(1)=3a-1$,$f(a)=a^2(3-a)$,

$f(2|a|)=16a^2|a|-12a^3-12a^2+12a|a|$,　2

当$a>1$时,$f(2|a|)>f(0)$,$f(1)>f(0)$,

比较$f(0)=0$和$f(a)=a^2(3-a)$的大小可得

$$g(a)=\begin{cases}0,1<a\leqslant 3,\\ a^2(3-a),a>3.\end{cases}$$

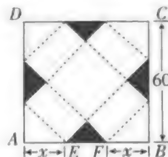
当$a<-1$时,$f(2|a|)>f(0)>f(1)$,

所以$g(a)=3a-1$.　3

综上所述,$f(x)$在闭区间$[0,2|a|]$上的最小值为

$$g(a)=\begin{cases}3a-1,a<-1,\\ 0,1<a\leqslant 3,\\ a^2(3-a),a>3.\end{cases}$$

典例 2　(江苏高考)请你设计一个包装盒.如图,$ABCD$是边长为60cm的正方形硬纸片,切去阴影部分所示的四个全等的等腰直角三角形,再沿虚线折起,使得A,B,C,D四个点重合于图中的点P,正好形成一个正四棱柱形状的包装盒.E,F在AB上,是被切去的一个等腰直角三角形斜边的两个端点.设$AE=FB=x$(cm).





(1)若广告商要求包装盒的侧面积$S(\mathrm{cm}^2)$最大,试问x应取何值?

(2)某厂商要求包装盒的容积$V(\mathrm{cm}^3)$最大,试问x应取何值?并求出此时包装盒的高与底面边长的比值.

思路分析:(1)S是关于x的二次函数,求最值可以求导也可以配方.(2)V是x的三次函数,求最值应采用求导法.

解:设包装盒的高为h(cm),底面边长为a(cm).由已知得$a=\sqrt{2}x$,$h=\dfrac{60-2x}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(30-x)$,$0<x<30$.

(1)$S=4ah=8x(30-x)=-8(x-15)^2+1\,800$,

所以当$x=15$时,S取得最大值.

(2)$V=a^2h=2\sqrt{2}(-x^3+30x^2)$,$V'=6\sqrt{2}x(20-x)$.

由$V'=0$,得$x=0$(舍去)或$x=20$.　1

当$x\in(0,20)$时,$V'>0$;

当$x\in(20,30)$时,$V'<0$.

所以当$x=20$时,V取得极大值,也是最大值.　2~3

此时$\dfrac{h}{a}=\dfrac{1}{2}$,即包装盒的高与底面边长的比值为$\dfrac{1}{2}$.

选修2-2

学会审视自己　一只鸽子老是不断地搬家.它觉得,每次新窝住了没多久,就有一种浓烈的怪味,让它喘不上气来,不得已只好一直搬家.鸽子觉得很困扰,就跟一只经验丰富的老鸽子诉苦.老鸽子说:"你搬了这么多次家根本没有用啊,因为那种让你困扰的怪味并不是从窝里面发出来的,而是你自己身上的味道啊."



知识要点

1. 函数的最大(小)值与导数

如果在区间$[a,b]$上函数$y=f(x)$的图象是一条连续不断的曲线,则该函数在$[a,b]$上一定能够取得最大值和最小值. 并且函数的最值必在极值点或端点处取得.

特别提示

(1)若函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上单调递增,则$f(a)$为函数的最小值,$f(b)$为函数的最大值;若函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上单调递减,则$f(a)$为函数的最大值,$f(b)$为函数的最小值.

(2)图象连续不断的函数在开区间(a,b)上不一定有最大(小)值.如果图象连续不断的函数在开区间(a,b)内只有一个极值,则该极值就是最值.

(3)函数的极值不一定是最值. 求函数的最值与函数的极值不同的是:在求可导函数的最值时,不需要对各导数为0的点讨论其是极大值还是极小值,只需将导数为0的点的函数值和端点的函数值进行比较.

2. 解决生活中的优化问题应当注意的问题

(1)在求实际问题的最大(小)值时,一定要考虑实际问题的意义,不符合实际意义的值应舍去.

(2)在实际问题中,有时会遇到函数在区间内只有一个点使$f'(x)=0$的情形. 如果函数在这点有极大(小)值,那么不与端点比较,也可以知道这就是最大(小)值.

(3)在解决实际优化问题时,不仅要注意将问题中涉及的变量关系用函数关系表示,还应确定出函数关系式中自变量的定义区间.

模板演练

➡ 答案详见 P450

1. $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$ 在$[-1,1]$上的最小值为(　　).

A. 0　　B. −2　　C. −1　　D. $\frac{13}{12}$

2. 函数$y=x+2\cos x$在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值是______.

3. 已知函数$f(x)=x\ln x(x>0)$.求函数$f(x)$的最小值.

4. (重庆高考)已知函数$f(x)=ax^3+bx+c$在点$x=2$处取得极值$c-16$.

(1)求a,b的值;

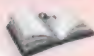
(2)若$f(x)$有极大值28,求$f(x)$在$[-3,3]$的最小值.

5. (江西高考)已知函数$f(x)=(ax^2+bx+c)e^x$在$[0,1]$上单调递减且满足$f(0)=1,f(1)=0$.

(1)求a的取值范围;

(2)设$g(x)=f(x)-f'(x)$,求$g(x)$在$[0,1]$上的最大值和最小值.

凯尔微博



体味人生　应对生活微笑,即使是勉强的.

没有得到的不一定是美好的,正拥有的才最该珍惜.

你要赢得你的人生,就不能患得患失,是不是能赢,尽管去赌,要有无悔的生命,先得有无悔的努力.

模板 6　求参数的值或取值范围 [5年50考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(辽宁高考)已知函数 $f(x)=e^x-2x+a$ 有零点,则 a 的取值范围是 ______.	本模板解决的是“已知含参数的函数 $f(x)$ 满足条件 p(单调性、极值、最值或不等式相关条件),求参数的值或取值范围”的问题.
解析:$f'(x)=e^x-2$. 由 $f'(x)>0$,得 $e^x-2>0$,$\therefore x>\ln 2$. 由 $f'(x)<0$,得 $x<\ln 2$, $\therefore f(x)$ 在 $x=\ln 2$ 处取得最小值. 要使函数 $f(x)=e^x-2x+a$ 有零点,只要 $f(x)_{\min}\leqslant 0$ 即可. $\therefore e^{\ln 2}-2\ln 2+a\leqslant 0$,$\therefore a\leqslant 2\ln 2-2$. $\therefore a$ 的取值范围是 $(-\infty,2\ln 2-2]$. **答案**:$(-\infty,2\ln 2-2]$	第一步　求出导函数 $f'(x)$. 第二步　将已知条件转化为关于 $f(x)$ 的条件 $f(x)_{\min}\leqslant 0$. 第三步　列出关于参数的不等式. 第四步　解不等式,得出 a 的范围.

模板攻略

1. 模板解决思路

求参数的值或取值范围的关键是将已知条件转化为函数或其导函数应满足哪种要求,进而得到关于参数的方程(组)或不等式(组).

2. 模板解决步骤

1 第一步　求出 $f'(x)$.

2 第二步　将条件 p 转化为关于 $f'(x)$ 或 $f(x)$ 的条件 Q.

3 第三步　利用条件 Q,得到关于参数的方程(组)或不等式(组).

4 第四步　解方程(组)或不等式(组),得参数的值或取值范围.

3. 典型例题

典例 1　(全国高考)已知函数 $y=x^3-3x+c$ 的图象与 x 轴恰有两个公共点,则 $c=$(　　).

A. -2 或 2　　B. -9 或 3

C. -1 或 1　　D. -3 或 1

解析:$\because y'=3x^2-3$,　1

$\therefore$ 当 $y'=0$ 时,$x=\pm 1$.

则 x,y',y 的变化情况如下表:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	0	−	0	+
y	单调递增	$c+2$	单调递减	$c-2$	单调递增

因此,当函数图象与 x 轴恰有两个公共点时,必有 $c+2=0$ 或 $c-2=0$,　2～3

$\therefore c=-2$ 或 $c=2$.　4

答案:A

典例 2　(安徽高考)设 $f(x)=\dfrac{e^x}{1+ax^2}$,其中 a 为正实数.

(1)当 $a=\dfrac{4}{3}$ 时,求 $f(x)$ 的极值点;

(2)若 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的单调函数,求 a 的取值范围.

体味人生　人的感情色彩里,还是带些悲愤的好,人没有压力,就会忘乎所以,得意忘形.

宠辱不惊,看庭前花开花落;去留无意,望天上云卷云舒.

初涉世者的最佳性格是理智,因为理智是自我设计的最好门锁;初涉世者的最佳品质是自控,因为自控是自我塑造的最好监督官.

凯尔微博



思路分析：求导后发现$f'(x)=e^x\frac{1+ax^2-2ax}{(1+ax^2)^2}$，其中$\frac{e^x}{(1+ax^2)^2}$是恒大于0的，因此$f'(x)$的正负取决于$1+ax^2-2ax$.

解：$f'(x)=e^x\frac{1+ax^2-2ax}{(1+ax^2)^2}$. ①

(1)当$a=\frac{4}{3}$时，

令$f'(x)=0$，则$4x^2-8x+3=0$，

解得$x_1=\frac{3}{2}$，$x_2=\frac{1}{2}$，

列表得

x	$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

所以$x_1=\frac{3}{2}$是极小值点，$x_2=\frac{1}{2}$是极大值点.

(2)若$f(x)$为$\mathbf{R}$上的单调函数，则$f'(x)$在$\mathbf{R}$上不变号，结合$f'(x)=e^x\frac{1+ax^2-2ax}{(1+ax^2)^2}$与条件$a>0$，知$ax^2-2ax+1\geqslant 0$在$\mathbf{R}$上恒成立， ②

因此$\Delta=4a^2-4a=4a(a-1)\leqslant 0$， ③

由此并结合$a>0$，知$0<a\leqslant 1$. ④

知识要点

对于函数的极值、最值和恒成立问题，应注意以下几点：

(1)正确区分最值与极值，函数的极值表示函数在一点附近的情况，是在局部对函数值比较大小.而最值是整个区间上对函数值比较大小.函数的极值可以有多个，但最值只能有一个，极值只能在区间内取得，而最值还可以在端点处取得，最值只要不在端点处，必是一个极值.

(2)开区间连续函数不一定有最大值与最小值.如函数$f(x)=x^2$在$(1,2)$内连续，但没有最大值，也没有最小值.

(3)不要将$f(x)\geqslant 0$在$\mathbf{R}$上恒成立与$f(x)$值域为$[0,+\infty)$混为一谈.

特别提示

对于参数求解问题注意题目中的恒成立和存在性的区别，恒成立是对一切定义域内的函数值都满足，而存在性是指存在满足的即可.

模板演练

➡ 答案详见 P451

1. (北京高考)已知函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2+bx+c$在$x=x_1$处取得极大值，在$x=x_2$处取得极小值，满足$x_1\in(-1,0)$，$x_2\in(0,1)$. 则$\frac{a+2b+4}{a+2}$的取值范围是(　　).

A. $(0,2)$　B. $(1,3)$　C. $[0,3]$　D. $[1,3]$

2. 已知$f(x)=m(x-2m)(x+m+3)$，$g(x)=2^x-2$. 若$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)<0$或$g(x)<0$，则m的取值范围是______.

3. (江西高考)设$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2ax$.

(1)若$f(x)$在$\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$上存在单调递增区间，求$a$的取值范围；

(2)若当$0<a<2$时，$f(x)$在$[1,4]$上的最小值为$-\frac{16}{3}$，求$f(x)$在该区间上的最大值.

4.（北京高考）已知函数 $f(x)=(x-k)^2e^{\frac{x}{k}}$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）若对于任意的 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f(x)\leqslant\frac{1}{e}$，求 k 的取值范围.

5.（辽宁高考）已知函数 $f(x)=(1+x)e^{-2x}$，$g(x)=ax+\frac{x^3}{2}+1+2x\cos x$. 当 $x\in[0,1]$ 时，

（1）求证：$1-x\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{1+x}$；

（2）若 $f(x)\geqslant g(x)$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

模板 7　定积分求值【5年12考】

模板探究

母题呈现	模板引入
（江西高考）计算定积分 $\int_{-1}^{1}(x^2+\sin x)dx=$________.	本模板解决的是"给定被积函数，求其定积分"的问题.
解析：$\because\left(\frac{1}{3}x^3-\cos x\right)'=x^2+\sin x$， $\therefore\int_{-1}^{1}(x^2+\sin x)dx=\frac{1}{3}x^3-\cos x\mid_{-1}^{1}$ $=\frac{1}{3}-\cos1-\left(-\frac{1}{3}-\cos1\right)=\frac{2}{3}$. **答案**：$\frac{2}{3}$	第一步　求出函数的一个原函数 $\frac{1}{3}x^3-\cos x$. 第二步　将定积分转化为其原函数求值形式. 第三步　代入求值.

模板攻略

1. 模板解决思路

利用微积分基本定理求定积分，其关键是求出被积函数的原函数，求一个函数的原函数与求一个函数的导数是互逆运算，可利用此结论检验被积函数的原函数的正确性. 若被积函数能够化简，且化简后更便于求原函数，可先化简，再求积分.

2. 模板解决步骤

1 第一步　求出被积函数的原函数.

2 第二步　利用微积分基本定理将定积分转化为其原函数求值.

3 第三步　代入积分上下限，求值.

3. 典型例题

典例 1　（江西高考）若 $S_1=\int_1^2 x^2dx$，$S_2=\int_1^2\frac{1}{x}dx$，$S_3=\int_1^2 e^xdx$，则 S_1,S_2,S_3 的大小关系为（　　）.

A. $S_1<S_2<S_3$　　　　B. $S_2<S_1<S_3$

体味人生　人的一生应为自己而活，应该学着喜欢自己，应该不要太在意别人怎么看，或别人怎么想.

知人者智，自知者明；胜人者力，自胜者强.

赢要赢得痛快，输要输得潇洒.



C. $S_2<S_3<S_1$　　D. $S_3<S_2<S_1$

解析：$\because\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2,(\ln x)'=\frac{1}{x},(e^x)'=e^x$,　1

$\therefore S_1=\frac{1}{3}x^3|_1^2=\frac{7}{3},S_2=\ln x|_1^2=\ln 2,S_3=e^x|_1^2=e^2-e$.　2～3

$\because \ln 2<1<\frac{7}{3},e^2-e=e(e-1)>e>\frac{7}{3}$，故 $S_2<S_1<S_3$，选 B.

答案：B

典例 2 （湖南高考）若 $\int_0^T x^2dx=9$，则常数 T 的值为______.

解析：$\because\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2$,　1

$\therefore \int_0^T x^2dx=\frac{1}{3}x^3|_0^T=\frac{1}{3}T^3=9$.　2～3

$\therefore T^3=27$,

$\therefore T=3$.

答案：3

误区警示

求出被积函数的原函数时，可通过对原函数求导验证其准确性，以避免出错.

知识要点

1. 定积分的运算性质

(1) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$（$k$ 为常数）.

(2) $\int_a^b [f_1(x)\pm f_2(x)]dx=\int_a^b f_1(x)dx\pm\int_a^b f_2(x)dx$.

(3) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$（其中 $a<c<b$）.

2. 求定积分的方法

(1)利用定义求定积分（定义法），可操作性不强.

(2)利用微积分基本定理求定积分，即 $\int_a^b f(x)dx=F(x)|_a^b=F(b)-F(a)$，其中被积函数 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x)$，即 $F'(x)=f(x)$.

(3)利用定积分的几何意义求定积分

当曲边梯形面积易求时，可通过求曲边梯形的面积求定积分.例如，定积分 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ 的几何意义是求单位圆面积的 $\frac{1}{4}$，所以 $\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}$.

模板演练

➡ 答案详见 P453

1. （湖南高考）$\int_2^4\frac{1}{x}dx$ 等于（　　）.

A. $-2\ln 2$　B. $2\ln 2$　C. $-\ln 2$　D. $\ln 2$

2. （福建高考）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)dx$ 等于（　　）.

A. π　B. 2　C. $\pi-2$　D. $\pi+2$

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2,x\in[0,1],\\2-x,x\in[1,2],\end{cases}$ 则 $\int_0^2 f(x)dx=$（　　）.

A. $\frac{3}{4}$　B. $\frac{4}{5}$　C. $\frac{5}{6}$　D. 不存在

4. 若 $f(x)=\begin{cases}f(x-4),x>1,\\e^x+\int_1^2\frac{1}{t}dt,x\leqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(2\,013)$ 等于（　　）.

A. 0　B. $\ln 2$　C. $1+e^2$　D. $e+\ln 2$

5. （陕西高考）设 $f(x)=\begin{cases}\lg x,x>0,\\x+\int_0^a 3t^2dt,x\leqslant 0,\end{cases}$ 若 $f[f(1)]=1$，则 $a=$______.

6. 已知函数 $f(x)=3x^2+2x+1$，若 $\int_{-1}^1 f(x)dx=2f(a)$（$a>0$）成立，则 $a=$______.



模板 8　求曲边图形的面积【5年8考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(北京高考)直线 l 过抛物线 $C:x^2=4y$ 的焦点且与 y 轴垂直,则 l 与 C 所围成的图形的面积等于(　　). A. $\frac{3}{4}$　B. 2　C. $\frac{8}{3}$　D. $\frac{16\sqrt{2}}{3}$	本模板解决的是“已知坐标系中的曲线围成的区域,求其面积”的问题.
解析:直线 l 的方程为 $y=1$,直线 l 与抛物线 $x^2=4y$ 交于 $(-2,1)$,$(2,1)$ 两点,所以 l 与 C 围成图形的面积为 $S=2\times\left(2\times1-\int_0^2\frac{x^2}{4}dx\right)=\frac{8}{3}$. **答案:**C	第一步　画出图形,求出曲线的交点坐标. 第二步　写出图形面积的定积分表达式. 第三步　计算积分,求出图形的面积.

模板攻略

1. 模板解决思路

求曲边图形面积的关键是确定积分的上、下限,并判断出被积函数的上、下位置,若被积函数在 x 轴下方,则需在函数前加负号.

2. 模板解决步骤

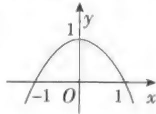
1 第一步　画出图形,确定图形的范围,通过解方程组求出交点的横坐标,定出积分的上、下限.特别要注意分清被积函数的上、下位置.

2 第二步　写出平面图形面积的定积分的表达式.

3 第三步　运用微积分基本定理计算定积分,求出平面图形的面积.

3. 典型例题

典例 1　(湖北高考)已知二次函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示,则它与 x 轴所围图形的面积为(　　).



A. $\frac{2\pi}{5}$　　B. $\frac{4}{3}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

解析:由题意知二次函数 $f(x)=-x^2+1$,所围区域为从 -1 到 1.　1

它与 x 轴所围图形的面积为

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=2\int_0^1 f(x)dx=2\int_0^1(-x^2+1)dx$　2

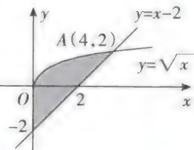
$=2\left(-\frac{1}{3}x^3+x\right)\Big|_0^1=2\times\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{4}{3}$.　3

答案:B

典例 2　(新课标全国高考)由曲线 $y=\sqrt{x}$,直线 $y=x-2$ 及 y 轴所围成的图形的面积为(　　).

A. $\frac{10}{3}$　　B. 4　　C. $\frac{16}{3}$　　D. 6

解析:如图阴影部分面积即为所求,求得曲线 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $y=x-2$ 的交点为 $A(4,2)$,　1



选修2-2

体味人生　与其说是别人让你痛苦,不如说自己的修养不够.
如果你不给自己烦恼,别人也永远不可能给你烦恼.因为你自己的内心,你放不下.
好好的管教你自己,不要管别人.



$\therefore$ 面积 $S_{阴}=\int_0^4(\sqrt{x}-x+2)\mathrm{d}x$ ②

$=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2+2x\right)\Big|_0^4=\frac{16}{3}$. ③

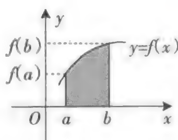
答案:C

列被积函数时,要注意所要求的曲边图形是位于 x 轴上方还是下方,不能仅仅只把所给函数相加来求积分,对于位于 x 轴下方的区域,要特别注意相应函数的变号.

知识要点

1. 定积分的几何意义

从几何上看,如果在区间 $[a,b]$ 上函数 $f(x)$ 连续且恒有 $f(x)\geqslant 0$,那么定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由直线 $x=a,x=b,y=0$ 和曲线 $y=f(x)$ 所围成的曲边梯形(图中的阴影部分)的面积. 这就是定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的几何意义.



2. 利用定积分求曲边多边形的面积

在直角坐标系中,由曲线 $f(x)$,直线 $x=a,x=b$ $(a<b)$ 和 x 轴围成的曲边梯形的面积的求法分为以下几种情况:

(1)当 $y=f(x)(f(x)\geqslant 0,x\in[a,b])$ 时,面积为

$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$;

(2)当 $y=f(x)(f(x)\leqslant 0,x\in[a,b])$ 时,面积为

$S=\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|=-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$;

(3)如果在 $[a,b]$ 上,$f(x)$ 有正有负,即曲线在 x 轴上下方都有图象,如函数 $f(x)$ 的图象在 (a,c) 上位于 x 轴上方,在 (c,b) 上位于 x 轴下方,则面积为

$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b |f(x)|\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x-\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$;

(4)由曲线 $y=f(x),y=g(x)(f(x)\geqslant g(x))$ 与直线 $x=a,x=b(a<b)$ 围成的图形的面积为

$S=\int_a^b [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

模板演练

答案详见 P453

1. (湖北高考)一辆汽车在高速公路上行驶,由于遇到紧急情况而刹车,以速度 $v(t)=7-3t+\frac{25}{1+t}$(t 的单位:s,v 的单位:m/s)行驶至停止,在此期间汽车继续行驶的距离(单位:m)是(　　).

A. $1+25\ln 5$　　B. $8+25\ln\frac{11}{3}$

C. $4+25\ln 5$　　D. $4+50\ln 2$

2. (湖南高考)由直线 $x=-\frac{\pi}{3}$,$x=\frac{\pi}{3}$,$y=0$ 与曲线 $y=\cos x$ 所围成的封闭图形的面积为(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\sqrt{3}$

3. (山东高考)由曲线 $y=x^2$,$y=x^3$ 围成的封闭图形的面积为(　　).

A. $\frac{1}{12}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{7}{12}$

4. 直线 $y=x$ 与抛物线 $y=x(x+2)$ 所围成的封闭图形的面积等于(　　).

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{5}{6}$

5. (山东高考)设 $a>0$,若曲线 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $x=a$,$y=0$ 所围成封闭图形的面积为 a^2,则 $a=$________.

6. (上海高考)已知函数 $y=f(x)$ 的图象是折线段 ABC,其中 $A(0,0)$,$B\left(\frac{1}{2},5\right)$,$C(1,0)$.函数 $y=xf(x)(0\leqslant x\leqslant 1)$ 的图象与 x 轴围成的图形的面积为________.

第二章 推理与证明

模板1 寻找规律问题 【5年24考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(陕西高考)观察下列不等式 $1+\frac{1}{2^2}<\frac{3}{2}$, $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}<\frac{5}{3}$, $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}<\frac{7}{4}$, …… 照此规律,第五个不等式为__________.	本模板解决的是"已知一组数(不等式、图形等)的前几个,照此规律,求第若干个"的问题.
解析:观察得出规律,左边为项数个连续自然数平方的倒数和,右边为项数的2倍与1的差除以项数, 即 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{2n+1}{n+1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, 且第n个式子的项数为$n+1$. 所以第五个不等式为 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}<\frac{11}{6}$. **答案**:$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}<\frac{11}{6}$	第一步 观察不等式左、右两边的变化问题,找出其内在联系. 第二步 根据已知的前几个总结规律,写成一般形式. 第三步 由一般形式,写出所求的结果.

模板攻略

1. 模板解决思路

解决此模板问题的关键是观察已知的条件,找出其相似(相同)的地方,找出规律,推理出其一般形式,再按要求写出答案.

2. 模板解决步骤

①第一步 找出数(不等式、图形等)的变化部分,将此转化为数学问题.

②第二步 根据已知的前几个总结出规律,写出一般形式,并检验.

③第三步 根据规律,计算出第若干个应为什么.

3. 典型例题

典例1 (江西高考)观察下列各式:$a+b=1$, $a^2+b^2=3$, $a^3+b^3=4$, $a^4+b^4=7$, $a^5+b^5=11$, …, 则 $a^{10}+b^{10}=$( ).

A. 28 B. 76 C. 123 D. 199

解析:观察规律,等式右端的值,从第三项开始,后一个式子的右端值等于它前面两个式子右端值的和. ①

所以式子右端的值依次为1,3,4,7,11,18,29,47,76,123… ②

所以 $a^{10}+b^{10}=123$. ③

答案:C

典例2 (陕西高考)观察下列等式

$(1+1)=2\times1$

$(2+1)(2+2)=2^2\times1\times3$

$(3+1)(3+2)(3+3)=2^3\times1\times3\times5$



……

照此规律，第 n 个等式可为 ________.

解析：等式左边的 n 项的积，最小项和最大项依次为 $(n+1)$，$(n+n)$，右边为连续奇数之积乘以 2^n. ①

则第 n 个等式为 $(n+1)(n+2)\cdots(n+n)=2^n\times1\times3\times\cdots\times(2n-1)$. ②~③

答案：$(n+1)(n+2)\cdots(n+n)=2^n\times1\times3\times\cdots\times(2n-1)$

知识要点

1. 归纳推理

由某类事物的部分对象具有某些特征，推出该类事物的全部对象都具有这些特征的推理，或者由个别事实概括出一般结论的推理，称为归纳推理（简称归纳）. 简言之，归纳推理是由部分到整体、由个别到一般的推理.

2. 类比推理

由两类对象具有某些类似特征和其中一类对象的某些已知特征，推出另一类对象也具有这些特征的推理称为类比推理（简称类比）. 简言之，类比推理是由特殊到特殊的推理.

3. 合情推理

归纳推理和类比推理都是根据已有的事实，经过观察、分析、比较、联想，再进行归纳、类比，然后提出猜想的推理，把它们统称为合情推理.

4. 演绎推理

从一般性的原理出发，推出某个特殊情况下的结论，把这种推理称为演绎推理. 简言之，演绎推理是由一般到特殊的推理.

5. 三段论

“三段论”是演绎推理的一般模式，包括：

（1）大前提——已知的一般原理；

（2）小前提——所研究的特殊情况；

（3）结论——根据一般原理，对特殊情况做出的判断.

“三段论”可以表示为

大前提：M 是 P.

小前提：S 是 M.

结论：S 是 P.

模板演练

➡ 答案详见 P454

1.（江西高考）观察下列事实：$|x|+|y|=1$ 的不同整数解 (x,y) 的个数为4，$|x|+|y|=2$ 的不同整数解 (x,y) 的个数为8，$|x|+|y|=3$ 的不同整数解 (x,y) 的个数为12，…，则 $|x|+|y|=20$ 的不同整数解 (x,y) 的个数为（　　）.

A. 76　　B. 80　　C. 86　　D. 92

2. 观察下列各式：$5^5=3\ 125$，$5^6=15\ 625$，$5^7=78\ 125$，…，则 $5^{2\,014}$ 的末四位数字为（　　）.

A. 3125　　B. 5625　　C. 0625　　D. 8125

3.（陕西高考）观察下列等式

$1^2=1$

$1^2-2^2=-3$

$1^2-2^2+3^2=6$

$1^2-2^2+3^2-4^2=-10$

……

照此规律，第 n 个等式可为 ________.

4.（陕西高考）观察下列等式

$1=1$

$2+3+4=9$

$3+4+5+6+7=25$

$4+5+6+7+8+9+10=49$

……

照此规律，第 n 个等式为 ____________.

凯尔微博



体味人生　当你知道迷惑时，并不可怜，当你不知道迷惑时，才是最可怜的.
狂妄的人有救，自卑的人没有救.
你不要一直不满人家，你应该一直检讨自己才对. 不满人家，是苦了你自己.

5.（福建高考）观察下列等式：

①$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1$；

②$\cos4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$；

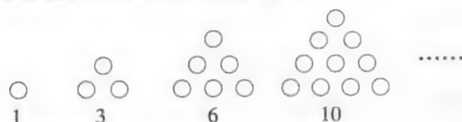
③$\cos6\alpha=32\cos^6\alpha-48\cos^4\alpha+18\cos^2\alpha-1$；

④$\cos8\alpha=128\cos^8\alpha-256\cos^6\alpha+160\cos^4\alpha-32\cos^2\alpha+1$；

⑤$\cos10\alpha=m\cos^{10}\alpha-1\,280\cos^8\alpha+1\,120\cos^6\alpha+n\cos^4\alpha+p\cos^2\alpha-1$.

可以推测，$m-n+p=$________.

6.（湖北高考）传说古希腊毕达哥拉斯学派的数学家经常在沙滩上画点或用小石子表示数．他们研究过如图所示的三角形数：



将三角形数1，3，6，10，…记为数列$\{a_n\}$，将可被5整除的三角形数按从小到大的顺序组成一个新数列$\{b_n\}$，可以推测：

（1）$b_{2\,012}$是数列$\{a_n\}$中第________项；

（2）$b_{2k-1}=$________．（用k表示）

模板2　用反证法证明命题【5年10考】

模板探究

母　题　呈　现	模　板　引　入
（安徽高考节选）设直线$l_1:y=k_1x+1$，$l_2:y=k_2x-1$，其中实数k_1,k_2满足$k_1k_2+2=0$. 证明l_1与l_2相交.	本模板解决的是“利用反证法证明用直接证明较困难或不容易下手的命题”的问题.
证明：假设l_1与l_2不相交，则l_1与l_2平行，即$k_1=k_2$. 代入$k_1k_2+2=0$，得$k_1^2+2=0$，与k_1为实数的事实相矛盾.从而$k_1\neq k_2$，即l_1与l_2相交.	第一步　假设结论的反面成立. 第二步　从假设出发，利用已知条件推理论证，得出矛盾. 第三步　产生矛盾的原因在于“反设”错误，从而肯定结论成立.

模板攻略

1. 模板解决思路

用反证法证明问题时，首先应准确地作出假设，再以此为条件进行推理，得出矛盾，从而肯定结论的成立．注意在此证明过程中，一定要用到假设命题，否则不是反证法.

2. 模板解决步骤

①第一步　反设：假设命题的结论不成立，即结论的反面成立.

②第二步　从这个假设出发，经过正确的推理论证，得出矛盾.

③第三步　因为推理正确，故产生矛盾的原因在于“反设”的谬误，即结论的反面不成立，从而肯定了结论成立.

3. 典型例题

典例1　（四川高考）设函数$f(x)=\sqrt{e^x+x-a}$（$a\in\mathbf{R}$，e为自然对数的底数）.若存在$b\in[0,1]$使$f(f(b))$

体味人生　你要包容那些意见跟你不同的人，这样子日子比较好过．你要是一直想改变他，那样你会很痛苦．要学学怎样忍受他、包容他才是.



$=b$ 成立，则 a 的取值范围是(　　).

A. $[1,e]$　　B. $[1,1+e]$

C. $[e,1+e]$　　D. $[0,1]$

解析：易知 $f(x)=\sqrt{e^x+x-a}$ 在定义域内是增函数，

由 $f(f(b))=b$，猜想 $f(b)=b$.

反证法：若 $f(b)>b$，则 $f(f(b))>f(b)>b$，与题意不符，

若 $f(b)<b$，则 $f(f(b))<f(b)<b$，与题意也不符， ①~②

故 $f(b)=b$， ③

即 $f(x)=x$ 在 $[0,1]$ 上有解.

$\therefore\sqrt{e^x+x-a}=x$，$a=e^x-x^2+x$，

令 $g(x)=e^x-x^2+x$，$g'(x)=e^x-2x+1=(e^x+1)-2x$，

当 $x\in[0,1]$ 时，$e^x+1\geqslant2$，$2x\leqslant2$，

$\therefore g'(x)\geqslant0$，$\therefore g(x)$ 在 $[0,1]$ 上是增函数，

$\therefore g(0)\leqslant g(x)\leqslant g(1)\Rightarrow1\leqslant g(x)\leqslant e$，

即 $1\leqslant a\leqslant e$，故选A.

答案：A

典例 2　(陕西高考节选)设函数 $f(x)$ 定义在 $(0,+\infty)$ 上，$f(1)=0$，导函数 $f'(x)=\frac{1}{x}$，$g(x)=f(x)+f'(x)$.

是否存在 $x_0>0$，使得 $|g(x)-g(x_0)|<\frac{1}{x}$ 对任意 $x>0$ 成立？若存在，求出 x_0 的取值范围；若不存在，请说明理由.

解：由题设易知 $f(x)=\ln x$，$g(x)=\ln x+\frac{1}{x}$，假设存在 $x_0>0$，使 $|g(x)-g(x_0)|<\frac{1}{x}$ 对任意 $x>0$ 成立. ①

即对任意 $x>0$，有 $\ln x<g(x_0)<\ln x+\frac{2}{x}$，(*)

但对上述 x_0，取 $x_1=e^{g(x_0)}$ 时，有 $\ln x_1=g(x_0)$，这与(*)左边不等式矛盾. ②

因此，不存在 $x_0>0$，使 $|g(x)-g(x_0)|<\frac{1}{x}$ 对任意 $x>0$ 成立. ③

知识要点

1. 反证法

一般地，假设原命题不成立(即在原命题的条件下，结论不成立)，经过正确的推理，最后得出矛盾，因此说明假设错误，从而证明了原命题成立，这样的证明方法叫作反证法.

2. 常见的归缪矛盾

(1)与已知条件矛盾；

(2)与假设矛盾；

(3)与定义、公理、定理、事实矛盾；

(4)自相矛盾.

3. 反证法证明问题时的反设词

原结论词	反设词	原结论词	反设词
至少有一个	一个也没有	对所有 x 成立	存在某个 x 不成立
至多有一个	至少有两个	对任意 x 不成立	存在某个 x 成立
至少有 n 个	至多有 $n-1$ 个	p 或 q	$\neg p$ 且 $\neg q$
至多有 n 个	至少有 $n+1$ 个	p 且 q	$\neg p$ 或 $\neg q$

模板演练

➡ 答案详见 P454

1. (江西高考)下列命题中，假命题为(　　).

A. 存在四边相等的四边形不是正方形

B. $z_1,z_2\in\mathbf{C}$，z_1+z_2 为实数的充分必要条件是 z_1,z_2 互为共轭复数

C. 若 $x,y\in\mathbf{R}$，$x+y>2$，则 x,y 至少有一个大于 1

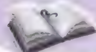
D. 对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n$ 都是偶数

2. 如果 $\triangle A_1B_1C_1$ 的三个内角的余弦值分别等于 $\triangle A_2B_2C_2$ 的三个内角的正弦值，则(　　).

A. $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 都是锐角三角形

B. $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 都是钝角三角形

凯尔微博



学习的四种境界　1. 熟能生巧：在老师的指导下学习，掌握课本上的内容，知道问题的答案. 2. 举一反三：具备了思考的能力，掌握了学习的方法，能够举一反三，知其然，也知其所以然. 3. 无师自通：掌握了自学、自修的方法，可以在没有老师辅导的情况下主动学习. 4. 融会贯通：可以将学到的知识灵活运用于生活和工作实践，懂得做事与做人的道理.

C. $\triangle A_1B_1C_1$ 是钝角三角形，$\triangle A_2B_2C_2$ 是锐角三角形

D. $\triangle A_1B_1C_1$ 是锐角三角形，$\triangle A_2B_2C_2$ 是钝角三角形

3.（湖北高考）已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=\frac{1}{2}$，$\frac{3(1+a_{n+1})}{1-a_n}=\frac{2(1+a_n)}{1-a_{n+1}}$，$a_na_{n+1}<0(n\geqslant1)$，数列$\{b_n\}$满足：$b_n=a_{n+1}^2-a_n^2$ $(n\geqslant1)$.

（1）求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

（2）证明：数列$\{b_n\}$中的任意三项不可能成等差数列.

模板3　用数学归纳法证明命题【5年15考】

模板探究

母题呈现	模板引入
（全国高考节选）函数$f(x)=x^2-2x-3$. 定义数列$\{x_n\}$如下：$x_1=2$，x_{n+1}是过两点$P(4,5)$，$Q_n(x_n,f(x_n))$的直线PQ_n与x轴交点的横坐标. 证明：$2\leqslant x_n<x_{n+1}<3$.	本模板解决的是“已知条件p，证明对任意$n\in\mathbf{N}^*$，有等式或不等式成立”的问题.
证明：①当$n=1$时，$x_1=2$，直线PQ_1的方程为$y-5=\frac{f(2)-5}{2-4}(x-4)$，即$y=4x-11$. 令$y=0$，解得$x_2=\frac{11}{4}$，所以$2\leqslant x_1<x_2<3$. ②假设当$n=k(k\geqslant1,k\in\mathbf{N}^*)$时，结论成立，即$2\leqslant x_k<x_{k+1}<3$.直线$PQ_{k+1}$的方程为$y-5=\frac{f(x_{k+1})-5}{x_{k+1}-4}(x-4)$， 令$y=0$，解得$x_{k+2}=\frac{3+4x_{k+1}}{2+x_{k+1}}$. 由归纳假设知 $x_{k+2}=\frac{3+4x_{k+1}}{2+x_{k+1}}=4-\frac{5}{2+x_{k+1}}<4-\frac{5}{2+3}=3$； $x_{k+2}-x_{k+1}=\frac{(3-x_{k+1})(1+x_{k+1})}{2+x_{k+1}}>0$，即$x_{k+1}<x_{k+2}$. 所以$2\leqslant x_{k+1}<x_{k+2}<3$，即当$n=k+1$时，结论成立. 由①、②知对任意的正整数$n$，$2\leqslant x_n<x_{n+1}<3$.	第一步　验证$n=1$时，不等式成立. 第二步　假设$n=k(k\geqslant1,k\in\mathbf{N}^*)$时，不等式成立. 第三步　证明$n=k+1$时，不等式也成立.

口试　课堂上，老师出了一道判断题要求同学们当场判断正误. 老师：“小林，你来判断一下.”小林：“我认为答案应该是‘错误’.”老师：“为什么呢？”小林：“因为前面小燕回答说‘正确’，但你没有让她坐下.”



模板攻略

1. 模板解决思路

用数学归纳法证明的关键在于递推，所以从“k”到“$k+1$”的过程，必须把归纳假设“$n=k$”作为条件来导出“$n=k+1$”时的命题，在推导过程中，归纳假设至少要用到一次.

2. 模板解决步骤

①第一步　证明当 n 取第一个值 n_0 时，命题成立.

②第二步　假设 $n=k(k\geqslant n_0,k\in\mathbf{N}^*)$时，命题成立.

③第三步　利用条件 p，证明 $n=k+1$ 时，命题也成立.

3. 典型例题

典例　(湖南高考)已知函数 $f(x)=x^3$, $g(x)=x+\sqrt{x}$.

(1)求函数 $h(x)=f(x)-g(x)$的零点个数，并说明理由；

(2)设数列$\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$满足 $a_1=a(a>0)$, $f(a_{n+1})=g(a_n)$，证明：存在常数 M，使得对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n\leqslant M$.

解：(1)由题意知，$x\in[0,+\infty)$, $h(x)=x^3-x-\sqrt{x}$, $h(0)=0$，且 $h(1)=-1<0$, $h(2)=6-\sqrt{2}>0$，则 $x=0$ 为 $h(x)$的一个零点，且 $h(x)$在$(1,2)$内有零点．因此，$h(x)$至少有两个零点.

由 $h(x)=x(x^2-1-x^{-\frac{1}{2}})$，记 $\varphi(x)=x^2-1-x^{-\frac{1}{2}}$，则 $\varphi'(x)=2x+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$．当 $x\in(0,+\infty)$时，$\varphi'(x)>0$，从而 $\varphi(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，则 $\varphi(x)$在$(0,+\infty)$内至多只有一个零点．因此 $h(x)$在$(0,+\infty)$内也至多只有一个零点.

综上所述，$h(x)$有且只有两个零点.

(2)证明：记 $h(x)$的正零点为 x_0，即 $x_0^3=x_0+\sqrt{x_0}$.

①当 $a<x_0$ 时，由 $a_1=a$，得 $a_1<x_0$.

而 $a_2^3=a_1+\sqrt{a_1}<x_0+\sqrt{x_0}=x_0^3$，因此 $a_2<x_0$.

由此猜测：$a_n<x_0$．下面用数学归纳法证明.

a. 当 $n=1$ 时，$a_1<x_0$ 显然成立.　①

b. 假设当 $n=k(k\geqslant 2)$时，$a_k<x_0$ 成立，　②

则当 $n=k+1$ 时，由 $a_{k+1}^3=a_k+\sqrt{a_k}<x_0+\sqrt{x_0}=x_0^3$知，$a_{k+1}<x_0$.

因此，当 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}<x_0$ 成立.　③

故对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, $a_n<x_0$ 成立.

②当 $a\geqslant x_0$ 时，由(1)知，$h(x)$在$(x_0,+\infty)$上单调递增，则 $h(a)\geqslant h(x_0)=0$，即 $a^3\geqslant a+\sqrt{a}$，从而 $a_2^3=a_1+\sqrt{a_1}=a+\sqrt{a}\leqslant a^3$，即 $a_2\leqslant a$．由此猜测：$a_n\leqslant a$，下面用数学归纳法证明.

a. 当 $n=1$ 时，$a_1\leqslant a$ 显然成立.　①

b. 假设当 $n=k(k\geqslant 2)$时，$a_k<a$ 成立，　②

则当 $n=k+1$ 时，由 $a_{k+1}^3=a_k+\sqrt{a_k}\leqslant a+\sqrt{a}\leqslant a^3$ 知，$a_{k+1}\leqslant a$.

因此，当 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}\leqslant a$ 成立.　③

故对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$, $a_n\leqslant a$ 成立.

综上所述，存在常数 $M=\max\{x_0,a\}$，使得对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n\leqslant M$.

误区警示

验证 $n=k+1$ 时，一定要在验证式子的过程中用到假设成立的式子，不能抛开假设的 $n=k$ 时成立的结论，而用其他方法来证明 $n=k+1$ 时结论成立.

知识要点

一般地，证明一个与正整数 n 有关的命题，可按下列步骤进行：

(1)(归纳奠基)证明当 n 取第一个值 $n_0(n\in\mathbf{N}^*)$时命题成立；

(2)(归纳递推)假设 $n=k(k\geqslant n_0,k\in\mathbf{N}^*)$时命题成立，证明当 $n=k+1$ 时命题也成立.

只要完成这两个步骤，就可以断定命题对从 n_0 开始的所有正整数 n 都成立.

上述证明方法叫作数学归纳法.

问答　老师：“我给同学们出两个问题，谁只要回答出第一个问题，就不要求他回答第二个问题了．现在我问第一个问题：‘谁知道自己有多少根头发？’”小丽：“我知道，我有 99 999 根头发.”

老师：“你是怎么知道的？”小丽：“老师，这是第二个问题了，你不能要求我回答了.”

特别提示

数学归纳法是一种适用于与正整数有关的命题的证明方法，第一步是递推的"基础"，第二步是递推的"依据"，两个步骤缺一不可，在证明过程中要注意以下两点：

(1)第一步验证 $n=n_0$ 时，n_0 不一定为 1，要根据题目要求选择合适的起始值.

(2)第二步中，归纳假设起着"已知条件"的作用，在证明 $n=k+1$ 时命题也成立的过程中一定要用到它，否则就不是数学归纳法. 其关键是"一凑假设，二凑结论". 要特别注意 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时增加的项.

模板演练

➡ 答案详见 P455

1. 数列$\{a_n\}$满足 $S_n=2n-a_n(n\in \mathbf{N}^*)$.

(1)计算 a_1,a_2,a_3,a_4，并由此猜想通项公式 a_n；

(2)用数学归纳法证明(1)中的猜想.

2. (江苏高考)已知$\triangle ABC$的三边长都是有理数.

(1)求证：$\cos A$ 是有理数；

(2)求证：对任意正整数 n，$\cos nA$ 是有理数.

3. (湖北高考)(1)已知函数 $f(x)=rx-x^r+(1-r)(x>0)$，其中 r 为有理数，且 $0<r<1$，求 $f(x)$的最小值；

(2)试用(1)的结果证明如下命题：

设 $a_1\geqslant 0,a_2\geqslant 0,b_1,b_2$ 为正有理数，若 $b_1+b_2=1$，则 $a_1^{b_1}a_2^{b_2}\leqslant a_1b_1+a_2b_2$；

(3)请将(2)中的命题推广到一般形式，并用数学归纳法证明你所推广的命题.

注：当 α 为正有理数时，有求导公式$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$.

4. (安徽高考)数列$\{x_n\}$满足 $x_1=0,x_{n+1}=-x_n^2+x_n+c(n\in \mathbf{N}^*)$.

(1)证明：$\{x_n\}$是递减数列的充分必要条件是 $c<0$；

(2)求 c 的取值范围，使$\{x_n\}$是递增数列.

测谎器 爸爸有一个测谎器，他问儿子："你的数学成绩是多少呢？"儿子答道："90 分."测谎器响了. 儿子又改说："70 分."测谎器还是响了. 爸爸很生气地叫道："我以前都是 90 分以上."这时，测谎器没有响却翻倒了.

凯尔微博



第三章 数系的扩充与复数的引入

模板1 复数式的化简 [每年必考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(新课标全国高考) $\frac{1+2i}{(1-i)^2}=($　　$)$. A. $-1-\frac{1}{2}i$　　B. $-1+\frac{1}{2}i$ C. $1+\frac{1}{2}i$　　D. $1-\frac{1}{2}i$	本模板解决的是"将含有乘除运算的复数式子化简为复数的代数形式"的问题.
解析: $\frac{1+2i}{(1-i)^2}=\frac{1+2i}{-2i}=\frac{(1+2i)i}{(-2i)i}=\frac{-2+i}{2}=-1+\frac{1}{2}i$. 答案:B	第一步　将式子分母化为代数形式后，分子、分母同乘以 i，将分母有理化. 第二步　对式子的分子与分母分别进行乘法运算. 第三步　将式子写为复数的代数形式.

模板攻略

1. 模板解决思路

本模板方法的实质就是复数的四则运算，解题的关键是对所给式子中分母的化简. 应先将分母化简到最简形式，然后将分母有理化，再进行相应的运算即可.

2. 模板解决步骤

①第一步　将分母化为最简形式后，将分母有理化，去掉分母.

②第二步　按乘法运算法则分别对分子、分母进行乘法运算.

③第三步　合并实部和虚部，得到复数的代数形式.

3. 典型例题

典例 1　(浙江高考)已知i是虚数单位，则 $\frac{3+i}{1-i}=($　　$)$.

A. $1-2i$　　B. $2-i$　　C. $2+i$　　D. $1+2i$

解析: $\frac{3+i}{1-i}=\frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}$　①

$=\frac{2+4i}{2}$　②

$=1+2i$.　③

答案:D

典例 2　(天津高考)i是虚数单位，复数 $\frac{5+3i}{4-i}=($　　$)$.

A. $1-i$　　B. $-1+i$　　C. $1+i$　　D. $-1-i$

解析: $\frac{5+3i}{4-i}=\frac{(5+3i)(4+i)}{(4-i)(4+i)}$　①

$=\frac{17+17i}{17}$　②

$=1+i$.　③

答案:C

知识要点

1. 复数的概念

把集合 $\mathbf{C}=\{a+bi|a,b\in\mathbf{R}\}$中的数，即形如 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$的数叫作复数，其中 i 叫作虚数单位. 全体复数所成的集合 C 叫作复数集，其中 $i^2=-1$.

复数通常用字母 z 表示，即 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，这一表示形式叫作复数的代数形式. 对于复数 $z=a+bi$，其中的 a 与 b 分别叫作复数 z 的实部与虚部.

2. 复数的加法法则

设 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$ 是任意两个复数，那么 $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.

3. 复数的减法法则

规定，复数的减法是加法的逆运算，即把满足 $(c+di)+(x+yi)=a+bi$ 的复数 $x+yi$ 叫作复数 $a+bi$ 减去复数 $c+di$ 的差. 记作 $(a+bi)-(c+di)$.

$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$.

> **特别提示**
>
> (1)复数加减法的运算法则，只要把复数的实部与实部相加减，虚部与虚部相加减即可. 也可以把 i 看作一个字母，类比多项式加减法中的合并同类项.
>
> (2)复数的加减法可以推广到若干个复数进行连加连减或混合运算.

4. 复数的乘法法则

设 $z_1=a+bi$，$z_2=c+di$ 是任意两个复数，那么它们的积 $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$.

两个复数相乘，类似两个多项式相乘，只要在所得的结果中把 i^2 换成 -1，并且把实部与虚部分别合并即可.

5. 复数的除法法则

$(a+bi)\div(c+di)=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i(c+di\neq0)$.

两个复数相除（除数不为 0），所得的商是一个确定的复数.

> **特别提示**
>
> 在进行复数除法运算时，通常先把 $(a+bi)\div(c+di)$写成 $\frac{a+bi}{c+di}$ 的形式，再把分子与分母都乘分母的共轭复数 $c-di$，化简后即得结果.

6. 共轭复数

一般地，当两个复数的实部相等，虚部互为相反数时，这两个复数叫作互为共轭复数. 虚部不等于 0 的两个共轭复数也叫作互为共轭虚数. 通常记复数 z 的共轭复数为 $\bar{z}$.

> **特别提示**
>
> (1)在复平面上，两个互为共轭复数对应的点关于实轴对称.
>
> (2)实数的共轭复数是它本身，即 $z=\bar{z}\Leftrightarrow z\in\mathbf{R}$，利用这个性质可证明一个复数为实数.
>
> (3)若 $z\neq0$ 且 $z+\bar{z}=0$，则 z 为纯虚数，利用这个性质，可证明一个复数为纯虚数.

模板演练

➡ 答案详见 P457

1. (浙江高考)已知 i 是虚数单位，则 $(2+i)(3+i)=$(　　).

A. $5-5i$　B. $7-5i$　C. $5+5i$　D. $7+5i$

2. (广东高考)设i为虚数单位，则复数 $\frac{5-6i}{i}=$(　　).

A. $6+5i$　B. $6-5i$　C. $-6+5i$　D. $-6-5i$

3. (辽宁高考)复数 $\frac{2-i}{2+i}=$(　　).

A. $\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$　B. $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$　C. $1-\frac{4}{5}i$　D. $1+\frac{3}{5}i$

4. (天津高考)i 是虚数单位，复数 $\frac{7-i}{3+i}=$(　　).

A. $2+i$　B. $2-i$　C. $-2+i$　D. $-2-i$



5. (四川高考)复数$\frac{(1-i)^2}{2i}$=(　　).

A. 1　　B. −1　　C. i　　D. −i

6. (天津高考)i是虚数单位,复数$(3+i)(1-2i)$=______.

7. (上海高考)计算:$\frac{3-i}{1+i}$=______(i为虚数单位).

模板2　求未知数的值 [5年17考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(天津高考)已知$a,b\in\mathbf{R}$,i是虚数单位.若$(a+i)\cdot(1+i)=bi$,则$a+bi$=______.	本模板解决的是"求满足已知条件的未知数的值"的问题.
解析:$\because(a+i)(1+i)=(a-1)+(a+1)i=bi$, $\therefore\begin{cases}a-1=0,\\a+1=b.\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\b=2.\end{cases}$ $\therefore a+bi=1+2i$. 答案:1+2i	第一步　将等式两边分别化为最简形式. 第二步　根据等式成立列出方程组. 第三步　解方程组得出未知数的值.

模板攻略

1. 模板解决思路

求满足已知条件的未知数的值的关键在于准确化简已知等式(或式子),将等式左、右两边或式子化成最简形式,然后根据复数相等或其他条件列方程(组)求解即可.

2. 模板解决步骤

①第一步　根据复数的四则运算化简等式或式子使其成最简形式.

②第二步　根据复数相等或其他条件列出关于未知数的方程(组).

③第三步　解方程(组)得出未知数的值.

3. 典型例题

典例1　(辽宁高考)设a,b为实数,若复数$\frac{1+2i}{a+bi}=1+i$,则(　　).

A. $a=\frac{3}{2},b=\frac{1}{2}$　　B. $a=3,b=1$

C. $a=\frac{1}{2},b=\frac{3}{2}$　　D. $a=1,b=3$

思路分析:因为$\frac{1+2i}{a+bi}=1+i$中有除法,不便计算,所以可转化为$1+2i=(1+i)(a+bi)$.

解析:由题意得$1+2i=(1+i)(a+bi)$,

即$1+2i=(a-b)+(a+b)i$.　①

则$\begin{cases}a-b=1,\\a+b=2.\end{cases}$　②

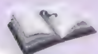
解得$\begin{cases}a=\frac{3}{2},\\b=\frac{1}{2}.\end{cases}$　③

答案:A

典例2　(重庆高考)若$(1+i)(2+i)=a+bi$,其中$a,b\in\mathbf{R}$,i为虚数单位,则$a+b$=______.

解析:$\because(1+i)(2+i)=1+3i=a+bi$,　①

逻辑学的用处　有个学生请教爱因斯坦逻辑学有什么用.爱因斯坦问他:"两个人从烟囱里爬出去,一个满脸烟灰,一个干干净净,你认为哪一个该去洗澡?""当然是脏的那个."学生说."不对.脏的那个看见对方干干净净,以为自己也不会脏,哪里会去洗澡?"



$\therefore\begin{cases}a=1,\\b=3.\end{cases}$　　(2~3)

$\therefore a+b=1+3=4.$

答案:4

误区警示

复数 $a+bi=c+di$ 的充要条件是 $\begin{cases}a=c,\\b=d.\end{cases}$ 不能错列为 $\begin{cases}a=d,\\b=c.\end{cases}$

知识要点

1. 复数的表示

复数通常用字母 z 表示,即 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,这一表示形式叫作复数的代数形式. 其中 a 与 b 分别叫作复数 z 的实部与虚部.

对于复数 $a+bi$,当且仅当 $b=0$ 时,它是实数;当且仅当 $a=b=0$ 时,它是实数 0;当 $b\neq0$ 时,叫作虚数;当 $a=0$ 且 $b\neq0$ 时,叫作纯虚数.

2. 复数相等的充要条件

在复数集 $\mathbf{C}=\{a+bi|a,b\in\mathbf{R}\}$ 中任取两个数 $a+bi,c+di(a,b,c,d\in\mathbf{R})$,我们规定:

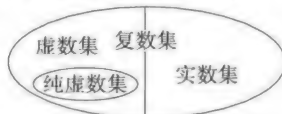
$a+bi$ 与 $c+di$ 相等的充要条件是 $a=c$ 且 $b=d$.

3. 复数的分类

实数集 $\mathbf{R}$ 是复数集 $\mathbf{C}$ 的真子集,即 $\mathbf{R}\subsetneqq\mathbf{C}$. 这样,复数 $z=a+bi$ 可以分类如下:

复数 $z\begin{cases}实数(b=0),\\虚数(b\neq0)(当 a=0 时为纯虚数).\end{cases}$

数集之间的关系可用下图表示:



模板演练

➜ 答案详见 P457

1. (上海高考)若 $1+\sqrt{2}i$ 是关于 x 的实系数方程 $x^2+bx+c=0$ 的一个复数根,则(　　).

A. $b=2,c=3$　　B. $b=-2,c=3$

C. $b=-2,c=-1$　　D. $b=2,c=-1$

2. (湖南高考)若 $a,b\in\mathbf{R}$,i 为虚数单位,且 $(a+i)i=b+i$,则(　　).

A. $a=1,b=1$　　B. $a=-1,b=1$

C. $a=-1,b=-1$　　D. $a=1,b=-1$

3. (山东高考)已知 $\frac{a+2i}{i}=b+i(a,b\in\mathbf{R})$,其中 i 为虚数单位,则 $a+b=$(　　).

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. (安徽高考)设 i 是虚数单位,若复数 $a-\frac{10}{3-i}(a\in\mathbf{R})$ 是纯虚数,则 a 的值为(　　).

A. -3　　B. -1　　C. 1　　D. 3

5. (江苏高考)设 $a,b\in\mathbf{R},a+bi=\frac{11-7i}{1-2i}$(i 为虚数单位),则 $a+b$ 的值为________.

6. (湖北高考)$\frac{3+bi}{1-i}=a+bi(a,b$ 为实数,i 为虚数单位),则 $a+b=$________.

7. 若复数 $(a^2-3a+2)+(a-1)i$ 是纯虚数,求 a 的值.

选修 2-2

数学笑话——验算　一次期中考试,所有题目都是选择题. 甲生带了一个骰子去,乙生坐在他旁边. 以下是考试情形:甲生丢骰子:3,1,1,3,4,2,4,2,1…然后甲生就写完了,开始睡觉. 不久甲生起来了,又开始丢骰子. 乙:"你在干吗?"甲:"验算啊!"



模板3 确定复数所在象限问题【5年18考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(湖北高考)复数 $z=\mathrm{i}\cdot(1+\mathrm{i})$(i为虚数单位)在复平面上对应的点位于( ). A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限	本模板解决的是"已知复数 z,确定其对应点所在象限"的问题.
解析:$z=\mathrm{i}+\mathrm{i}^2=-1+\mathrm{i}$, ∴对应点为$(-1,1)$, ∴$z$对应的点位于复平面第二象限. **答案**:B	第一步 将已知复数 z 化为最简形式. 第二步 确定 z 的对应点坐标. 第三步 根据坐标,确定其象限.

模板攻略

1. 模板解决思路

解决确定复数的对应点所在象限的问题的关键在于确定复数的对应点的坐标,其重点是将已知复数化简成复数的代数形式即 $z=a+b\mathrm{i}$,然后再根据复数的几何意义确定象限即可.

2. 模板解决步骤

① 第一步 化简,根据复数的运算法则将复数化简成 $z=a+b\mathrm{i}$ 的形式.

② 第二步 确定复数对应点的坐标(a,b).

③ 第三步 根据 a,b 的符号,确定复数对应点所在的象限.

3. 典型例题

典例1 (江西高考)复数 $z=\mathrm{i}(-2-\mathrm{i})$(i为虚数单位)在复平面内所对应的点在( ).

A. 第一象限 B. 第二象限

C. 第三象限 D. 第四象限

解析:$z=-2\mathrm{i}-\mathrm{i}^2=1-2\mathrm{i}$, ①

其对应点为$(1,-2)$, ②

∴z的对应点位于第四象限. ③

答案:D

典例2 (北京高考)在复平面内,复数 $\mathrm{i}(2-\mathrm{i})$对应的点位于( ).

A. 第一象限 B. 第二象限

C. 第三象限 D. 第四象限

解析:$\mathrm{i}(2-\mathrm{i})=2\mathrm{i}-\mathrm{i}^2=1+2\mathrm{i}$, ①

其对应点为$(1,2)$. ②

∴$\mathrm{i}(2-\mathrm{i})$的对应点位于第一象限. ③

答案:A

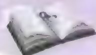
误区警示

对于复数 $z=a+b\mathrm{i}$,其坐标为(a,b),不要误认为其坐标是(b,a).

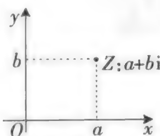
知识要点

1. 根据复数相等的定义,任何一个复数 $z=a+b\mathrm{i}$,都可以由一个有序实数对(a,b)唯一确定. 因为有序实数对(a,b)与平面直角坐标系中的点一一对应,所以复数集与平面直角坐标系中的点集之

数学笑话——减法 数学课上,教师对一位学生说:"你怎么连减法都不会?例如:你家里有10个苹果,被你吃了4个,结果是多少呢?"这个学生沮丧地说道:"结果是挨了10下打!"



间可以建立一一对应.



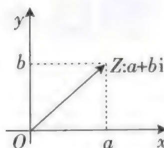
如图,点 Z 的横坐标是 a,纵坐标是 b,复数 $z=a+bi$ 可用点 $Z(a,b)$表示,这个建立了直角坐标系来表示复数的平面叫作复平面,x 轴叫作实轴,y 轴叫作虚轴.显然,实轴上的点都表示实数;除原点外,虚轴上的点都表示纯虚数.

按照这种方法,每一个复数,有复平面内唯一的一个点和它对应;反过来,复平面内的每一个点,有唯一的一个复数和它对应.由此可知,复数集 **C** 和复平面内所有的点所成的集合是一一对应的,即

复数 $z=a+bi \xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 复平面内的点 $Z(a,b)$

这是复数的一种几何意义.

2. 在平面直角坐标系中,每一个平面向量都可以用一个有序实数对来表示,而有序实数对与复数是一一对应的,这样,我们还可以用平面向量来表示复数.



如图,设复平面内的点 Z 表示复数 $z=a+bi$,连接 OZ,显然向量$\overrightarrow{OZ}$由点 Z 唯一确定;反过来,点 Z(相对于原点来说)也可以由向量$\overrightarrow{OZ}$唯一确定.因此,复数集 **C** 与复平面内的向量所成的集合也是一一对应的(实数 0 与零向量对应),即

复数 $z=a+bi \xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 平面向量$\overrightarrow{OZ}$

这是复数的另一种几何意义.

特别提示

(1)复数 $z=a+bi(a,b\in \mathbf{R})$的对应点的坐标为$(a,b)$,而不是$(a,bi)$.

(2)复数 $z=a+bi(a,b\in \mathbf{R})$的对应向量$\overrightarrow{OZ}$是以原点 O 为起点的,否则就谈不上一一对应.

(3)常把复数 $z=a+bi$ 说成点 Z 或向量$\overrightarrow{OZ}$,并且规定:相等的向量表示同一个复数.

模板演练

➡ 答案详见 P457

1. (北京高考)在复平面内,复数$(2-i)^2$对应的点位于(　　).

A. 第一象限　　B. 第二象限
C. 第三象限　　D. 第四象限

2. (福建高考)复数 $z=-1-2i$(i 为虚数单位)在复平面内对应的点位于(　　).

A. 第一象限　　B. 第二象限
C. 第三象限　　D. 第四象限

3. (福建高考)已知复数 z 的共轭复数 $\bar{z}=1+2i$(i 为虚数单位),则 z 在复平面内对应的点位于(　　).

A. 第一象限　　B. 第二象限
C. 第三象限　　D. 第四象限

4. (湖北高考)在复平面内,复数 $z=\frac{2i}{1+i}$(i 为虚数单位)的共轭复数对应的点位于(　　).

A. 第一象限　　B. 第二象限
C. 第三象限　　D. 第四象限

5. (山东高考)复数 $z=\frac{2-i}{2+i}$(i 为虚数单位)在复平面内对应的点所在象限为(　　).

A. 第一象限　　B. 第二象限
C. 第三象限　　D. 第四象限

6. (陕西高考)复数 $z=\frac{i}{1+i}$在复平面上对应的点位于(　　).

A. 第一象限　　B. 第二象限
C. 第三象限　　D. 第四象限

数学笑话——π 是什么? 数学家:π 是圆周长与直径的比.
工程师:π 大约是 22/7.
计算机程序员:双精度下 π 是 3.141 592 653 589.
营养学家:你们这些死心眼的数学脑瓜,“派”是一种既好吃又健康的甜点!



模板 4　复数的模的求法【5年18考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(山东高考)复数 $z=\frac{(2-i)^2}{i}$(i 为虚数单位),则 $\|z\|=$(　　). A. 25　B. $\sqrt{41}$　C. 5　D. $\sqrt{5}$	本模板解决的是"已知复数 z,求 $\|z\|$"的问题.
解析:$\because z=\frac{(2-i)^2}{i}=\frac{(3-4i)i}{i\cdot i}=-4-3i$. $\therefore \|z\|=5$. 答案:C	第一步　复数 z 的分母有理化. 第二步　将复数 z 化简成最简形式. 第三步　计算 $\|z\|$.

模板攻略

1. 模板解决思路

解决本模板问题首先要将复数 z 化简为最简形式,其过程参考模板"复数式的化简",然后再根据复数的模的定义解答.

2. 模板解决步骤

1 第一步　去分母:将复数 z 分母有理化.

2 第二步　化简:根据复数的运算法则将复数化简为 $z=a+bi$ 的形式.

3 第三步　求模:根据模的定义求得其模 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

3. 典型例题

典例 1　(新课标全国高考)$\left|\frac{2}{1+i}\right|=$(　　).

A. $2\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{2}$　　D. 1

解析:$z=\frac{2}{1+i}$

$=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}$　①

$=\frac{2(1-i)}{2}$

$=1-i$.　②

$|z|=\sqrt{2}$.　③

答案:C

典例 2　(辽宁高考)复数 $z=\frac{1}{i-1}$ 的模为(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

解析:$z=\frac{1}{i-1}$

$=\frac{i+1}{(i-1)(i+1)}$　①

$=\frac{i+1}{-2}$

$=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.　②

$|z|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.　③

答案:B

数学笑话——11 点半　上午第四节课,A 生肚子饿,无心听课,坐在位置上呆呆地想着牛肉、面包.

数学老师发现他走神,便提问他:"1.130 小数点向右移动一位,将会怎么样?"

A 生毫不犹豫地回答:"将会开午饭!"

知识要点

1. 复数的模

向量$\overrightarrow{OZ}$的模 r 叫作复数 $z=a+bi$ 的模，记作$|z|$或$|a+bi|$. 如果 $b=0$，那么 $z=a+bi$ 是一个实数 a，它的模等于$|a|$(就是 a 的绝对值). 由模的定义可知:

$$|z|=|a+bi|=r=\sqrt{a^2+b^2}\ (r\geqslant 0, r\in\mathbf{R}).$$

2. 复数模的几何意义

$|z|=|\overrightarrow{OZ}|$，即点 $Z(a,b)$到原点 O 的距离. 一般地，$|z_1-z_2|$即为复平面内点 Z_1 到 Z_2 的距离.

模板演练

➡ 答案详见 P458

1. (广东高考)若 $i(x+yi)=3+4i$，$x,y\in\mathbf{R}$，则复数 $x+yi$ 的模是(　　).

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

2. (辽宁高考)a 为正实数，i 为虚数单位，$\left|\frac{a+i}{i}\right|=2$，则 $a=$(　　).

A. 2　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{7}$　　D. 1

3. (重庆高考)设复数 $z=1+2i$(i 是虚数单位)，则$|z|=$________.

4. (江苏高考)设 $z=(2-i)^2$(i 为虚数单位)，则复数 z 的模为________.

5. (湖南高考)已知复数 $z=(3+i)^2$(i 为虚数单位)，则$|z|=$________.

6. (重庆高考)已知复数 $z=\frac{5i}{1+2i}$(i是虚数单位)，则$|z|=$________.

模板 5　求解未知复数 【5年29考】

模板探究

母 题 呈 现	模 板 引 入
(新课标全国高考)设复数 z 满足$(1-i)z=2i$，则 $z=$(　　). A. $-1+i$　B. $-1-i$　C. $1+i$　D. $1-i$	本模板解决的是“求满足已知等式的未知复数”的问题.
解析：$z=\frac{2i}{1-i}=\frac{(2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i-2}{2}=-1+i$. 答案：A	第一步　将已知等式写成“$z=$”的形式. 第二步　分子和分母同乘以分母的共轭复数. 第三步　将复数化为最简形式.

模板攻略

1. 模板解决思路

求解未知复数的思路类似于解一元一次方程，最终都是将未知数放于等号左边，其余的放于等号右边，本模板中将等式化为“$z=$”的形式后，等号右边的化简的重点是分母有理化，再按照运算法则进行计算.

数学笑话——概率　我去参观气象站，看到许多预测天气的最新仪器. 参观完毕，我问站长：“你说有 75%的概率下雨时，是怎样计算出来的？”

站长没有多想便答道：“那就是说，我们这里有 4 个人，其中 3 个认为会下雨.”



2. 模板解决步骤

1 第一步　变形：根据等式性质，将已知等式化为“$z=$”的形式.

2 第二步　分母有理化：分子和分母同时乘以分母的共轭复数.

3 第三步　按照运算法则，将复数式化为最简形式.

3. 典型例题

典例 1　（广东高考）若复数 z 满足 $iz=2+4i$，则在复平面内，z 对应的点的坐标是（　　）.

A. (2,4)　B. (2,−4)　C. (4,−2)　D. (4,2)

解析：$z=\frac{2+4i}{i}$　①

$=\frac{(2+4i)i}{i\cdot i}$　②

$=4-2i.$　③

所以 z 对应的点的坐标是(4,−2).

答案：C

典例 2　（山东高考）若复数 z 满足 $z(2-i)=11+7i$（i 为虚数单位），则 z 为（　　）.

A. $3+5i$　B. $3-5i$　C. $-3+5i$　D. $-3-5i$

解析：$z=\frac{11+7i}{2-i}$　①

$=\frac{(11+7i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$　②

$=\frac{15+25i}{5}$

$=3+5i.$　③

答案：A

知识要点

复数除法运算中分母实数化的方法

(1)根据复数除法法则：

$(a+bi)\div(c+di)=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i(c+di\neq0).$

(2)对于 $\frac{a+bi}{c+di}$ 形式的复数，将分子与分母都乘分母的共轭复数 $c-di$，再进行化简.

特别提示

复数的除法与实数的除法有所不同，实数的除法可以直接约分化简，得出结论，但复数的除法因为分母为复数一般不能直接约分化简.

模板演练

➜ 答案详见 P458

1. （山东高考）复数 z 满足 $(z-3)(2-i)=5$（i 为虚数单位），则 z 的共轭复数 $\bar{z}$ 为（　　）.

A. $2+i$　B. $2-i$　C. $5+i$　D. $5-i$

2. （新课标全国高考）若复数z满足 $(3-4i)z=|4+3i|$，则z的虚部为（　　）.

A. −4　B. $-\frac{4}{5}$　C. 4　D. $\frac{4}{5}$

3. （福建高考）若复数 z 满足 $zi=1-i$，则 z 等于（　　）.

A. $-1-i$　B. $1-i$

C. $-1+i$　D. $1+i$

4. （安徽高考）复数 z 满足 $(z-i)(2-i)=5$，则 $z=$（　　）.

A. $-2-2i$　B. $-2+2i$

C. $2-2i$　D. $2+2i$

5. （广东高考）设复数 z 满足 $(1+i)z=2$. 其中 i 为虚数单位，则 $z=$（　　）.

A. $1+i$　B. $1-i$

C. $2+2i$　D. $2-2i$

6. （江苏高考）设复数 z 满足 $i(z+1)=-3+2i$（i 为虚数单位），则 z 的实部是 ______.

数学笑话——1 万加 1 万等于几　小明家的狗很听话很聪明. 父亲问 1 加 1 等于几，狗就叫 2 声；2 加 2 等于几，狗就叫 4 声. 有一天邻居家的孩子一夜没睡觉，说小明家的狗疯了，叫了整整一夜. 父亲问小明怎么回事，小明说：“我就问了他一下 1 万加 1 万等于几……”

第一章 计数原理

模板 1 计数原理的应用 【每年必考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(山东高考)用 0,1,…,9 十个数字,可以组成有重复数字的三位数的个数为( ). A. 243 B. 252 C. 261 D. 279	本模板解决的是"应用计数原理求完成某件事的方法的个数"的问题.
解析:由题意可得,此题属于分步问题. 用 0,1,…,9 十个数字组成三位数(可有重复数字)的个数为 $9\times10\times10=900$,组成没有重复数字的三位数的个数为 $9\times9\times8=648$,则组成有重复数字的三位数的个数为 $900-648=252$,故选 B. **答案**:B	第一步 确定本题为"分步"问题. 第二步 根据分步乘法计数原理列出算式. 第三步 求出个数.

模板攻略

1. 模板解决思路

解决本模板问题首先要确定所给问题的类别.再根据问题类别采用相应的计数原理进行计算求出方法的个数.

2. 模板解决步骤

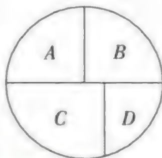
①第一步 确定所给问题是"分类"问题还是"分步"问题.

②第二步 根据分类加法计数原理或分步乘法计数原理列出算式.

③第三步 求出方法总数.

3. 典例例题

典例 1 如图,用五种不同的颜色分别给 A,B,C,D 四个区域涂色,相邻区域必须涂不同颜色,若允许同一种颜色多次使用,则不同的涂色方法共有 ______ 种.



解析:本题为"分步"问题. ①

按区域分四步:第一步 A 区域有 5 种颜色可选;

第二步 B 区域有 4 种颜色可选;

第三步 C 区域有 3 种颜色可选;

第四步由于 D 区域可以重复使用区域 A 中已有过的颜色,故也有 3 种颜色可选. ②

由分步乘法计数原理知,共有 $5\times4\times3\times3=180$(种)涂色方法. ③

答案:180

典例 2 (全国高考)将字母 a,a,b,b,c,c 排成三行两列,要求每行的字母互不相同,每列的字母也互不相同,则不同的排列方法共有( ).

A. 12 种 B. 18 种 C. 24 种 D. 36 种

解析:利用分步乘法计数原理求解. ①

数学笑话——抽象 朋友的一个朋友一次在餐馆里喝多了几杯,打烊快一个钟头了.服务员来提醒可以走人了.当时,那位大侠说了一句很雷人的话.他是这么说的:"你别惹我,不然我一拳把你打得很抽象."



先排第一列，因为每列的字母互不相同，因此共有6种不同的排法.
再排第二列，其中第二列第一行的字母共有2种不同的排法，第二列第二、三行的字母只有1种排法. ②
因此共有$6\times2\times1=12$(种)不同的排列方法. ③

答案：A

误区警示

用两个计数原理解决计数问题时，最重要的是在开始计算之前要进行仔细分析——需要分类还是需要分步.

知识要点

1. 分类加法计数原理

(1)分类加法计数原理

完成一件事有两类不同方案，在第1类方案中有m种不同的方法，在第2类方案中有n种不同的方法. 那么完成这件事共有$N=m+n$种不同的方法.

(2)推广

完成一件事有n类不同方案，在第1类方案中有m_1种不同的方法，在第2类方案中有m_2种不同的方法……在第n类方案中有m_n种不同的方法. 那么完成这件事共有

$$N=m_1+m_2+\cdots+m_n$$

种不同的方法.

特别提示

分类加法计数原理针对的是“分类”问题，完成一件事要分为若干类，各类中的各种方法相对独立，用任何一类中的任何一种方法都可以单独完成这件事.

2. 分步乘法计数原理

(1)分步乘法计数原理

完成一件事需要两个步骤，做第1步有m种不同的方法，做第2步有n种不同的方法，那么完成这件事共有$N=m\times n$种不同的方法.

(2)推广

完成一件事需要n个步骤，做第1步有m_1种不同的方法，做第2步有m_2种不同的方法……做第n步有m_n种不同的方法.那么完成这件事共有

$$N=m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$$

种不同的方法.

特别提示

分步计数原理针对的是“分步”问题，完成一件事要分为若干步，各个步骤相互依存，完成其中任何一步都不能完成该件事，只有当各个步骤都完成后，才算完成这件事.

3. 分类加法计数原理与分步乘法计数原理的联系与区别

(1)联系：分类加法计数原理和分步乘法计数原理，回答的都是有关做一件事的不同方法的种数问题.

(2)区别：分类加法计数原理针对的是“分类”问题，其中各种方法相对独立，用其中任何一种方法都可以做完这件事；分步乘法计数原理针对的是“分步”问题，各个步骤中的方法互相依存，只有各个步骤都完成才算做完这件事.

模板演练

→答案详见P458

1. (四川高考)方程$ay=b^2x^2+c$中的$a,b,c\in\{-3,-2,0,1,2,3\}$，且$a,b,c$互不相同，在所有这些方程所表示的曲线中，不同的抛物线共有(　　).

A. 60条　　B. 62条　　C. 71条　　D. 80条

2. (湖北高考)现有6名同学收听同时进行的5个课外知识讲座，每名同学可自由选择其中的一

数学笑话——查票　老教授搭乘火车旅行，列车长前来查票时，他竟找不到票，老教授急得满头大汗. 列车长说：“找不到就算了，再补张票好了.”

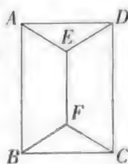
老教授回答：“这怎么可以，找不到那张票，我就不知道我要去哪里啊！”

个讲座,不同选法的种数是(　　).

A. 5^6　　B. 6^5

C. $\frac{5\times6\times5\times4\times3\times2}{2}$　　D. $6\times5\times4\times3\times2$

3. (天津高考)如图,用四种不同颜色给图中的 A, B, C, D, E, F 六个点涂色,要求每个点涂一种颜色,且图中每条线段的两个端点涂不同颜色,则不同的涂色方法有(　　).



A. 288 种　　B. 264 种

C. 240 种　　D. 168 种

4. 某通讯公司推出一组手机卡号码,卡号的前七位数字固定,从"××××××× 0000"到"××××××× 9999"共 10 000 个号码,公司规定:凡卡号的后四位带有数字"4"或"7"的一律作为"优惠卡",则这组号码中"优惠卡"的个数为(　　).

A. 2 000　　B. 4 096

C. 5 904　　D. 8 320

5. (北京高考)用数字 2,3 组成四位数,且数字 2,3 至少都出现一次,这样的四位数共有 ________ 个.(用数字作答)

6. 现有 5 幅不同的国画,2 幅不同的油画,7 幅不同的水彩画.

(1)从中任选一幅画布置房间,有几种不同的选法?

(2)从这些国画、油画、水彩画中各选一幅布置房间,有几种不同的选法?

(3)从这些画中选出两幅不同种类的画布置房间,有几种不同的选法?

模板 2　求特定条件下方法种数【5年20考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(重庆高考)从 3 名骨科、4 名脑外科和 5 名内科医生中选派 5 人组成一个抗震救灾医疗小组,则骨科、脑外科和内科医生都至少有 1 人的选派方法种数是 ______(用数字作答).	本模板解决的是"已知满足某种特定条件,求方法种数"的问题.
解析:按每科选派人数分 3,1,1 和 2,2,1 两类. 当选派人数为 3,1,1 时,有 3 类,共有 $C_3^3C_4^1C_5^1+C_3^1C_4^3C_5^1+C_3^1C_4^1C_5^3=200$(种). 当选派人数为 2,2,1 时,有 3 类,共有 $C_3^2C_4^2C_5^1+C_3^2C_4^1C_5^2+C_3^1C_4^2C_5^2=390$(种). 故共有 200+390=590(种). **答案**:590	第一步　将 3 科至少有 1 人转化成每科选派几人. 第二步　计算出不同情况下的方法种数. 第三步　求出总的方法种数.

数学笑话——教授说……　有一天某教授突然停止授课,语重心长地对大家说:"如果坐在中间聊天的同学,能像坐在后面玩牌的同学那样安静的话,那么在前面睡觉的同学就不会受到干扰了."



模板攻略

1. 模板解决思路

求方法种数的重难点是将特定条件转化为具体的排列组合问题. 需注意的是是否有顺序的要求,在分类计算中要做到不重不漏,这类问题大多是排列与组合知识的综合应用,做题时应注意计算的准确性.

2. 模板解决步骤

①第一步　按特定条件的要求,将问题转化为具体的排列组合问题.

②第二步　根据是否有顺序要求,利用排列数或组合数公式计算出不同情况的方法种数.

③第三步　将不同情况下的方法种数相加,求得方法总数.

3. 典例例题

典例 1　(浙江高考)若从 1,2,3,…,9 这 9 个整数中同时取 4 个不同的数,其和为偶数,则不同的取法共有(　　).

A. 60 种　B. 63 种　C. 65 种　D. 66 种

解析:共有 4 个不同的偶数和 5 个不同的奇数,要使和为偶数,则 4 个数全为奇数或全为偶数或 2 个奇数和 2 个偶数. ①

4 个数全为奇数时,有 C_5^4 种;

4 个数全为偶数时,有 C_4^4 种;

4 个数为 2 个奇数和 2 个偶数时,有 $C_5^2C_4^2$ 种. ②

故不同的取法共有 $C_5^4+C_4^4+C_5^2C_4^2=66$ 种. ③

答案:D

典例 2　(陕西高考)两人进行乒乓球比赛,先赢 3 局者获胜,决出胜负为止,则所有可能出现的情形(各人输赢局次的不同视为不同情形)共有(　　).

A. 10 种　B. 15 种　C. 20 种　D. 30 种

解析:由先赢 3 局获胜知比赛局数分为 3,4,5 三种情况. ①

3 局时有 A_2^2 种,

4 局时有 $A_2^2C_3^2$ 种,

5 局时有 $A_2^2C_4^2$ 种. ②

故共有 $A_2^2+A_2^2C_3^2+A_2^2C_4^2=20$ 种. ③

答案:C

知识要点

1. 排列

一般地,从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$个元素,按照一定的顺序排成一列,叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

2. 排列数

从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$个元素的所有不同排列的个数叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数,用符号 A_n^m 表示.

3. 排列数公式

$$A_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}.$$

这里 $n,m\in\mathbf{N}^*$ 并且 $m\leqslant n$. 这个公式叫作排列数公式.

4. 组合

一般地,从 n 个不同的元素中任取 $m(m\leqslant n)$个元素合成一组,叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合.

5. 组合数

从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$个元素的所有不同组合的个数,叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数,用符号 C_n^m 表示.

6. 组合数公式

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

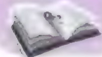
这里 $n,m\in\mathbf{N}^*$,并且 $m\leqslant n$. 这个公式叫作组合数公式.

规定:$C_n^0=1$.

7. 组合数的性质

性质 1:$C_n^m=C_n^{n-m}$

性质 2:$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$



数学笑话——作弊　老师公布成绩:"小华 30 分、小明 20 分……"
小伟:"我考 0 分耶!"小鹏:"怎么办? 我也是耶……"
小伟:"我们两个考同分,老师会不会以为我们作弊啊?"

模板演练

答案详见 P459

1. (山东高考)现有16张不同的卡片,其中红色、黄色、蓝色、绿色卡片各4张,从中任取3张,要求这3张卡片不能是同一种颜色,且红色卡片至多1张.不同取法的种数为(　　).

A. 232　B. 252　C. 472　D. 484

2. (全国高考)某校开设A类选修课3门,B类选修课4门,一位同学从中共选3门.若要求两类课程中各至少选一门,则不同的选法共有(　　).

A. 30种　B. 35种　C. 42种　D. 48种

3. 某同学有同样的画册2本,同样的集邮册3本,从中取出4本赠送给4位朋友,每位朋友1本,则不同的赠送方法共有(　　).

A. 4种　B. 10种　C. 18种　D. 20种

4. 从5名男医生、4名女医生中选3名医生组成一个医疗小分队,要求其中男、女医生都有,则不同的组队方案共有(　　).

A. 70种　B. 80种

C. 100种　D. 140种

5. 将4名大学生分配到3个乡镇去当村官,每个乡镇至少一名,则不同的分配方案有______种(用数字作答).

6. 7名志愿者中安排6人在周六、周日两天参加社区公益活动.若每天安排3人,则不同的安排方案共有______种(用数字作答).

模板3　特殊元素(位置)问题【5年4考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(北京高考)从0,2中选一个数字,从1,3,5中选两个数字,组成无重复数字的三位数,其中奇数的个数为(　　). A. 24　B. 18　C. 12　D. 6	本模板解决的是"从n个元素中选出m个元素排成一列,其中某元素(或位置)有特殊要求,则排列的种数为多少"的问题.
解析:若选0,则0只能在十位, 此时组成的奇数的个数是$A_3^2=6$; 若选2,则2只能在十位或百位, 此时组成的奇数的个数是$2\times A_3^2=12$. 根据分类加法计数原理得奇数的个数为6+12=18. **答案**:B	第一步　因为组成三位数的奇数,所以0不能在百位和个位,2不能在个位,选0则只能在十位,选2则只能在十位或百位. 第二步　求出其余元素的排列个数. 第三步　将所有可能个数相加,求得总个数.

模板攻略

1. 模板解决思路

解决特殊元素(位置)问题的关键是对特殊元素(位置)的讨论和排列.对于特殊元素(位置)排列的每一种情况,再求其他元素排列的种数,最后求



出总的种数.

2. 模板解决步骤

①第一步　首选确定特殊元素(或位置)的排列种数.

②第二步　确定剩余元素(或位置)的排列种数.

③第三步　求出总的排列种数.

3. 典型例题

典例 1　(山东高考)某台小型晚会由 6 个节目组成,演出顺序有如下要求:节目甲必须排在前两位,节目乙不能排在第一位,节目丙必须排在最后一位,该台晚会节目演出顺序的方案共有(　　).

A. 36 种　　B. 42 种　　C. 48 种　　D. 54 种

解析:若甲排在第一位则有A_4^4种方案,若甲排在第二位则有$C_3^1A_3^3$种方案,　①~②

所以按照要求该台晚会节目演出顺序的编排方案共有$A_4^4+C_3^1A_3^3=42$(种),故选 B.　③

答案:B

典例 2　(湖北高考)现安排甲、乙、丙、丁、戊 5 名同学参加上海世博会志愿者服务活动,每人从事翻译、导游、礼仪、司机四项工作之一,每项工作至少有一人参加.甲、乙不会开车但能从事其他三项工作,丙、丁、戊都能胜任四项工作,则不同安排方案的种数是(　　).

A. 152　　B. 126　　C. 90　　D. 54

解析:按从事司机工作的人数进行分类:

(1)有1人从事司机工作:

$C_3^1\cdot C_4^2\cdot A_3^3$(或$C_3^1C_3^1C_4^2A_2^2$)=108(种);

(2)有2人从事司机工作:$C_3^2\cdot A_3^3=18$(种).　①~②

∴不同安排方案的种数是108+18=126(种).　③

答案:B

知识要点

1. 解排列组合综合问题应遵循的原则

先分类后分步;先选后排;先组合后排列;有限制条件的优先;限制条件多的优先;避免重复和遗漏.

2. 解排列组合综合问题时要注意

(1)分清分类加法计数原理与分步乘法计数原理:主要看是"独立"完成,还是"分步"完成.

(2)分清排列问题与组合问题:主要看是否与"顺序"有关.

(3)分清是否有限制条件:被限制的元素称为特殊元素,被限制的位置称为特殊位置.

解这类问题通常从以下三种途径考虑:

①以元素为主考虑,即先满足特殊元素的要求,再考虑其他元素;

②以位置为主考虑,即先满足特殊位置的要求,再考虑其他位置;

③先不考虑限制条件,计算出排列或组合数,再减去不合要求的排列或组合数.

要特别注意既不要重复,也不要遗漏.

模板演练

➜ 答案详见 P459

1. 6 位选手依次演讲,其中选手甲不在第一个也不在最后一个演讲,则不同的演讲次序共有(　　).

   A. 240 种　　B. 360 种　　C. 480 种　　D. 720 种

2. 从 10 名大学毕业生中选 3 人担任村长助理,则甲、乙至少有 1 人入选,而丙没有入选的不同选法的种数为(　　).

   A. 85　　B. 56　　C. 49　　D. 28

3. 从 6 名志愿者中选出 4 人分别从事翻译、导游、导购、保洁四项不同的工作,若其中甲、乙两名志愿者不能从事翻译工作,则选派方案共有(　　).

   A. 280 种　　B. 240 种

凯尔微博



自己救自己(一)　某人在屋檐下躲雨,看见观音正撑伞走过.这人说:"观音菩萨,普度一下众生吧,带我一段如何?"观音说:"我在雨里,你在檐下,而檐下无雨,你不需要我度."这人立刻跳出檐下,站在雨中:"现在我也在雨中了,该度我了吧?"观音说:"你在雨中,我也在雨中,我不被淋,因为有伞;你被雨淋,因为无伞.所以不是我度自己,而是伞度我.你要想度,不必找我,请自找伞去!"

C. 180 种　　D. 96 种

4. 从 6 名男生和 2 名女生中选出 3 名志愿者，其中至少有 1 名女生的选法共有(　　).

A. 36 种　B. 30 种　C. 42 种　D. 60 种

5. 某校开设 9 门课程供学生选修，其中 A,B,C 三门由于上课时间相同，至多选一门.学校规定，每位同学选修 4 门，共有 ______ 种不同选修方案(用数字作答).

模板 4　相邻问题【5年6考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(全国高考)将标号为 1,2,3,4,5,6 的 6 张卡片放入 3 个不同的信封中，若每个信封放 2 张，其中标号为 1,2 的卡片放入同一信封，则不同的方法共有(　　). A. 12 种　B. 18 种　C. 36 种　D. 54 种	本模板解决的是“从 n 个元素中选出 m 个元素，其中若干个要求相邻，求排列种数”的问题.
解析：第一步，从 3 个信封中挑选 1 个信封放置标号为 1,2 的卡片，有 C_3^1 种不同的放法； 第二步，将标号为 3,4,5,6 的 4 张卡片放入另外 2 个信封中，每个信封放 2 个，有 $C_4^2C_2^2$ 种不同的放法. 由分步计数原理得，所求的不同的放法数 $N=C_3^1C_4^2C_2^2=18$. **答案**：B	第一步　将 1,2 卡片放在一起，求出其放法种数. 第二步　求出其他卡片的放法种数. 第三步　求出总的放法数.

模板攻略

1. 模板解决思路

对于相邻问题，一般采用“捆绑法”解决，即将相邻的元素看作是一个整体，再与其他元素放在一起考虑. 如果涉及到顺序，则还应考虑相邻元素的顺序问题，再与其他元素放在一起进行计算.

2. 模板解决步骤

①第一步　把相邻元素看作一个整体(捆绑法)，求出排列种数.

②第二步　求出其余元素的排列种数.

③第三步　求出总的排列种数.

3. 典型例题

典例 1　(辽宁高考)一排 9 个座位坐了 3 个三口之家，若每家人坐在一起，则不同的坐法种数为(　　).

A. $3\times3!$　B. $3\times(3!)^3$　C. $(3!)^4$　D. $9!$

解析：先把 3 个家庭分别排列，每个家庭有 $A_3^3=3!$ 种排法，3 个家庭共有 $3!\times3!\times3!=(3!)^3$ 种排法；①

再把 3 个家庭进行全排列有 $A_3^3=3!$ 种排法.②

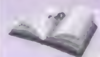
因此不同的坐法种数为 $(3!)^4$，选 C.③

答案：C

误区警示

除了将每个家庭看作一个整体进行排列外，还应注意到每个家庭中，3人座次的改变也会影响排列的种数.

自己救自己(二)　观音说完便走了. 第二天，这人遇到了难事，便去寺庙里求观音. 走进庙里，才发现观音的像前也有一个人在拜，那个人长得和观音一模一样，丝毫不差. 这人问：“你是观音吗？”那人答道：“我正是观音.”这人又问：“那你为何还拜自己？”观音笑道：“我也遇到了难事，但我知道，求人不如求己.”



典例 2 (北京高考)将序号分别为 1,2,3,4,5 的 5 张参观券全部分给 4 人,每人至少 1 张.如果分给同一人的 2 张参观券连号,那么不同的分法种数是 ______.

解析:将5张参观券分成4份,且有2张参观券连号,共有4种分法, ①

再将4份参观券进行全排列有$A_4^4=24$种. ②

因此不同的分法种数是4×24=96种. ③

答案:96

模板演练

答案详见 P460

1. (重庆高考)某单位安排 7 位员工在 10 月 1 日到 7 日值班,每天安排一人,每人值班 1 天.若 7 位员工中的甲、乙排在相邻两天,丙不排在 10 月 1 日,丁不排在 10 月 7 日,则不同的安排方案共有( ).
   A. 504 种 B. 960 种
   C. 1 008 种 D. 1 108 种
2. 记者要为 5 名志愿者和他们帮助的 2 位老人拍照,要求排成一排,2 位老人相邻但不排在两端,不同的排法共有( ).
   A. 1 440 种 B. 960 种
   C. 720 种 D. 480 种
3. 在航天员进行的一项太空实验中,要先后实施 6 个程序,其中程序 A 只能出现在第一或最后一步,程序 B 和 C 在实施时必须相邻,问实验顺序的编排方法共有( ).
   A. 34 种 B. 48 种
   C. 96 种 D. 144 种
4. 两家夫妇各带一个小孩一起到动物园游玩,购票后排队依次入园,为安全起见,首尾一定要排两位爸爸,另外,两个小孩一定要排在一起,则这 6 人的入园顺序排法种数为( ).
   A. 48 种 B. 36 种 C. 24 种 D. 12 种
5. 某校从 8 名教师中选派 4 名去某个偏远地区支教,其中甲和乙只能都去或都不去,则不同的选派方案有 ______ 种.(用数字作答)

模板 5 不相邻问题 【5年5考】

模板探究

母 题 呈 现	模 板 引 入
(北京高考)8 名学生和 2 位老师站成一排合影,2 位老师不相邻的排法种数为( ). A. $A_8^8A_9^2$ B. $A_8^8C_9^2$ C. $A_8^8A_7^2$ D. $A_8^8C_7^2$	本模板解决的是"从 n 个元素中选出 m 个元素,其中若干个要求不相邻,求排列种数"的问题.
解析:不相邻问题用插空法. 8 名学生先排有A_8^8种排法,产生 9 个空,2 位老师插空有 A_9^2 种排法, 所以共有 $A_8^8A_9^2$ 种排法. 故选 A. 答案:A	第一步 将无要求的 8 名学生进行全排列. 第二步 8 名学生产生 9 个空(包含首尾),选出 2 个空给老师站,并排列. 第三步 求出排法种数.

凯尔微博



数学比喻(一) 许多名人喜欢用数学比喻,往往出语幽默、诙谐,好比深山闻钟,使人记忆久远. 古希腊拓扑学家芝诺号称"悖论之父",他有四个数学悖论一直传到今天. 他说:"大圆圈比小圆圈掌握的知识要多一点,但因为大圆圈的圆周比小圆圈的长,所以它与外界空白的接触也就比小圆圈大,因此更感到知识的不足,需要努力去学习."

模板攻略

1. 模板解决思路

对于不相邻问题一般采用“插空法”解决，即先将无要求的元素进行全排列，然后将要求不相邻的元素插入到已排列的元素之间，最后进行计算即可.

2. 模板解决步骤

①第一步　先考虑不受限制的元素的排列种数.

②第二步　再将不相邻的元素插入到已排列元素的空当中(插空法)，求出排列种数.

③第三步　求出总的排列种数.

3. 典型例题

典例 1　(四川高考)3 位男生和 3 位女生共 6 位同学站成一排，若男生甲不站两端，且 3 位女生中有且仅有两位女生相邻，则不同的排法共有(　　)种.

A. 360　　B. 288

C. 216　　D. 96

解析：先只考虑 3 位女生中有且只有 2 位相邻的情况：

3 位男生的排法种数为 A_3^3.　①

2 位女生相邻视为一个整体，排法种数为 $C_3^2A_2^2$，再加上不相邻的女生插入到 3 位男生形成的 4 个空中，即 $(C_3^2A_2^2)A_4^2$.　②

共有排法 $A_3^3\cdot(C_3^2A_2^2)A_4^2=432$(种).　③

再考虑其中甲站在两端的情况，共有 $(A_2^2\cdot2)\cdot(C_3^2A_2^2)A_3^2=144$(种).

则满足题意的排法有 432−144=288(种).

答案：B

误区警示

3位女生中有且只有2位女生相邻的意思是2位女生相邻，且与另一位女生不相邻.要正确理解题意，以免出错.

典例 2　高三某班 6 名同学站成一排照相，同学甲、乙不能相邻，并且甲在乙的右边，则不同的排法种数共有(　　).

A. 120　　B. 240

C. 360　　D. 480

解析：先将其他4名同学排好有 A_4^4 种方法.　①

然后将甲、乙两名同学插空，又甲、乙两人顺序一定且不相邻，有 C_5^2 种方法，　②

所以共有 $A_4^4\cdot C_5^2=240$ 种排法.　③

答案：B

模板演练

➡ 答案详见 P460

1. 某城市一条道路上有 12 盏路灯，为了节约用电而又不影响正常的照明，可以熄灭其中三盏灯，但两端路灯不能熄灭，也不能熄灭相邻的两盏灯，那么熄灯方法共有(　　).

   A. C_8^3 种　　B. A_8^3 种

   C. C_9^3 种　　D. A_9^3 种

2. 7 位同学站成一排，甲、乙、丙三个同学互不相邻的排法共有 ______ 种.

3. 某商店要求甲、乙、丙、丁、戊五种不同的商品在货架上排成一排，其中甲、乙两种必须排在一起，而丙、丁两种不能排在一起，不同的排法共有 ______ 种.

4. 用 1，2，3，4，5，6 组成六位数(没有重复数字)，要求任何相邻两个数字的奇偶性不同，且 1 和 2 相邻，这样的六位数的个数是 ______.(用数字作答)

数学比喻(二)　美国作家杰克·伦敦曾收到一位女士的求爱信：“你有出众的名声，我有高贵的地位，这两者加起来再乘上万能的黄金，足以使我们建立起一个天堂都不能比拟的美满家庭.”杰克·伦敦连忙回信，他答得很妙：“根据你列出的那道爱情公式，我看还要开平方，不过这个平方根却是负数.”



模板 6　分组问题【5年3考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(江西高考)6位志愿者分成4组,其中两个组各2人,另两组各1人,分赴世博会的四个不同场馆服务,不同的分配方案有________种(用数字作答).	本模板解决的是"将 n 个元素按一定要求分成 m 组,求排列种数"的问题.
解析:将6名志愿者按要求分成4组共有 $\frac{C_6^2C_4^2C_2^1}{A_2^2A_2^2}$ 种. 故不同的分配方案有 $\frac{C_6^2C_4^2C_2^1}{A_2^2A_2^2}\cdot A_4^4=\frac{15\times6\times2}{2\times2}\times24=1\ 080$. **答案**:1 080	第一步　将6名志愿者分成4组. 第二步　删去其中重复的组数. 第三步　再由分配到四个不同场馆,求出总的排列种数.

模板攻略

1. 模板解决思路

解决分组问题的关键是如何删去重复排列的组数.一般来讲,若为平均分组,则应用 n 个元素分组得到的排列种数除以组数的全排列;若为不平均分组,则应按照实际情况分析重复排列的种数,然后再进行相应计算.

2. 模板解决步骤

①第一步　将所给的 n 个元素分组.

②第二步　去掉排列造成的重复.

③第三步　求出总的排列种数.

3. 典型例题

典例1　某校在高二年级开设选修课,其中数学选修课开了三个班.选课结束后,有四名选修英语的同学要求改修数学,但数学选修每班至多可再接收两名同学,那么安排这四名同学的方案有(　　).

A. 72种　　B. 54种

C. 36种　　D. 18种

解析:将四名同学分成三组:1,1,2,安排在三个数学班中:有 $C_4^2A_3^3=36$(种);分成两组:2,2,安排在两个班里,有 $\frac{C_4^2C_2^2}{2}\cdot A_3^2=18$(种).　①~②

故一共有 36+18=54(种)安排方案.　③

答案:B

典例2　12名同学分别到三个不同的路口进行车流量的调查,若每个路口4人,则不同的分配方案共有(　　).

A. $C_{12}^4C_8^4C_4^4$种　　B. $2C_{12}^4C_8^4C_4^4$种

C. $C_{12}^4C_8^4A_3^3$种　　D. $\frac{C_{12}^4C_8^4C_4^4}{A_3^3}$种

解析:将12名同学分成3组共有 $\frac{C_{12}^4C_8^4C_4^4}{A_3^3}$ 种方案.　①~②

故将12名同学分配到不同的路口共有 $\frac{C_{12}^4C_8^4C_4^4}{A_3^3}\cdot A_3^3=C_{12}^4C_8^4C_4^4$ 种方案.　③

答案:A

误区警示

将12名同学分成3组完成后,不要遗漏将其分配到3个不同的路口上,故还应乘以 A_3^3.



凯尔微博

要学会做学习的主人(一)　时代要求我们具有创新的意识,在虚心听取他人意见的同时,也要敢于表达自己的想法.你敢提出问题吗?我们在课堂上,既要做到专心听讲、对其他同学的答案敢于发表自己的见解,还要能够积极思考,勇于提出问题.要知道,提出一个问题往往比解答一个问题更有意义.在学习过程中产生疑问,这是极为正常的现象.

模板演练

➡ 答案详见 P460

1. 将 4 名司机和 8 名售票员分配到四辆公共汽车上，每辆车上分别有 1 名司机和 2 名售票员，则可能的分配方案种数是(　　).

A. $C_8^2C_6^2C_4^2A_4^4A_4^4$　　B. $A_8^2A_6^2A_4^2A_4^4$

C. $C_8^2C_6^2C_4^2A_4^4$　　D. $C_8^2C_6^2C_4^2$

2. 国家教育部为了发展贫困地区教育，在全国重点师范大学免费培养教育专业师范生，毕业后要分到相应的地区任教. 现在 6 个免费培养的教育专业师范毕业生要平均分到 3 所学校去任教，有 ______ 种不同的分派方法.

3. 将 6 名教师分到 3 所中学任教，一所 1 名，一所 2 名，一所 3 名，则有 ______ 种不同的分法.

4. 按下列要求分配 6 本不同的书，各有多少种不同的分配方式?

(1)分成三份，1 份 1 本，1 份 2 本，1 份 3 本；

(2)甲、乙、丙三人中，一人得 1 本，一人得 2 本，一人得 3 本；

(3)平均分成三份，每份 2 本；

(4)平均分配给甲、乙、丙三人，每人 2 本；

(5)分成三份，1 份 4 本，另外两份每份 1 本；

(6)甲、乙、丙三人中，一人得 4 本，另外两人每人得 1 本；

(7)甲得 1 本，乙得 1 本，丙得 4 本.

模板 7　求二项展开式中的特定项系数【5年18考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(天津高考)在$\left(2x^2-\dfrac{1}{x}\right)^5$的二项展开式中，$x$ 的系数为(　　). A. 10　B. −10　C. 40　D. −40	本模板解决的是“求二项式中满足条件 p 的项的系数”的问题.
解析：$T_{k+1}=C_5^k(2x^2)^{5-k}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^k=(-1)^k\cdot 2^{5-k}\cdot C_5^k\cdot x^{10-3k}$， 令$10-3k=1$，得$k=3$. $\therefore x$的系数为$(-1)^3\cdot 2^{5-3}\cdot C_5^3=-40$.故选D. **答案**：D	第一步　写出二项式的通项，并化简. 第二步　令 x 的指数等于 1，求出 k. 第三步　将 k 的值代入，求出 x 的系数.

选修 2-3

要学会做学习的主人(二)　如果我们从自己这方面来分析，有可能是因为自己原有的知识基础还存在着一些缺陷，影响了对新知识的理解而产生困扰. 也有可能是对学习的内容产生了某种联想，于是又产生了新的问题. 无论是前者还是后者，都要敢于把问题提出来. 我们应该具有这种勇于发问探究真理的精神.



模板攻略

1. 模板解决思路

求二项展开式中的特定项系数的关键是求出满足条件的 k 的值，因此应通过求出其二项展开式的通项，然后根据条件 p 列出方程，解出 k 值，最后代入通项中，求出特定的系数.

2. 模板解决步骤

①第一步　根据二项式定理求出二项展开式的通项，并化简.

②第二步　利用条件 p，列出方程，找到特定项.

③第三步　计算出特定项的系数.

3. 典型例题

典例 1　(福建高考)若 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中第3项与第7项的二项式系数相等，则该展开式中 $\frac{1}{x^2}$ 的系数为________.

解析：因为展开式中的第 3 项和第 7 项的二项式系数相同，即 $C_n^2=C_n^6$，所以 $n=8$，

所以展开式的通项为 $T_{k+1}=C_8^k x^{8-k}\left(\frac{1}{x}\right)^k=C_8^k x^{8-2k}$，　①

令 $8-2k=-2$，解得 $k=5$，　②

所以 $T_6=C_8^5\left(\frac{1}{x}\right)^2$，所以 $\frac{1}{x^2}$ 的系数为 $C_8^5=56$.　③

答案：56

误区警示

二项式系数即为 C_n^k，这与展开式项的系数是不同的，做题时应注意区分，避免混淆出错.

典例 2　(四川高考) $(1+x)^7$ 的展开式中 x^2 的系数是(　　).

A. 42　　B. 35　　C. 28　　D. 21

解析：展开式通项为 $T_{k+1}=C_7^k x^k$，　①

$\therefore k=2$ 时，$T_3=C_7^2x^2$.　②

$\therefore x^2$ 的系数为 $C_7^2=21$.　③

答案：D

知识要点

二项式定理

$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b^1+\cdots+C_n^ka^{n-k}b^k+\cdots+C_n^nb^n(n\in\mathbf{N}^*)$

这个公式叫作二项式定理. 右边的多项式叫作 $(a+b)^n$ 的二项展开式，它一共有 $n+1$ 项，其中各项的系数 $C_n^k(k\in\{0,1,\cdots,n\})$ 叫作二项式系数，式中的 $C_n^ka^{n-k}b^k$ 叫作二项展开式的通项，用 T_{k+1} 表示，即通项为展开式的第 $k+1$ 项：

$T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k$.

特别提示

(1) $(a+b)^n$ 的二项展开式的各项都是 n 次式，即展开式应有下面形式的各项：

$a^n, a^{n-1}b, \cdots, a^{n-k}b^k, \cdots, b^n$.

(2)二项式定理中，设 $a=1, b=x$ 则

$(1+x)^n=1+C_n^1x+\cdots+C_n^kx^k+\cdots+x^n$.

选修 2-3

模板演练

➡答案详见 P461

1. (福建高考) $(1+2x)^5$ 的展开式中，x^2 的系数等于(　　).

A. 80　　B. 40　　C. 20　　D. 10

2. (天津高考)在 $\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的二项展开式中，x^2 的系数为(　　).



要学会做学习的主人(三)　要重视操作实践. 数学知识的理解与掌握，离不开操作与实践，操作可以把抽象的数学知识转化成智力活动. 通过手、眼、口、耳多种器官的协同“作战”，促使我们大脑左右两个半球的和谐发展，有利于培养创新与实践能力. 要珍惜每一次数学课操作与实践的机会.

A. $-\frac{15}{4}$　B. $\frac{15}{4}$　C. $-\frac{3}{8}$　D. $\frac{3}{8}$

3.（四川高考）二项式$(x+y)^5$的展开式中，含x^2y^3的项的系数是______.(用数字作答)

4.（广东高考）$\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^6$的展开式中$x^3$的系数为______.(用数字作答)

5.（湖北高考）$\left(x-\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$的展开式中含$x^{15}$的系数为______.(结果用数值表示)

6.（广东高考）$x\left(x-\frac{2}{x}\right)^7$的展开式中，$x^4$的系数是______.(用数字作答)

模板8　求二项展开式中的常数项【5年12考】

模板探究

母题呈现	模板引入
（江西高考）$\left(x^2-\frac{2}{x^3}\right)^5$展开式中的常数项为(　　). A. 80　B. −80　C. 40　D. −40	本模板解决的是“求某二项式的展开式中的常数项”的问题.
解析：此二项展开式的通项为 $T_{k+1}=C_5^k(x^2)^{5-k}\left(-\frac{2}{x^3}\right)^k=C_5^k\cdot(-1)^k\cdot 2^k\cdot x^{10-5k}$, 因为$10-5k=0$，所以$k=2$. 所以常数项为$T_3=C_5^2\cdot 2^2=40$. **答案：**C	第一步　写出二项展开式的通项，并化简. 第二步　令x的指数为0，求得k值. 第三步　将k值代入通项，求得常数项.

模板攻略

1. 模板解决思路

本模板解决的关键在于正确将二项展开式的通项化到最简形式，即含有未知数的同类项要合并到一起，然后令其指数等于0，求得k值，再回代计算即可.

2. 模板解决步骤

1 第一步　写出二项展开式的通项，合并含未知数的同类项.

2 第二步　令未知数的指数为0，求得k值.

3 第三步　将k值代入通项中，求出常数项.

3. 典型例题

典例1　（重庆高考）$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^8$的展开式中常数项为(　　).

A. $\frac{35}{16}$　B. $\frac{35}{8}$　C. $\frac{35}{4}$　D. 105

解析：$T_{k+1}=C_8^k(\sqrt{x})^{8-k}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^k=\frac{1}{2^k}C_8^k x^{4-k}$.　①

令$4-k=0$，得$k=4$.　②

∴常数项为$T_5=\frac{1}{2^4}C_8^4=\frac{35}{8}$.　③

答案：B

误区警示

将k值回代求常数项时，不能只计算C_8^k，遗漏$\frac{1}{2^k}$，导致出错.

典例2　（浙江高考）设二项式$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^5$的

选修2-3

要学会做学习的主人（四）　任何一项发明与创造，除了个人的努力外，还必须依靠集体的协作，这是人类社会发展的需要. 现代社会要求人们在激烈竞争的同时，更需要进行广泛的、多方面的合作. 竞争与合作是相辅相成、相互依存的，我们要学会在竞争中与同学合作. 合作精神也是学生素质教育的重要内容.



展开式中常数项为 A，则 $A=$______.

解析：$T_{k+1}=C_5^k\cdot(\sqrt{x})^{5-k}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^k=C_5^k(-1)^k x^{\frac{5}{2}-\frac{5}{6}k}$. ①

令 $\frac{5}{2}-\frac{5}{6}k=0$，得 $k=3$. ②

$\therefore A=T_4=C_5^3(-1)^3=-10$. ③

答案：-10

模板演练

➡ 答案详见 P461

1.（陕西高考）设函数 $f(x)=\begin{cases}\left(x-\frac{1}{x}\right)^6, x<0,\\ -\sqrt{x}, x\geq 0,\end{cases}$ 则当 $x>0$ 时，$f[f(x)]$ 表达式的展开式中常数项为（　　）.

A. -20　　B. 20

C. -15　　D. 15

2.（安徽高考）$(x^2+2)\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^5$ 的展开式的常数项是（　　）.

A. -3　　B. -2　　C. 2　　D. 3

3.（陕西高考）$(4^x-2^{-x})^6(x\in\mathbf{R})$ 展开式中的常数项是（　　）.

A. -20　　B. -15　　C. 15　　D. 20

4.（天津高考）$\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的二项展开式中的常数项为______.

5.（上海高考）在 $\left(x-\frac{2}{x}\right)^6$ 的二项展开式中，常数项等于______.

6.（辽宁高考）$(1+x+x^2)\left(x-\frac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项为______.

模板9　求二项式中参数的值【5年10考】

模板探究

母题呈现	模板引入
（安徽高考）若 $\left(x+\frac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$ 的展开式中 x^4 的系数为7，则实数 $a=$______.	本模板解决的是"已知含参数的二项式满足条件 p，求参数的值"的问题.
解析：$T_{k+1}=C_8^k x^{8-k}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^k=C_8^k\cdot a^k\cdot x^{8-\frac{4}{3}k}$， 由 $8-\frac{4}{3}k=4$，得 $k=3$. 故 $C_8^3\cdot a^3=7$，解得 $a=\frac{1}{2}$. 答案：$\frac{1}{2}$	第一步　写出二项展开式的通项. 第二步　利用 x^4 的系数为7，求得 k 的值，列出关于 a 的方程. 第三步　解出 a 的值.

模板攻略

1. 模板解决思路

求二项式中参数的值的难点在于将条件 p 转化成关于未知数的方程，其思路是利用通项公式求出满足条件的项数，列出含有参数的方程，再求解.

2. 模板解决步骤

①第一步　写出二项展开式的通项.

②第二步　利用条件 p，得到关于参数的方程.

③第三步　解方程，得参数的值.

3. 典型例题

典例 1　(新课标全国高考)设 m 为正整数，$(x+y)^{2m}$ 展开式的二项式系数的最大值为 a，$(x+y)^{2m+1}$ 展开式的二项式系数的最大值为 b.若 $13a=7b$，则$m=$(　　).

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

解析：由题意得：$a=C_{2m}^{m}, b=C_{2m+1}^{m}$，所以$13C_{2m}^{m}=7C_{2m+1}^{m}$，

$\therefore \frac{13\cdot(2m)!}{m!\cdot m!}=\frac{7\cdot(2m+1)!}{m!\cdot(m+1)!}$，　①~②

$\therefore \frac{7(2m+1)}{m+1}=13$，解得$m=6$，

经检验为原方程的解，故选B.　③

答案：B

典例 2　(浙江高考)设二项式$\left(x-\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^6(a>0)$的展开式中 x^3 的系数为 A，常数项为 B. 若 $B=4A$，则 a 的值是 ______.

解析：对于 $T_{k+1}=C_6^k x^{6-k}\left(-\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^k=C_6^k(-a)^k x^{6-\frac{3}{2}k}$，　①

$B=C_6^4(-a)^4=15a^4, A=C_6^2(-a)^2=15a^2$. $\because B=4A, a>0$，　②

$\therefore a=2$.　③

答案：2

误区警示　本题要注意参数 $a>0$ 的条件限制，不要误填±2.

知识要点

二项式系数的性质

(1)对称性：与首末两端“等距离”的两个二项式系数相等. 即$C_n^m=C_n^{n-m}$.

(2)增减性与最大值：当 $k<\frac{n+1}{2}$ 时，二项式系数是逐渐增大的. 由对称性知它的后半部分是逐渐减小的，且在中间取得最大值. 当 n 是偶数时，中间的一项$C_n^{\frac{n+1}{2}}$取得最大值；当 n 是奇数时，中间的两项$C_n^{\frac{n-1}{2}}$，$C_n^{\frac{n+1}{2}}$相等，且同时取得最大值.

(3)各二项式系数的和：$2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n$. 即 $(a+b)^n$ 的展开式的各个二项式系数的和等于 2^n.

(4)奇数项的二项式系数的和等于偶数项的二项式系数的和，都等于 2^{n-1},即

$C_n^0+C_n^2+C_n^4+\cdots=C_n^1+C_n^3+C_n^5+\cdots=2^{n-1}$.

模板演练

→ 答案详见 P462

1. (新课标全国高考)已知$(1+ax)(1+x)^5$的展开式中 x^2 的系数为 5，则 $a=$(　　).

A. −4　　B. −3　　C. −2　　D. −1

2. (重庆高考)$(1+3x)^n$(其中 $n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant6$)的展开式中 x^5 与 x^6 的系数相等，则 $n=$(　　).

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

3. 若$(1+\sqrt{3})^4=a+b\sqrt{3}$($a,b$ 为有理数)，则 $a+b=$(　　).

A. 36　　B. 46　　C. 34　　D. 44

4. (福建高考)$(a+x)^4$ 的展开式中 x^3 的系数等于8，则实数 $a=$______.

5. (山东高考)若$\left(x-\frac{\sqrt{a}}{x^2}\right)^6$展开式的常数项为 60，则常数 a 的值为 ______.

6. 若$\left(x-\frac{a}{x}\right)^9$的展开式中 x^3 的系数是−84，则 $a=$______.

要学会做学习的主人(六)　再之，在学习的过程中，为了达到预期的某个目标，难免会遇到这样或那样的障碍. 面对困难，我们是动摇退缩、半途而废，还是坚韧不拔、勇往直前呢？这对我们的意志是一个考验. 我们要自觉地抓住这些机会，磨炼自己克服困难、经受挫折的意志，这将会使我们终身受益.



模板 1 求离散型随机变量的分布列【每年必考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(浙江高考节选) 设袋子中装有 a 个红球,b 个黄球,c 个蓝球,且规定:取出一个红球得 1 分,取出一个黄球得 2 分,取出一个蓝球得 3 分. 当 $a=3,b=2,c=1$ 时,从该袋中任取(有放回,且每球取到的机会均等)2 个球,记随机变量 ξ 为取出此 2 球所得分数之和,求 ξ 的分布列.	本模板解决的是"已知试验是离散型分布,求随机变量的分布列"的问题.
解:由题意得 $\xi=2,3,4,5,6$. 故 $P(\xi=2)=\frac{3\times3}{6\times6}=\frac{1}{4}$, $P(\xi=3)=\frac{2\times3\times2}{6\times6}=\frac{1}{3}$, $P(\xi=4)=\frac{2\times3\times1+2\times2}{6\times6}=\frac{5}{18}$, $P(\xi=5)=\frac{2\times2\times1}{6\times6}=\frac{1}{9}$, $P(\xi=6)=\frac{1\times1}{6\times6}=\frac{1}{36}$. 所以 ξ 的分布列为 ξ: 2, 3, 4, 5, 6 P: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{36}$	第一步 写出变量 ξ 的所有取值. 第二步 分别求出 $\xi=2,3,4,5,6$ 时的概率. 第三步 列出 ξ 的分布列.

模板攻略

1. 模板解决思路

求离散型随机变量的分布列首先要准确找出随机变量的所有可能取值,然后根据随机变量的分布特点求出对应的概率,最后列出分布列. 可以通过将各取值概率相加看其和是否为 1 来判断分布列的准确性.

2. 模板解决步骤

①第一步 确定随机变量 X 的所有可能取值 x_i.

②第二步 求出 X 取每一个值的概率 $P(X=x_i)=p_i$.

③第三步 列出分布列.

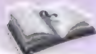
3. 典型例题

典例 1 在 10 件产品中,有 3 件一等品,4 件二等品,3 件三等品. 从这 10 件产品中任取 3 件,求取出的 3 件产品中一等品件数 X 的分布列.

解:X 的可能取值为 0,1,2,3. ①

$P(X=0)=\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{24}$;

$P(X=1)=\frac{C_3^1C_7^2}{C_{10}^3}=\frac{21}{40}$;



概率论的内容(一) 概率论作为一门数学分支,它所研究的内容一般包括随机事件的概率、统计独立性和更深层次上的规律性. 概率是随机事件发生的可能性的数量指标. 在独立随机事件中,如果某一事件在全部事件中出现的频率,在更大的范围内比较明显的稳定在某一固定常数附近,就可以认为这个事件发生的概率为这个常数.

$P(X=2)=\frac{C_3^2C_7^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{40}$；

$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}$.　②

∴X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$

③

典例 2　将 3 个乒乓球任意地放入 4 个盒子中，记 4 个盒子中球的最多个数为 X，求 X 的分布列.

解：盒中球的最多个数X的所有可能值为$X=1,2,3$三种情况，即3个盒子中每盒1个球，另有1盒空着；有1盒2球，1盒1球，另2盒空着；有1盒3球，另3盒空着.　①

当$X=1$时，$P(X=1)=\frac{A_4^3}{4^3}=\frac{3}{8}$；

当$X=2$时，$P(X=2)=\frac{C_3^2C_4^1C_3^1}{4^3}=\frac{9}{16}$；

当$X=3$时，$P(X=3)=\frac{C_4^1}{4^3}=\frac{1}{16}$.　②

故X的分布列为：

X	1	2	3
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{16}$

③

知识要点

1. 随机变量

随着试验结果变化而变化的变量称为随机变量. 随机变量常用字母 $X,Y,\xi,\eta,\cdots$表示.

2. 离散型随机变量

所有取值可以一一列出的随机变量，称为离散型随机变量.

3. 离散型随机变量的分布列

一般地，若离散型随机变量 X 可能取的不同值为

$$x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n,$$

X 取每一个值 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$的概率 $P(X=x_i)=p_i$，以表格的形式表示如下：

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

上表称为离散型随机变量 X 的概率分布列，简称为 X 的分布列. 有时也用等式 $P(X=x_i)=p_i,i=1,2,\cdots,n$ 表示 X 的分布列，还可以用图象表示.

4. 离散型随机变量分布列的性质

根据概率的性质，离散型随机变量的分布列具有如下性质：

(1)$p_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n$；

(2)$\sum_{i=1}^{n}p_i=1$；

(3)离散型随机变量在某一范围内取值的概率等于它取这个范围内各个值的概率的和.

5. 两点分布

随机变量 X 的分布列为

X	0	1
P	$1-p$	p

若随机变量 X 的分布列具有上表的形式，则称 X 服从两点分布，并称 $p=P(X=1)$为成功概率.

两点分布又称 0—1 分布. 由于只有两个可能结果的随机试验叫伯努利试验，所以还称这种分布为伯努利分布.

6. 超几何分布

一般地，在含有 M 件次品的 N 件产品中，任取 n 件，其中恰有 X 件次品，则

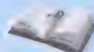
$P(X=k)=\frac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$，$k=0,1,2,\cdots,m$，即

X	0	1	…	m
P	$\frac{C_M^0C_{N-M}^{n-0}}{C_N^n}$	$\frac{C_M^1C_{N-M}^{n-1}}{C_N^n}$	…	$\frac{C_M^mC_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$

其中 $m=\min\{M,n\}$，且 $n\leqslant N,M\leqslant N,n,M,N\in \mathbf{N}^*$.

如果随机变量 X 的分布列具有上表的形式，则称随机变量 X 服从超几何分布.

概率论的内容(二)　有一类随机事件，它具有两个特点：第一，只有有限个可能的结果；第二，各个结果发生的可能性相同. 具有这两个特点的随机现象叫“古典概型”. 在客观世界中，存在大量的随机现象，随机现象产生的结果构成了随机事件. 如果用变量来描述随机现象的各个结果，就叫随机变量.



模板演练

➡ 答案详见 P462

1. 给出下列 A、B、C、D 四个表，其中能成为随机变量 ξ 的分布列的是(　　).

A.

ξ	0	1
P	0.6	0.3

B.

ξ	0	1	2
P	0.902 5	0.095	0.002 5

C.

ξ	0	1	2	…	n
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	…	$\frac{1}{2^n}$

D.

ξ	0	1	2	…	n
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2$	…	$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

2. 一个口袋有 5 只同样大小的球，编号分别为 1,2,3,4,5，从中同时取出 3 只，以 ξ 表示取出球最小的号码，求 ξ 的分布列.

3. 一个袋中有形状大小完全相同的 3 个白球和 4 个红球.

(1)从中任意摸出一球，用 0 表示摸出白球，用 1 表示摸出红球，即 $X=\begin{cases}0,\text{摸出白球},\\1,\text{摸出红球}.\end{cases}$ 求 X 的分布列.

(2)从中任意摸出两个球，用"$X=0$"表示两个球全是白球，用"$X=1$"表示两个球不全是白球，求 X 的分布列.

4. 设有产品 100 件，其中有次品 5 件，正品 95 件，现从中随机抽取 20 件，求抽得次品件数 X 的分布列.

模板 2　利用条件概率公式求概率 [5年4考]

模板探究

母题呈现	模板引入
(辽宁高考)从 1,2,3,4,5 中任取 2 个不同的数，事件 A="取到的 2 个数之和为偶数"，事件 B="取到的 2 个数均为偶数"，则 $P(B\|A)$=(　　). A. $\frac{1}{8}$　B. $\frac{1}{4}$　C. $\frac{2}{5}$　D. $\frac{1}{2}$	本模板解决的是"在事件 A 发生的条件下，求事件 B 发生的概率"的问题.
解析：$P(A)=\frac{C_3^2+C_2^2}{C_5^2}=\frac{2}{5}$，$P(AB)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$， $P(B\|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{4}$. **答案**：B	第一步　求出事件 A 发生的概率. 第二步　求出事件 AB 发生的概率. 第三步　求 $P(B\|A)$.

凯尔微博



概率论的内容(三)　随机变量有有限和无限的区分，一般又根据变量的取值情况分成离散型随机变量和非离散型随机变量. 一切可能的取值能够按一定次序一一列举，这样的随机变量叫离散型随机变量；如果可能的取值充满了一个区间，无法按次序一一列举，这样的随机变量就叫非离散型随机变量.

模板攻略

1. 模板解决思路

求事件 B 在事件 A 发生的条件下发生的概率的重点在于求事件 AB 的概率，即事件 A 和事件 B 同时发生的概率，然后用 $P(AB)$ 除以 $P(A)$ 即可得 $P(B|A)$. 在解决条件概率问题时，还应注意 $P(B|A)$ 与 $P(A|B)$ 的差别.

2. 模板解决步骤

1 第一步　求出事件 A 发生的概率 $P(A)$.

2 第二步　求出事件 A 与事件 B 同时发生的概率 $P(AB)$.

3 第三步　利用公式 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ 求得概率 $P(B|A)$.

3. 典型例题

典例 1　抛掷一枚质地均匀的硬币两次，在第一次出现正面向上的条件下，第二次出现反面向上的概率为(　　).

A. $\frac{1}{4}$　B. $\frac{1}{3}$　C. $\frac{1}{2}$　D. $\frac{2}{3}$

解析：记"第一次出现正面向上"为事件 A，"第二次出现反面向上"为事件 B.

则 $P(A)=\frac{1}{2}$，　①

$P(AB)=\frac{1}{4}$.　②

$\therefore P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{2}$.　③

答案：C

典例 2　抛掷一颗质地均匀的骰子所得的点数构成空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. 若事件 $A=\{1,3,5\}$，$B=\{1,2,3,6\}$，则 $P(A|B)=$(　　).

A. $\frac{3}{5}$　B. $\frac{1}{2}$　C. $\frac{2}{5}$　D. $\frac{1}{3}$

解析：$P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.　①

$P(AB)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.　②

$\therefore P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{2}$.　③

答案：B

知识要点

1. 条件概率

一般地，设 A，B 为两个事件，且 $P(A)>0$，称 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的条件概率. $P(B|A)$ 读作 A 发生的条件下 B 发生的概率.

2. 条件概率的性质

(1)非负性：$0\leqslant P(B|A)\leqslant 1$；

(2)可加性：如果 B 和 C 是两个互斥事件，则 $P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)$.

模板演练

➡ 答案详见 P463

1. 某单位有 18 个人，其中 O 型血有 8 人，A 型血有 4 人，B 型血有 5 人，AB 型血有 1 人，现从中任选 2 人，问：第 1 人是 A 型血，第 2 人是 O 型血的概率是多少？

概率论的内容(四)　在离散型随机变量的概率分布中，比较简单而又应用广泛的是二项式分布. 如果随机变量是连续的，都有一个分布曲线，实践和理论都证明：有一种特殊而常用的分布，它的分布曲线是有规律的，这就是正态分布. 正态分布曲线取决于这个随机变量的一些表征数，其中最重要的是平均值和差异度. 平均值也叫数学期望，差异度也叫标准差.

凯尔微博



2. 某校高三(1)班有学生40人,其中共青团员15人.全班分成4个小组,第一组有学生10人,共青团员4人.从该班任选一个作学生代表.
(1)求选到的是第一组的学生的概率;
(2)已知选到的是共青团员,求他是第一组学生的概率.

3. 甲、乙两地都位于长江下游,根据一百多年的气象记录,知道甲、乙两地一年中雨天占的比例分别为20%和18%,两地同时下雨的比例为12%,问:
(1)乙地为雨天时甲地也为雨天的概率是多少?
(2)甲地为雨天时乙地也为雨天的概率是多少?

4. 抛掷两颗质地均匀的骰子各一次,求:
(1)向上的点数之和为6,其中有一个的点数为2的概率是多少?
(2)向上的点数不相同时,其中有一个的点数为5的概率是多少?

模板3　求相互独立事件的概率【每年必考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(湖北高考)投掷一枚均匀硬币和一枚均匀骰子各一次,记"硬币正面向上"为事件A,"骰子向上的点数是3"为事件B,则事件A,B中至少有一件发生的概率是(　　). A. $\frac{5}{12}$　B. $\frac{1}{2}$　C. $\frac{7}{12}$　D. $\frac{3}{4}$	本模板解决的是"事件A发生需要若干个相互独立事件发生,求事件A发生的概率"的问题.
解析:$\because A,B$为相互独立事件,$\therefore \overline{A},\overline{B}$为相互独立事件, $\because P(A)=\frac{1}{2},P(B)=\frac{1}{6},\therefore P(\overline{A})=\frac{1}{2},P(\overline{B})=\frac{5}{6}$. $\therefore P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=\frac{1}{2}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{12}$. $\therefore A,B$中至少有一件发生的概率为 $1-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$. **答案**:C	第一步　求"事件A,B至少有一件发生"的对立事件,此对立事件可分为独立事件$\overline{A},\overline{B}$. 第二步　求出$P(\overline{A})$和$P(\overline{B})$. 第三步　求出$P(\overline{A}\,\overline{B})$,然后利用$1-P(\overline{A}\,\overline{B})$求出结果.

选修2-3

凯尔微博


关于零的数学小故事(一)　大约1 500年前,欧洲的数学家们是不知道用"0"的,他们使用罗马数字.罗马数字是用几个表示数的符号,按照一定的规则,把它们组合起来表示不同的数目.在这种数字的运用里,不需要"0"这个数字.而在当时,罗马帝国有一位学者从印度记数法里发现了"0"这个符号.他发现,有了"0",进行数学运算方便极了.

模板攻略

1. 模板解决思路

求相互独立事件的概率的核心是看事件的发生需要哪些独立事件的积的发生. 再分别求出这些独立事件的概率,然后求其积.若题中出现“至少”等要求时,可以求其对立事件的概率.

2. 模板解决步骤

①第一步　将事件 A 分成若干个独立事件 $B,C\cdots$.

②第二步　求出 $P(B),P(C)\cdots$.

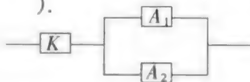
③第三步　代入公式 $P(A)=P(BC\cdots)=P(B)\cdot P(C)\cdots$,求出 $P(A)$.

3. 典型例题

典例 1　(湖北高考)如图,用 K,A_1,A_2 三类不同的元件连接成一个系统,当 K 正常工作且 A_1,A_2 至少有一个正常工作时,系统正常工作.已知 K,A_1,A_2 正常工作的概率依次为 0.9,0.8,0.8,则系统正常工作的概率为(　　).

A. 0.960　B. 0.864

C. 0.720　D. 0.576



解析:可知 K,A_1,A_2 三类元件正常工作相互独立. ①

A_1,A_2 至少有一个能正常工作的概率为 $P=1-(1-0.8)^2=0.96$, ②

所以系统能正常工作的概率为 $P_KP=0.9\times0.96=0.864$. ③

答案:B

典例 2　(辽宁高考)两个实习生每人加工一个零件,加工为一等品的概率分别为 $\frac{2}{3}$ 和 $\frac{3}{4}$,两个零件是否加工为一等品相互独立,则这两个零件中恰有一个一等品的概率为(　　).

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{5}{12}$　C. $\frac{1}{4}$　D. $\frac{1}{6}$

解析:设事件 A:“一个实习生加工一等品”,

事件 B:“另一个实习生加工一等品”,

由于 A,B 相互独立, ①

则恰有一个一等品的概率 $P=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)$

$=P(A)\cdot P(\overline{B})+P(\overline{A})\cdot P(B)$

$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{5}{12}$. ②~③

答案:B

知识要点

事件的相互独立性

设 A,B 为两个事件,若 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称事件 A 与事件 B 相互独立.

特别提示

(1)相互独立的两个事件实质上是一个事件发生与否对另一个事件的发生没有影响,也就是若事件 A 与 B 相互独立,则 $P(B|A)=P(B)$ 且 $P(A|B)=P(A)$,因而有 $P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B)$.

(2)如果事件 A 与 B 相互独立,那么 A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 B,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也都相互独立.

(3)对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,如果其中任一事件发生的概率不受其他事件是否发生的影响,则称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立. 如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,那么这 n 个事件同时发生的概率,等于每个事件发生的概率的积,即 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$.

(4)“互斥事件”和“相互独立事件”是两个不同的概念,前者表示不可能同时发生的两个事件,后者是指一个事件是否发生对另一个事件发生的概率没有影响,在具体解题时,如果混淆这两个概念极易发生错误,所以必须注意和重视.

关于零的数学小故事(二)　他非常高兴,就把印度人使用“0”的方法向大家做了介绍. 过了一段时间,这件事被当时的罗马教皇知道了. 当时是欧洲的中世纪,教会的势力非常大,罗马教皇的权力更是远远超过皇帝. 教皇非常恼怒,他斥责说:“神圣的数是上帝创造的,在上帝创造的数里没有‘0’这个怪物,如今谁要把它给引进来,谁就是亵渎上帝!”



模板演练

答案详见 P463

1.（广东高考）甲、乙两队进行排球决赛，现在的情形是甲队只要再赢一局就获冠军，乙队需要再赢两局才能得冠军，若两队胜每局的概率相同，则甲队获得冠军的概率为（　　）.

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{3}{5}$　C. $\frac{2}{3}$　D. $\frac{3}{4}$

2.（四川高考）本着健康、低碳的生活理念，租自行车骑游的人越来越多，某自行车租车点的收费标准是每车每次租车时间不超过两小时免费，超过两小时的部分每小时收费2元（不足1小时的部分按1小时计算）. 有甲、乙两人相互独立来该租车点租车骑游（各租一车一次）. 设甲、乙不超过两小时还车的概率分别为$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{2}$；两小时以上且不超过三小时还车的概率分别为$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$；两人租车时间都不会超过四小时.

(1)分别求出甲、乙在三小时以上且不超过四小时还车的概率；

(2)求甲、乙两人所付的租车费用之和小于6元的概率.

3.（重庆高考）甲、乙两人轮流投篮，每人每次投一球.约定甲先投且先投中者获胜，一直到有人获胜或每人都已投3次时投篮结束.设甲每次投篮投中的概率为$\frac{1}{3}$，乙每次投篮投中的概率为$\frac{1}{2}$，且各次投篮互不影响.

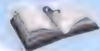
(1)求乙获胜的概率.

(2)求投篮结束时乙只投了2个球的概率.

4.（全国高考）乒乓球比赛规定：一局比赛，双方比分在10平前，一方连续发球2次后，对方再连续发球2次，依次轮换.每次发球，胜方得1分，负方得0分. 设在甲、乙的比赛中，每次发球，发球方得1分的概率为0.6，各次发球的胜负结果相互独立. 甲、乙的一局比赛中，甲先发球.

(1)求开始第4次发球时，甲、乙的比分为1:2的概率；

(2)求开始第5次发球时，甲得分领先的概率.



关于零的数学小故事（三）　于是教皇就下令把这位学者抓了起来.并对他施加了酷刑，用夹子把他的十个手指头紧紧夹住，使他两手残废，让他再也不能握笔写字.就这样，“0”被那个愚昧、残忍的罗马教皇明令禁止了.虽然“0”被禁止使用，罗马的数学家们还是不管禁令，在数学的研究中仍然秘密地使用“0”.用“0”做出了很多数学上的贡献.

模板 4　二项分布的概率问题【5年9考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(重庆高考)将一枚均匀的硬币抛掷 6 次,则正面出现的次数比反面出现的次数多的概率为________.	本模板解决的是"某随机变量 X 服从二项分布,求其相关概率"的问题.
解析:设 X 为正面出现的次数,则 $X\sim B\left(6,\frac{1}{2}\right)$. 由正面出现的次数比反面出现的次数多得 X 的可能取值为 4,5,6. ∴所求概率 $P=C_6^4\left(\frac{1}{2}\right)^6+C_6^5\left(\frac{1}{2}\right)^6+C_6^6\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{11}{32}$. **答案:**$\frac{11}{32}$	第一步　确定变量服从二项分布 $B\left(6,\frac{1}{2}\right)$. 第二步　根据题意,列出符合要求的变量取值 4,5,6. 第三步　利用公式求得概率.

模板攻略

1. 模板解决思路

求二项分布的概率问题首先要确定随机变量所服从的二项分布中的参数 n,p 的值. 然后确定符合要求的变量的取值. 最后根据公式计算.

2. 模板解决步骤

1 第一步　确定随机变量 X 服从二项分布 $B(n,p)$,确定 n,p 的值.

2 第二步　根据要求,列出 X 的所有可能取值.

3 第三步　利用公式 $P(X=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$求其概率.

3. 典型例题

典例　接种某疫苗后,出现发热反应的概率为 0.80,现有 5 人接种该疫苗,至少有 3 人出现发热反应的概率为________(精确到 0.01).

解析:出现发热反应的人数 $X\sim B(5,0.8)$.　1

由题意知 X 的可能取值为 3,4,5.　2

所以所求概率

$P=C_5^3\times0.8^3\times0.2^2+C_5^4\times0.8^4\times0.2+C_5^5\times0.8^5\approx0.94$.　3

答案:0.94

知识要点

1. 独立重复试验

一般地,在相同条件下重复做的 n 次试验称为 n 次独立重复试验.

2. 二项分布

一般地,在 n 次独立重复试验中,用 X 表示事件 A 发生的次数,设每次试验中事件 A 发生的概率为 p,则

$P(X=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n$.

此时称随机变量 X 服从二项分布,记作 $X\sim B(n,p)$,并称 p 为成功概率.

数字对联故事(一)　相传明朝时,有个穷秀才颇有才学. 但因当时科举场上徇私舞弊之风盛行,他屡试不中. 过了一年,又到开科考试了,他听说主考官廉洁奉公,任人唯贤. 于是打点行装,赴京城再次应举. 路途遥远,秀才虽然日夜兼程赶路,可当他到达京城时,考试已经结束. 秀才好说歹说,终于感动了主考大人,准他补考.



模板演练

➡ 答案详见 P464

1.（四川高考）某居民小区有两个相互独立的安全防范系统（简称系统）A 和 B，系统 A 和系统 B 在任意时刻发生故障的概率分别为 $\frac{1}{10}$ 和 p.

（1）若在任意时刻至少有一个系统不发生故障的概率为 $\frac{49}{50}$，求 p 的值；

（2）求系统 A 在 3 次相互独立的检测中不发生故障的次数大于发生故障的次数的概率.

2.（江苏高考）某工厂生产甲、乙两种产品. 甲产品的一等品率为 80%，二等品率为 20%；乙产品的一等品率为 90%，二等品率为 10%. 生产 1 件甲产品，若是一等品则获得利润 4 万元，若是二等品则亏损 1 万元；生产 1 件乙产品，若是一等品获得利润 6 万元，若是二等品则亏损 2 万元. 设生产各件产品相互独立.

（1）记 X（单位：万元）为生产 1 件甲产品和 1 件乙产品可获得的总利润，求 X 的分布列；

（2）求生产 4 件甲产品所获得的利润不少于 10 万元的概率.

3.（全国高考）根据以往的统计资料，某地车主购买甲种保险的概率为 0.5，购买乙种保险但不购买甲种保险的概率为 0.3. 设各车主购买保险相互独立.

（1）求该地 1 位车主至少购买甲、乙两种保险中的一种的概率；

（2）求该地 3 位车主中恰有 1 位车主甲、乙两种保险都不购买的概率.

4.（天津高考）某射手每次射击击中目标的概率是 $\frac{2}{3}$，且各次射击的结果互不影响.

（1）假设这名射手射击 5 次，求恰有 2 次击中目标的概率；

（2）假设这名射手射击 5 次，求有 3 次连续击中目标，另外 2 次未击中目标的概率；

（3）假设这名射手射击 3 次，每次射击，击中目标得 1 分，未击中目标得 0 分. 在 3 次射击中，若有 2 次连续击中，而另外 1 次未击中，则额外加 1 分；若 3 次全击中，则额外加 3 分. 记 ξ 的分布列.



数字对联故事（二） 主考官出的题目是要求他用一至十这十个数字作一联. 秀才听后暗想，我就把自己一路颠簸和误考的原因说一说，以求得主考大人的谅解. 便脱口说道："一叶孤舟，坐了二三个骚客，启用四桨五帆，经过六滩七湾，历尽八颠九簸，可叹十分来迟." 主考官暗暗称奇："此生才学，确实不浅！"

模板 5 求随机事件的概率【每年必考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(新课标全国高考)某一部件由三个电子元件按如图所示方式连接而成,元件 1 或元件 2 正常工作且元件 3 正常工作,则部件正常工作,设三个电子元件的使用寿命(单位:小时)均服从正态分布 $N(1\ 000,50^2)$,且各个元件能否正常工作相互独立,那么该部件的使用寿命超过 1 000 小时的概率为 ______. (图:元件 1、元件 2 并联后与元件 3 串联)	本模板解决的是"已知随机事件 A,求其发生的概率"的问题.
解析:由题意可知此为相互独立事件,设元件 1,2,3 的使用寿命超过 1 000 小时的事件分别记为 A、B、C,显然 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$. ∴该部件的使用寿命超过 1 000 小时的事件为 $(A\overline{B}+\overline{A}B+AB)C$, ∴所求概率 $P=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$. 答案: $\frac{3}{8}$	第一步 确定事件为相互独立事件. 第二步 确定事件发生需要的条件:$(A\overline{B}+\overline{A}B+AB)C$. 第三步 运用相关公式进行求解.

模板攻略

1. 模板解决思路

解决本模板问题的重点在于判断随机事件的性质,然后根据性质找出事件发生所需的条件,进行事件的运算,即此事件是"和事件、积事件、至少有一个发生还是同时发生"等,然后根据条件选用合适的公式进行运算.

2. 模板解决步骤

1 第一步 确定事件的性质,是古典概型、互斥事件、独立事件、独立重复试验,还是超几何分布等.

2 第二步 判断事件的运算,和事件、积事件,确定事件至少有一个发生,还是同时发生,分别运用相加或相乘事件公式.

3 第三步 运用公式,求出结果.

古典概型:$P(A)=\frac{m}{n}$.

互斥事件:$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

条件概率:$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$.

独立事件:$P(AB)=P(A)P(B)$.

n 次独立重复试验 $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.

超几何分布:$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$, $k=0,1,2,\cdots,m(m=\min\{M,n\})$.

3. 典型例题

典例 1 (重庆高考)若甲、乙、丙三人随机地站成



一排,则甲、乙两人相邻而站的概率为______.

解析: 本事件属于古典概型. ①

甲、乙、丙站成一排有 $A_3^3=6$ 种情况.

甲、乙相邻而站有 $A_2^2A_2^2=4$ 种情况.

故所求概率 $P=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. ②~③

答案: $\frac{2}{3}$

典例 2 红队队员甲、乙、丙与蓝队队员 A,B,C 进行围棋比赛,甲对 A,乙对 B,丙对 C 各一盘,已知甲胜 A,乙胜 B,丙胜 C 的概率分别为 0.6,0.5,0.5. 假设各盘比赛结果相互独立. 求红队至少两名队员获胜的概率.

解: 设甲胜 A 的事件为 D,乙胜 B 的事件为 E,丙胜 C 的事件为 F,则 $\overline{D},\overline{E},\overline{F}$ 分别表示甲不胜 A,乙不胜 B,丙不胜 C 的事件.

因为 $P(D)=0.6,P(E)=0.5,P(F)=0.5$,

由对立事件的概率公式知 $P(\overline{D})=0.4,P(\overline{E})=0.5,P(\overline{F})=0.5$.

红队至少两人获胜的事件有:$DE\overline{F},D\overline{E}F,\overline{D}EF,DEF$.

由于以上四个事件两两互斥且各盘比赛的结果相互独立, ①~②

因此红队至少两人获胜的概率为

$P=P(DE\overline{F})+P(D\overline{E}F)+P(\overline{D}EF)+P(DEF)$

$=0.6\times0.5\times0.5+0.6\times0.5\times0.5+0.4\times0.5\times0.5+0.6\times0.5\times0.5=0.55$. ③

模板演练

➡ 答案详见 P465

1. (陕西高考)甲、乙两人一起去游“2011 西安世园会”,他们约定,各自独立地从 1 到 6 号景点中任选 4 个进行浏览,每个景点参观 1 小时,则最后一小时他们同在一个景点的概率是( ).

   A. $\frac{1}{36}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{5}{36}$ D. $\frac{1}{6}$

2. (湖北高考)在 30 瓶饮料中,有 3 瓶已过了保质期. 从这 30 瓶饮料中任取 2 瓶,则至少取到 1 瓶已过保质期饮料的概率为______. (结果用最简分数表示)

3. 学校游园活动有这样一个游戏项目:甲箱子里装有 3 个白球、2 个黑球,乙箱子里装有 1 个白球、2 个黑球,这些球除颜色外完全相同. 每次游戏从这两个箱子里各随机摸出 2 个球,若摸出的白球不少于 2 个,则获奖. (每次游戏结束后将球放回原箱)求在 1 次游戏中,

   (1)摸出 3 个白球的概率;

   (2)获奖的概率.

4. 为了解甲、乙两厂的产品质量,采用分层抽样的方法从甲、乙两厂生产的产品中分别抽取 14 件和 5 件,测量产品中微量元素 x,y 的含量(单位:毫克). 下表是乙厂的 5 件产品的测量数据:

编号	1	2	3	4	5
x	169	178	166	175	180
y	75	80	77	70	81

   (1)已知甲厂生产的产品共有 98 件,求乙厂生产的产品数量;

   (2)当产品中的微量元素 x,y 满足 $x\geqslant175$ 且 $y\geqslant75$ 时,该产品为优等品,用上述样本数据估计乙厂生产的优等品的数量;

   (3)从乙厂抽出的上述 5 件产品中,随机抽取 2 件,求抽取的 2 件产品中优等品数 ξ 的分布列.



人生的运算(一) 人生的加不是盲目的,要选择准确. 世界上有许多引诱人的东西,如果不加选择地盲目加给自己,就会“正正得负”,甚至贻害终生. 人长大了进入社会,开始了乘法运算,用加法得来的知识技术去乘以工作,得出的积就是成果、财富和对社会的贡献. 人生的运算是个不等式,和数学不一样.

模板 6　求离散型随机变量的均值或方差【每年必考】

模板探究

<table>
<tr><th>母题呈现</th><th>模板引入</th></tr>
<tr><td>(浙江高考)某些毕业生参加人才招聘会,分别向甲、乙、丙三个公司投递了个人简历.假定该毕业生得到甲公司面试的概率为$\frac{2}{3}$,得到乙、丙两公司面试的概率均为p,且三个公司是否让其面试是相互独立的.记X为该毕业生得到面试的公司个数.若$P(X=0)=\frac{1}{12}$,则随机变量X的数学期望$E(X)=$______.</td><td>本模板解决的是"求离散型随机变量的均值或方差"的问题.</td></tr>
<tr><td>解析:由题意知X的所有可能取值为0,1,2,3.
$P(X=0)=\frac{1}{3}(1-p)^2=\frac{1}{12}$,$\therefore p=\frac{1}{2}$.
$\therefore P(X=1)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$.
$P(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$.
$P(X=3)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.
$\therefore$随机变量X的分布列为:
<table><tr><td>X</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>P</td><td>$\frac{1}{12}$</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{5}{12}$</td><td>$\frac{1}{6}$</td></tr></table>$E(X)=0\times\frac{1}{12}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{5}{12}+3\times\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$.
答案:$\frac{5}{3}$</td><td>第一步　写出随机变量X的所有可能取值.
第二步　求出X取每个值的概率.
第三步　列出随机变量X的分布列.
第四步　求出期望$E(X)$.</td></tr>
</table>

模板攻略

1. 模板解决思路

解决本模板问题的关键在于求出随机变量的分布列,首选找出随机变量的所有可能取值,然后根据条件求出相应取值的概率,最后列出分布列,根据均值或方差的定义求值.

2. 模板解决步骤

1 第一步　理解随机变量X的意义,写出X的所有可能取值.

2 第二步　求出X取每个值时的概率.

3 第三步　列出X的分布列.

4 第四步　由均值或方差的定义求出$E(X)$或$D(X)$.

凯尔微博



3. 典型例题

典例 1 (天津高考)一个盒子里装有 7 张卡片,其中有红色卡片 4 张,编号分别为 1,2,3,4;白色卡片 3 张,编号分别为 2,3,4.从盒子中任取 4 张卡片(假设取到任何一张卡片的可能性相同).

(1)求取出的 4 张卡片中,含有编号为 3 的卡片的概率;

(2)在取出的 4 张卡片中,红色卡片编号的最大值为 X,求随机变量 X 的分布列和数学期望.

解:(1)设"取出的 4 张卡片中,含有编号为 3 的卡片"为事件 A,则 $P(A)=\frac{C_2^1C_5^3+C_2^2C_5^2}{C_7^4}=\frac{6}{7}$.

所以取出的 4 张卡片中,含有编号为 3 的卡片的概率为 $\frac{6}{7}$.

(2)随机变量 X 的所有可能取值为 1,2,3,4. ①

$P(X=1)=\frac{C_3^3}{C_7^4}=\frac{1}{35}$,$P(X=2)=\frac{C_4^3}{C_7^4}=\frac{4}{35}$,

$P(X=3)=\frac{C_5^3}{C_7^4}=\frac{2}{7}$,$P(X=4)=\frac{C_6^3}{C_7^4}=\frac{4}{7}$. ②

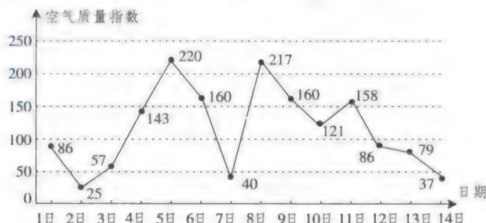
所以随机变量 X 的分布列是

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$

③

随机变量 X 的数学期望 $E(X)=1\times\frac{1}{35}+2\times\frac{4}{35}+3\times\frac{2}{7}+4\times\frac{4}{7}=\frac{17}{5}$. ④

典例 2 (北京高考)如图是某市 3 月 1 日至 14 日的空气质量指数趋势图.空气质量指数小于 100 表示空气质量优良,空气质量指数大于 200 表示空气重度污染. 某人随机选择 3 月 1 日至 3 月 13 日中的某一天到达该市,并停留 2 天.



(1)求此人到达当日空气重度污染的概率;

(2)设 X 是此人停留期间空气质量优良的天数,求 X 的分布列与数学期望;

(3)由图判断从哪天开始连续三天的空气质量指数方差最大?(结论不要求证明)

解:设 A_i 表示事件"此人于 3 月 i 日到达该市"($i=1,2,\cdots,13$).

根据题意,$P(A_i)=\frac{1}{13}$,且 $A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$.

(1)设 B 为事件"此人到达当日空气重度污染",则 $B=A_5\cup A_8$.

所以 $P(B)=P(A_5\cup A_8)=P(A_5)+P(A_8)=\frac{2}{13}$.

(2)由题意可知,X 的所有可能取值为 0,1,2,且 ①

$P(X=1)=P(A_3\cup A_6\cup A_7\cup A_{11})$

$=P(A_3)+P(A_6)+P(A_7)+P(A_{11})=\frac{4}{13}$,

$P(X=2)=P(A_1\cup A_2\cup A_{12}\cup A_{13})$

$=P(A_1)+P(A_2)+P(A_{12})+P(A_{13})=\frac{4}{13}$,

$P(X=0)=1-P(X=1)-P(X=2)=\frac{5}{13}$. ②

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{5}{13}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{4}{13}$

③

故 X 的期望 $E(X)=0\times\frac{5}{13}+1\times\frac{4}{13}+2\times\frac{4}{13}=\frac{12}{13}$. ④

(3)从 3 月 5 日开始连续三天的空气质量指数方差最大.

误区警示

对于以统计图的形式给出的样本数据,一定要结合图中的数据和要解决的问题把需要的数据正确提炼出来,然后使用这些数据解题. 折线图中,数据的波动大小反映了方差的大小,可以直接由折线的变化趋势得到哪几天指数方差最大.



人生的运算(三) 有人说人退休后是个纯洁恢复期,和出生时一样,这话有一定道理. 人生减法的运算也不是简单的减掉,该保留还要保留,人生中有的东西能受用一辈子乃至可以传给后人,这就要认真加以取舍了. 人生到了晚年,最后一道运算便是除法. 首先是把自己奋斗一生得到的财产分给儿女们.

知识要点

1. 离散型随机变量的均值

一般地,若离散型随机变量 X 的概率分布列为

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

则称 $E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_ip_i+\cdots+x_np_n$ 为随机变量 X 的均值或数学期望. 它反映了离散型随机变量取值的平均水平.

2. 均值的性质

(1)$E(aX+b)=aE(X)+b$.

(2)若 X 服从两点分布,则 $E(X)=p$.

(3)二项分布的均值:

若 $X\sim B(n,p)$,则 $E(X)=np$.

3. 离散型随机变量的方差

设离散型随机变量 X 的分布列为

X	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_i	…	p_n

则 $(x_i-E(X))^2$ 描述了 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 相对于均值 $E(X)$ 的偏离程度. 而

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2p_i$$

为这些偏离程度的加权平均,刻画了随机变量 X 与其均值 $E(X)$ 的平均偏离程度. 我们称 $D(X)$ 为随机变量 X 的方差,并称其算术平方根 $\sqrt{D(X)}$ 为随机变量 X 的标准差.

随机变量的方差和标准差都反映了随机变量取值偏离于均值的平均程度. 方差或标准差越小,则随机变量偏离于均值的平均程度越小.

特别提示

(1)随机变量的方差与标准差都反映了随机变量取值的稳定与波动、集中与离散的程度.

(2)方差也是一个常数,它不具有随机性,方差的值一定是非负的.

4. 方差的性质

(1)$D(aX+b)=a^2D(X)$.

(2)若 X 服从两点分布,则 $D(X)=p(1-p)$.

(3)若 $X\sim B(n,p)$,则 $D(X)=np(1-p)$.

模板演练

➔ 答案详见 P465

1. (陕西高考)在一场娱乐晚会上,有 5 位民间歌手(1 至 5 号)登台演唱,由现场数百名观众投票选出最受欢迎歌手. 各位观众须彼此独立地在选票上选 3 名歌手,其中观众甲是 1 号歌手的歌迷,他必选 1 号,不选 2 号,另在 3 至 5 号中随机选 2 名.观众乙和丙对 5 位歌手的演唱没有偏爱,因此在 1 至 5 号中随机选 3 名歌手.

(1)求观众甲选中 3 号歌手且观众乙未选中 3 号歌手的概率;

(2)X 表示 3 号歌手得到观众甲、乙、丙的票数之和,求 X 的分布列及数学期望.

人生的运算(四) 这不是简单的除法,要计算准确无误. 否则,计算错一步,不但无益,而且还会有害,必须小心. 除法就是把一生中学到的知识技术分给后人,其形式有著书立说,口传身授等. 有的人大公无私,传授毫无保留,这是最高的思想境界,这种人的除法是 1÷1 等于无穷无尽. 有的人看钱传授,除法是 1÷1 等于 1.

凯尔微博



2. (辽宁高考)现有 10 道题,其中 6 道甲类题,4 道乙类题,张同学从中任取 3 道题解答.

(1)求张同学至少取到 1 道乙类题的概率;

(2)已知所取的 3 道题中有 2 道甲类题,1 道乙类题. 设张同学答对每道甲类题的概率都是 $\frac{3}{5}$,答对每道乙类题的概率都是 $\frac{4}{5}$,且各题答对与否相互独立. 用 X 表示张同学答对题的个数,求 X 的分布列和数学期望.

3. (山东高考)甲、乙两支排球队进行比赛,约定先胜 3 局者获得比赛的胜利,比赛随即结束.除第五局甲队获胜的概率是 $\frac{1}{2}$ 外,其余每局比赛甲队获胜的概率都是 $\frac{2}{3}$. 假设各局比赛结果相互独立.

(1)分别求甲队 3:0,3:1,3:2 胜利的概率;

(2)若比赛结果为 3:0 或 3:1,则胜利方得 3 分、对方得 0 分;若比赛结果为 3:2,则胜利方得 2 分、对方得 1 分.求乙队得分 X 的分布列及数学期望.

4. (新课标全国高考)某花店每天以每枝 5 元的价格从农场购进若干枝玫瑰花,然后以每枝 10 元的价格出售,如果当天卖不完,剩下的玫瑰花作垃圾处理.

(1)若花店一天购进 16 枝玫瑰花,求当天的利润 y(单位:元)关于当天需求量 n(单位:枝,$n\in\mathbf{N}$)的函数解析式.

(2)花店记录了 100 天玫瑰花的日需求量(单位:枝),整理得下表:

日需求量 n	14	15	16	17	18	19	20
频数	10	20	16	16	15	13	10

以 100 天记录的各需求量的频率作为各需求量发生的概率.

①若花店一天购进 16 枝玫瑰花,X 表示当天的利润(单位:元),求 X 的分布列、数学期望及方差.

②若花店计划一天购进 16 枝或 17 枝玫瑰花,你认为应购进 16 枝还是 17 枝? 请说明理由.



人生的运算(五) 更有人宁愿把知识绝技带进棺材,也不传给他人,在人生的除法运算上留下一个零,这岂不可惜?须知,有的知识绝技失传后,几代人也难以学到呀!人生的运算是复杂的,更是有意义的.人生也是一个大考场,在运算人生的加、减、乘、除考题中,是满分,还是不及格,甚至是交白卷,那就靠每个人自己去把握了.

模板 7　求正态分布下的概率【5年9考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(广东高考)已知随机变量 X 服从正态分布 $N(3,1)$,且 $P(2\leqslant X\leqslant 4)=0.682\ 6$,则 $P(X>4)=(\quad)$. A. 0.158 8　　B. 0.158 7 C. 0.158 6　　D. 0.158 5	本模板解决的是"已知正态分布下事件 A 的概率,求与 A 相关的事件 B 的概率"的问题.
解析:由于 X 服从正态分布 $N(3,1)$, 故正态曲线的对称轴为直线 $x=3$. 所以 $P(X>4)=P(X<2)$, 故 $P(X>4)=\dfrac{1-P(2\leqslant X\leqslant 4)}{2}=0.158\ 7$. 答案:B	第一步　由已知正态分布得到其图象对称轴 $x=3$. 第二步　由图象对称性,得出关系 $P(X>4)=P(X<2)$. 第三步　根据已知条件和已得关系求出所要求的概率.

模板攻略

1. 模板解决思路

求正态分布下的概率主要是根据正态分布曲线的性质.尤其是其对称性和曲线与 x 轴之间的面积为1.此外在解决问题时,还要注意 3σ 原则的应用.

2. 模板解决步骤

①第一步　找出或求出正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$中的 μ.

②第二步　利用正态分布关于 $x=\mu$ 的对称性,找出事件 B 与事件 A 和$(-\infty,+\infty)$或$(-\infty,\mu)$或$(\mu,+\infty)$的关系.

③第三步　借助关系,求出事件 B 的概率.

3. 典型例题

典例 1　(湖北高考)已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(2,\sigma^2)$,且 $P(\xi<4)=0.8$,则 $P(0<\xi<2)=(\quad)$.

A. 0.6　　B. 0.4　　C. 0.3　　D. 0.2

解析:$\because P(\xi<4)=0.8$,

$\therefore P(\xi>4)=0.2$,

由题意知图象的对称轴为直线 $x=2$,　①

$\therefore P(\xi<0)=P(\xi>4)=0.2$,

$P(0<\xi<4)=1-P(\xi<0)-P(\xi>4)=0.6$.　②

$\therefore P(0<\xi<2)=\dfrac{1}{2}P(0<\xi<4)=0.3$.　③

答案:C

典例 2　已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(3,\sigma^2)$,则 $P(\xi<3)=(\quad)$.

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

解析:由正态分布图象知,$\mu=3$为该图象的对称轴.　①

由对称性知$P(\xi<3)=P(\xi>3)=\dfrac{1}{2}$.　②~③

答案:D

解题后的六思(一)　1. 思因果:思考在解题过程中运用了哪些知识点、已知条件与它们之间的联系,还有哪些条件没有用过,结果与题意或实际生活是否相符等. 2. 思规律:思考所运用的方法,总结规律,达到举一反三的目的,提高知识迁移能力. 3. 思多解:思考多种解法,比较孰繁孰简,孰优孰劣,久而久之,就可以对每一道题都能在最短时间内找到最优的方法.



知识要点

1. 正态曲线

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},x\in(-\infty,+\infty),$$

其中实数μ和$\sigma(\sigma>0)$为参数. 我们称$\varphi_{\mu,\sigma}(x)$的图象为正态分布密度曲线,简称正态曲线.

2. 正态分布

一般地,如果对于任何实数$a,b(a<b)$,随机变量X满足$P(a<X\leqslant b)=\int_a^b\varphi_{\mu,\sigma}(x)\mathrm{d}x$,则称随机变量$X$服从正态分布. 正态分布完全由参数$\mu$和$\sigma$确定,因此正态分布常记作$N(\mu,\sigma^2)$. 如果随机变量$X$服从正态分布,则记为$X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

特别提示

(1)参数μ是反映随机变量取值的平均水平的特征数,可以用样本的均值去估计;σ是衡量随机变量总体波动大小的特征数,可以用样本的标准差去估计.

(2)若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则$E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2$.

3. 正态曲线的特点

(1)曲线位于x轴上方,与x轴不相交.

(2)曲线是单峰的,它关于直线$x=\mu$对称.

(3)曲线在$x=\mu$处达到峰值$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

(4)曲线与x轴之间的面积为1.

(5)当σ一定时,曲线的位置由μ确定,曲线随着μ的变化而沿x轴平移.(如图1所示)

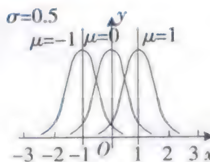


图1

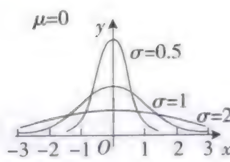


图2

(6)当μ一定时,曲线的形状由σ确定. σ越小,曲线越"瘦高",表示总体的分布越集中;σ越大,曲线越"矮胖",表示总体的分布越分散(如图2所示).

4. 3σ原则

若$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则对于任何实数$a>0$,

$$P(\mu-a<X\leqslant\mu+a)=\int_{\mu-a}^{\mu+a}\varphi_{\mu,\sigma}(x)\mathrm{d}x.$$

特别地:$P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)=0.682\ 6$,

$P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)=0.954\ 4$,

$P(\mu-3\sigma<X\leqslant\mu+3\sigma)=0.997\ 4$.

如图:

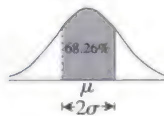


图1

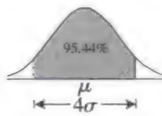


图2

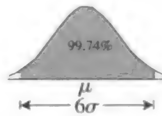


图3

可以看到,正态总体几乎总取值于区间$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$之内. 而在此区间以外取值的概率只有0.002 6,通常认为这种情况在一次试验中几乎不可能发生.

在实际应用中,通常认为服从于正态分布$N(\mu,\sigma^2)$的随机变量X只取$(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$之间的值,并简称之为3$\sigma$原则.

模板演练

➡ 答案详见P467

1. 以$\Phi(x)$表示标准正态总体在区间$(-\infty,x)$内取值的概率,若随机变量ξ服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$,则概率$P(|\xi-\mu|<\sigma)$等于(　　).

A. $\Phi(\mu+\sigma)-\Phi(\mu-\sigma)$　　B. $\Phi(1)-\Phi(-1)$

C. $\Phi\left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right)$　　D. $2\Phi(\mu+\sigma)$

2. 设随机变量ξ服从正态分布$N(2,9)$,若$P(\xi>c+1)=P(\xi<c-1)$,则$c=$(　　).

A. 1　　B. 2

C. 3　　D. 4

3. 若随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$,则$P(X\leqslant\mu)=$______.

4. 已知某次数学考试的成绩服从正态分布$N(131,9)$,则成绩在140分以上的考生所占的百分比为______.

解题后的六思(二)　4. 思变通:对一道题不局限于就题论题,要进行适当变化引申,一题变多题,拓宽思路,提高应变能力,防止思维定势. 5. 思归类:回忆与该题同类的习题,进行对比,找到解这一类题的技巧和方法,从而达到触类旁通的目的. 6. 思错误:思考题中易混易错的地方,找出错误原因和解决方法,提高辨析错误的能力.

模板1 求非线性回归方程

模板探究

母题呈现	模板引入
在一次抽样调查中测得样本的5个样本点,数值如表: x: 0.25, 0.5, 1, 2, 4 y: 16, 12, 5, 2, 1 求 y 与 x 之间的回归方程.	本模板解决的是“已知一组样本点$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$,求 y 与 x 之间的非线性回归方程”的问题.

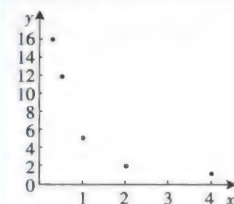
x	0.25	0.5	1	2	4
y	16	12	5	2	1

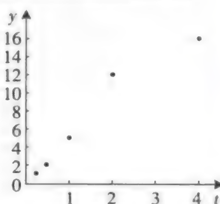
解:画出散点图如图1所示,

观察可知 y 与 x 近似是反比例函数关系. 设 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$,

令 $t=\frac{1}{x}$,则 $y=kt$. 可得到 y 关于 t 的数据如表:

t	4	2	1	0.5	0.25
y	16	12	5	2	1


图1


图2

画出散点图如图2所示,观察可知 t 和 y 有较强的线性相关性,因此可利用线性回归模型进行拟合,易得 $\hat{y}=4.134\ 4t+0.791\ 7$,所以 y 与 x 的回归方程是 $\hat{y}=\frac{4.134\ 4}{x}+0.791\ 7$.

第一步 根据所给样本点画出散点图.

第二步 由图象知 y 与 x 近似为反比例函数,选择拟合函数 $y=\frac{k}{x}$.

第三步 令 $t=\frac{1}{x}$,将其转化为线性函数,求其回归方程.

第四步 通过 $t=\frac{1}{x}$ 进行变换,得到非线性回归方程.

模板攻略

1. 模板解决思路

解决非线性回归方程问题的关键是选择恰当的拟合函数,这就要求作出准确的散点图,由图象得出其拟合函数,然后通过交换将其转化为线性

小数点大悲剧 1967年8月23日,前苏联宇航员科马洛夫一个人驾驶着“联盟一号”宇宙飞船返航. 当飞船返回大气层后,科马洛夫无论怎么操作也无法使降落伞打开以减慢飞船的速度. 地面指挥中心采取了一切可能的措施帮助排除故障,但都无济于事,“联盟一号”飞船最后在着陆基地附近坠毁,宇航英雄科马洛夫遇难. 联盟一号发生的一切就是因为地面检查时漏掉一个小数点.



方程求解.

2. 模板解决步骤

①第一步　根据原始数据(x,y)作出散点图.

②第二步　根据散点图,选择恰当的拟合函数.

③第三步　作恰当的变换,将其转化成线性函数,求线性回归方程.

④第四步　在③的基础上通过相应的变换,即可得非线性回归方程.

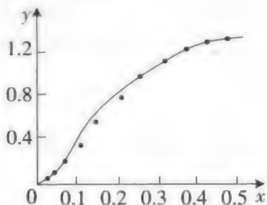
3. 典型例题

典例 1　在表格中,析出银的光学密度ξ与形成染料的光学密度η的试验数据如下:

x_i	y_i	x_i	y_i	x_i	y_i
0.05	0.10	0.14	0.59	0.38	1.19
0.06	0.14	0.20	0.79	0.43	1.25
0.07	0.23	0.25	1.00	0.47	1.29
0.10	0.37	0.31	1.12		

求η关于ξ的回归方程.

解:画出散点图如图所示.　①



由图知可设回归方程$\hat{y}=Ae^{\frac{b}{x}}$$(b<0)$,其中$A$及$b$为参数,　②

两边取对数,得$\ln\hat{y}=\ln A+\frac{b}{x}$,作变量代换$X=\frac{1}{x}$,$Y=\ln y$,并设$a=\ln A$,得$Y=a+bX$,则由试验数据$(x_i,y_i)$$(i=1,2,\cdots,11)$,求出对应数据$(X_i,Y_i)$$(i=1,2,\cdots,11)$如下:

X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i
20.000	-2.303	7.143	-0.528	2.632	0.174
16.667	-1.966	5.000	-0.236	2.326	0.223
14.286	-1.470	4.000	0	2.128	0.255
10.000	-0.994	3.226	0.113		

计算得$\bar{X}\approx7.946$,$l_{XX}\approx406.612$,$\bar{Y}=-0.612$,$l_{YY}\approx8.690$,$l_{XY}=-112.835-11\times7.946\times(-0.612)\approx-59.343$,

样本相关系数$r=\frac{l_{XY}}{\sqrt{l_{XX}l_{YY}}}\approx-0.998$.

查相关系数显著性检验表,当$n-2=9$时,$r_{0.05}(9)=0.602$,$r_{0.01}(9)=0.735$.

因为$|r|>r_{0.01}(9)=0.735$,所以认为Y与X之间的线性相关关系特别显著.

再求a与b的估计值$\hat{b}=\frac{l_{XY}}{l_{XX}}=\frac{-59.343}{406.612}\approx-0.146$,

$\hat{a}=\bar{Y}-\hat{b}\bar{X}=-0.612-(-0.146)\times7.946\approx0.548$,则$Y$与$X$的线性回归方程为$Y=0.548-0.146X$.　③

换回原变量,得$\ln\hat{y}=0.548-\frac{0.146}{x}$,

即$\hat{y}=e^{0.548-\frac{0.146}{x}}=1.73e^{-\frac{0.146}{x}}$,

所以η关于ξ的回归方程为$\hat{y}=1.73e^{-\frac{0.146}{x}}$.　④

典例 2　在试验中得到变量y与x的数据如下表:

x	19	23	27	31	35
y	4	11	24	109	325

求y与x之间的回归方程,并预测$x=40$时,y的值.

解:作散点图如图1所示,　①

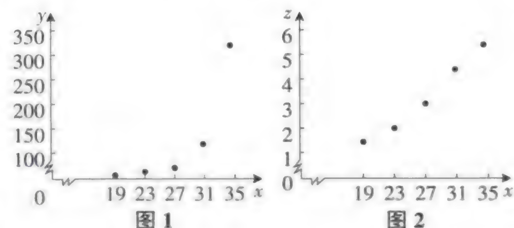


图 1　　图 2

从散点图可以看出,两个变量x,y不呈线性相关关系. 根据学过的函数知识,样本点分布的曲线符合指数型函数$y=c_1e^{c_2x}$.　②

通过对数变换把指数关系变为线性关系,令$z=\ln y$,则$z=bx+a(a=\ln c_1,b=c_2)$.列表:

x	19	23	27	31	35
z	1.386	2.398	3.178	4.691	5.784

凯尔微博



药品混乱(一)　一家药店收到运来的某种药品十瓶. 每瓶装药丸1 000粒. 药剂师怀特先生刚把药瓶送上架子,一封电报接踵而来. 怀特先生把电报念给药店经理布莱克小姐听. 怀特先生:"特急!所有药瓶须检查后方能出售. 由于失误,其中有一瓶药丸每粒超重10毫克. 请即退回分量有误的那瓶药."怀特先生很气恼.

作散点图如图2所示,从散点图可以看出,两个变量 x,z 呈很强的线性相关关系.由上表中的数据得到线性回归方程为:$\hat{z}=0.277x-3.998$.　③

所以 y 关于 x 的指数回归方程为:$\hat{y}=e^{0.277x-3.998}$.

所以当 $x=40$ 时,$y=e^{0.277\times40-3.998}\approx1\,190.347$.　④

知识要点

非线性相关问题中常见的几种线性变换

(1)$y=a+\frac{b}{x}$,令 $y'=y,x'=\frac{1}{x}$,则 $y'=a+bx'$.

(2)$y=ax^b$,令 $y'=\ln y,x'=\ln x,a'=\ln a$,则 $y'=a'+bx'$.

(3)$y=ae^{bx}$,令 $y'=\ln y,x'=x,a'=\ln a$,则 $y'=a'+bx'$.

(4)$y=ae^{\frac{b}{x}}$,令 $y'=\ln y,x'=\frac{1}{x},a'=\ln a$,则 $y'=a'+bx'$.

(5)$y=a+b\ln x$,令 $y'=y,x'=\ln x$,则 $y'=a+bx'$.

模板演练

➡ 答案详见 P467

1. 一只红铃虫的产卵数 y 和温度 x 有关.现收集了7组观测数据列于下表中,画出散点图,根据散点图选择适当的回归方程的模型.(只要求写出方程的类型)

温度 x/℃	21	23	25	27	29	32	35
产卵数 y/个	7	11	21	24	66	115	325

2. 观测两相关变量得如下数据:

x	0.1	0.125	0.2	0.25	0.5	1
y	533	378	262	235	134	51

求 y 与 x 之间的回归方程.

药品混乱(二)　怀特先生:"倒霉极了,我只好从每瓶中取出一粒来称一下.真是胡闹."怀特先生刚要动手,布莱克小姐拦住了他.布莱克小姐:"等一下,没必要秤十次,只需秤一次就够了."这怎么可能呢?布莱克小姐的妙主意是从第一瓶中取出1粒,从第二瓶中取出2粒,第三瓶中取出3粒,以此类推,直至从第十瓶中取出10粒.

凯尔微博



模板 2 独立性检验【5年8考】

模板探究

母题呈现	模板引入
为考察喜欢黑色的人是否易患抑郁症，对 91 名大学生进行调查，得到如下 2×2 列联表： （见下表） 则(　　)认为喜欢黑色与患抑郁症有关系. A. 有 99%把握　B. 有 95%把握 C. 有 90%把握　D. 不能	本模板解决的是"一般性的独立性检验"问题.
解析：由表可知 $a=15, b=32, c=14, d=30, n=91$. $K^2=\frac{91\times(15\times30-32\times14)^2}{29\times62\times44\times47}\approx0.000\ 097\ 90<0.455$，所以不能认为喜欢黑色与患抑郁症有关系，故选 D. **答案**：D	第一步　由所给列表得出 a,b,c,d,n 的值. 第二步　利用公式求出 K^2 的值. 第三步　与临界值比较，得出结论.

	患抑郁症	未患抑郁症	合计
喜欢黑色	15	32	47
不喜欢黑色	14	30	44
合计	29	62	91

模板攻略

1. 模板解决思路

解决独立性检验问题的关键是在于利用公式 $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 求得其观测值.因此需要先确定 a,b,c,d,n 的值，然后求得 K^2 的观测值与临界点的值比较即可得出相关结论.

2. 模板解决步骤

①第一步　通过所给列联表确定 a,b,c,d,n 的值.

②第二步　利用 $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 求出随机变量 K^2 的值.

③第三步　将 K^2 与临界值 k_0(查表可得)比较得出两个变量 X 与 Y 是否有关系.

3. 典型例题

典例 1　某高校"统计初步"课程的教师随机调查了选该课的一些学生的情况，具体数据如下表：

性别＼专业	非统计专业	统计专业
男	13	10
女	7	20

根据表中的数据，判断选修统计专业是否与性别有关系.

解：由表中数据可得

$a=13, b=10, c=7, d=20, n=50.$　①

$K^2=\frac{50\times(13\times20-10\times7)^2}{23\times27\times20\times30}\approx4.844$，　②

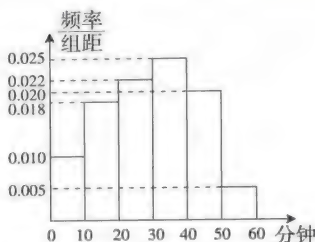
因为 $4.844\geqslant3.841$，所以判断选修统计专业与性别有关系，这种判断出错的可能性不超过 5%. 即有 95%的把握认为选修统计专业与性别有关系.　③

典例 2　(辽宁高考)电视传媒公司为了了解某地



药品混乱(三)　把这 55 粒药丸放在秤上，记下总重量. 如果重 5 510 毫克，也就是超过规格 10 毫克，她当即明白其中只有一粒是超重的，并且是从第一瓶中取出的. 如果总重量超过规格 20 毫克，则其中有 2 粒超重，并且是从第二瓶中取出的，以此类推进行判断. 所以布莱克小姐只要秤一次，不是吗？

区电视观众对某类体育节目的收视情况，随机抽取了 100 名观众进行调查. 下面是根据调查结果绘制的观众日均收看该体育节目时间的频率分布直方图：



将日均收看该体育节目时间不低于 40 分钟的观众称为“体育迷”.

根据已知条件完成下面的 2×2 列联表，并据此资料你是否认为“体育迷”与性别有关？

	非体育迷	体育迷	合计
男			
女		10	55
合计			

附：$\chi^2=\dfrac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1+}n_{2+}n_{+1}n_{+2}}$，

$P(\chi^2\geqslant k)$	0.05	0.01
k	3.841	6.635

解：由频率分布直方图可知，在抽取的 100 人中，“体育迷”有 25 人，从而 2×2 列联表如下：

	非体育迷	体育迷	合计
男	30	15	45
女	45	10	55
合计	75	25	100

1

将 2×2 列联表中的数据代入公式计算，得

$$\chi^2=\frac{n(n_{11}n_{22}-n_{12}n_{21})^2}{n_{1+}n_{2+}n_{+1}n_{+2}}=\frac{100\times(30\times10-45\times15)^2}{75\times25\times45\times55}=\frac{100}{33}\approx3.030.$$

2

因为 3.030<3.841，所以没有理由认为“体育迷”与性别有关.

3

知识要点

1. 2×2 列联表

(1)列出的两个分类变量的频数表，称为列联表.

(2)一般地，假设两个分类变量 X 和 Y，它们的取值分别为 $\{x_1,x_2\}$ 和 $\{y_1,y_2\}$，其样本频数列联表(称为 2×2 列联表)为：

	y_1	y_2	总计
x_1	a	b	$a+b$
x_2	c	d	$c+d$
总计	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

2. 独立性检验

利用随机变量 K^2 来判断“两个分类变量有关系”的方法称为独立性检验.

随机变量 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$ 为样本容量.

3. 独立性检验的具体做法

(1)根据实际问题的需要确定容许推断“两个分类变量有关系”犯错误概率的上界 α，然后查表确定临界值 k_0.

(2)利用公式计算随机变量 K^2 的观测值 k.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.50	0.40	0.25	0.15	0.10
k_0	0.455	0.708	1.323	2.072	2.706
$P(K^2\geqslant k_0)$	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

(3)如果 $k\geqslant k_0$，就推断“X 与 Y 有关系”，这种推断犯错误的概率不超过 α；否则，就认为在犯错误的概率不超过 α 的前提下不能推断“X 与 Y 有关系”，或者在样本数据中没有发现足够证据支持结论“X 与 Y 有关系”.

动物的“数学天赋”(一)　蜂窝的每一个蜂房都是规则的六角柱状体，蜂房的一端是平整的六角形开口，另一端则是由三个相同菱形组成的底盘，而且这个底盘的所有钝角为 109°28′，而所有锐角都是 70°32′——如此精确的“建筑”，没有“数学天赋”恐怕无法办到. 丹顶鹤在空中总是排成“人”字飞行，令人叫绝的是，这个“人”字的角度永远保持在 110°.



模板演练

➡ 答案详见 P467

1.(湖南高考)通过随机询问 110 名性别不同的大学生是否爱好某项运动,得到如下的列联表:

	男	女	总计
爱好	40	20	60
不爱好	20	30	50
总计	60	50	110

由 $K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 算得,

$K^2=\dfrac{110\times(40\times30-20\times20)^2}{60\times50\times60\times50}\approx7.8$.

附表:

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

参照附表,得到的正确结论是(　　).

A. 在犯错误的概率不超过 0.1%的前提下,认为"爱好该项运动与性别有关"

B. 在犯错误的概率不超过 0.1%的前提下,认为"爱好该项运动与性别无关"

C. 有 99%以上的把握认为"爱好该项运动与性别有关"

D. 有 99%以上的把握认为"爱好该项运动与性别无关"

2. 为了解某班学生喜爱打篮球是否与性别有关,对该班 50 名学生进行了问卷调查,得到了如下的 2×2 列联表:

	喜爱打篮球	不喜爱打篮球	总计
男生	20	5	25
女生	10	15	25
总计	30	20	50

则在犯错误的概率不超过 ______ 的前提下认为喜爱打篮球与性别有关(请用百分数表示).

附:$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

3.(新课标全国高考)为调查某地区老年人是否需要志愿者提供帮助,用简单随机抽样方法从该地区调查了 500 位老年人,结果如表:

性别 / 是否需要志愿者	男	女
需要	40	30
不需要	160	270

(1)估计该地区老年人中,需要志愿者提供帮助的老年人的比例;

(2)能否有 99%的把握认为该地区的老年人是否需要志愿者提供帮助与性别有关?

(3)根据(2)的结论,能否提供更好的调查方法来估计该地区的老年人中,需要志愿者提供帮助的老年人的比例?说明理由.

附:

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$



动物的"数学天赋"(二) 珊瑚虫有很强的"计数"能力,它们每年都在自己的体壁上刻画出 365 条环形纹路,刚好是每天一条,一条不多,一条也不会少!蚂蚁每次出洞搬运食物时,大蚂蚁与小蚂蚁的数量之比总是 1∶10——每隔 10 只小蚂蚁,便有 1 只大蚂蚁夹在其中,绝没有"越位"的.

附　录　思想方法篇

模板 1　转化与化归思想【每年必考】

模板探究

母题呈现	模板引入
已知单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则函数 $f(x)=(x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+x^3-2x-1(x\in\mathbf{R})$ 的零点的取值集合为 ______.	本模板解决的是“如何利用转化与化归思想解决问题”的问题.
解析： 因为单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $f(x)=(x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2+x^3-2x-1=x^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}x+1+x^3-2x-1=x^3+x^2-2x$. 令 $f(x)=0$，得 $x^3+x^2-2x=0$，即 $x(x-1)(x+2)=0$，解得 $x=-2$ 或 $x=0$ 或 $x=1$. 所以函数 $f(x)$ 零点的取值集合为 $\{-2,0,1\}$. **答案：** $\{-2,0,1\}$	第一步　化简函数 $f(x)$ 的解析式. 第二步　令 $f(x)=0$，把零点问题转化为方程根的问题. 第三步　解方程 $f(x)=0$，求出 x 的值，写成集合形式即得结论.

模板攻略

1. 模板解决思路

本模板是利用转化与化归思想将某些一般问题进行特殊化处理或将某些问题进行一般化处理，将所求问题转化为易解决的新目标问题，然后进行解答.

2. 模板解决步骤

1 第一步　确定需转化的目标问题.

2 第二步　将其转化为新目标问题.

3 第三步　解决新目标问题，完成解答.

3. 典型例题

典例 1　（湖北高考）过点 $P(1,1)$ 的直线，将圆形区域 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq4\}$ 分为两部分，使得这两部分的面积之差最大，则该直线的方程为（　　）.

A. $x+y-2=0$　　B. $y-1=0$

C. $x-y=0$　　D. $x+3y-4=0$

解析： 要使过点 P 的直线将圆形区域分为面积之差最大的两部分.　①

则当圆心与点 P 的连线和过点 P 的直线垂直时，符合条件.　②

圆心 O 与点 P 连线的斜率 $k=1$，

$\therefore$ 直线 OP 垂直于 $x+y-2=0$，故选 A.　③

答案： A

典例 2　（福建高考）若关于 x 的方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不相等的实数根，则实数 m 的取值范围是（　　）.

A. $(-1,1)$　　B. $(-2,2)$

C. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

解析： $\because$ 方程 $x^2+mx+1=0$ 有两个不相等的实数根，①

$\therefore\Delta=m^2-4>0$，　②

$\therefore m>2$ 或 $m<-2$.　③

答案： C

雪花曲线（一） 雪花曲线因其形状类似雪花而得名，它的产生假定也跟雪花类似. 先作一个等边三角形，再把每边三等分，将居中的 1/3 部分向外作一个小等边三角形，并把每一个小等边三角形的底抹掉，得到一个六角星形，再在六角星形的每一条边上以同样的方法向外作出更小的等边三角形，于是曲线变得越来越长，开始像一片雪花了.



知识要点

常见的转化方法

(1)直接转化法:把原问题直接转化为基本定理、基本公式或基本图形问题;

(2)换元法:运用"换元"把非标准形式的方程、不等式、函数转化为容易解决的基本问题;

(3)参数法:引进参数,使原问题的变换具有灵活性,易于转化;

(4)构造法:"构造"一个合适的数学模型,把问题变为易于解决的问题;

(5)坐标法:以坐标系为工具,用代数方法解决解析几何问题,是转化方法的一种重要途径;

(6)类比法:运用类比推理,猜测问题的结论,易于确定转化的途径;

(7)特殊化方法:把原问题的形式向特殊化形式转化,并证明特殊化后的结论适合原问题;

(8)一般化方法:若原问题是某个一般化形式问题的特殊形式且又较难解决,可将问题通过一般化的途径进行转化;

(9)等价问题法:把原问题转化为一个易于解决的等价命题,达到转化目的;

(10)补集法:(正难则反)若正面问题难以解决,可将问题的结果看作集合 A,而把包含该问题的整个问题的结果类比为全集 U,通过解决全集 U 及补集$\complement_U A$ 获得原问题的解决.

模板演练

➡ 答案详见 P468

1. (新课标全国高考)若存在正数 x 使 $2^x(x-a)<1$ 成立,则 a 的取值范围是(　　).

A. $(-\infty,+\infty)$　　B. $(-2,+\infty)$

C. $(0,+\infty)$　　D. $(-1,+\infty)$

2. (湖南高考)已知函数 $f(x)=e^x-1$, $g(x)=-x^2+4x-3$,若有 $f(a)=g(b)$,则 b 的取值范围为(　　).

A. $[2-2\sqrt{2},2+\sqrt{2}]$　　B. $(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$

C. $[1,3]$　　D. $(1,3)$

3. (陕西高考)植树节某班 20 名同学在一段直线公路一侧植树,每人植一棵,相邻两棵树相距10米. 开始时需将树苗集中放置在某一树坑旁边. 现将树坑从 1 到 20 依次编号,为使各位同学从各自树坑前来领取树苗所走的路程总和最小,树苗可以放置的两个最佳坑位的编号为(　　).

A. ①和⑳　　B. ⑨和⑩

C. ⑨和⑪　　D. ⑩和⑪

4. (江西高考)设函数$f(x)=x^3-\frac{9}{2}x^2+6x-a$.

(1)对于任意实数x, $f'(x)\geqslant m$恒成立,求m的最大值;

(2)若方程$f(x)=0$有且仅有一个实根,求a的取值范围.

凯尔微博

雪花曲线(二) 再如此作下去,曲线将变得越来越长,图形也更美丽. 如果不断地作下去,则曲线可以要多长有多长,若无限地如此作下去,自然就有无限周长了. 而这个图形的面积,通过计算,最多只能是原来三角形的 8/5 倍.

模板 2　分类讨论思想【每年必考】

模板探究

母题呈现	模板引入
（重庆高考）下列区间中，函数 $f(x)=\|\ln(2-x)\|$ 在其上为增函数的是（　　）. A. $(-\infty,1]$　B. $\left[-1,\frac{3}{4}\right]$ C. $\left[0,\frac{3}{2}\right)$　D. $[1,2)$	本模板解决的是“利用分类讨论思想解决问题”的问题.
解析：显然，$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,2)$，为去掉绝对值应按 $x\in(-\infty,1]$ 和 $x\in[1,2)$ 分类讨论. 当 $2-x\geqslant 1$，即 $x\leqslant 1$ 时，$f(x)=\|\ln(2-x)\|=\ln(2-x)$，此时函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递减. 当 $0<2-x\leqslant 1$，即 $1\leqslant x<2$ 时，$f(x)=\|\ln(2-x)\|=-\ln(2-x)$，此时函数 $f(x)$ 在 $[1,2)$ 上单调递增. **答案**：D	第一步　针对绝对值，进行分类讨论. 第二步　将 x 分为 $(-\infty,1]$ 和 $[1,2)$ 分类讨论. 第三步　针对 x 的不同的范围，讨论问题. 第四步　综合各类情况，得出 x 的范围.

模板攻略

1. 模板解决思路

解决本模板问题首先应确定讨论的参数，再对参数进行合理分类，分类时要做到不重不漏，然后针对分类，分别讨论问题，最后归纳总结出问题的答案.

2. 模板解决步骤

①第一步　明确讨论的对象：即对哪个参数进行讨论.

②第二步　对所讨论的对象进行合理分类，分类时要做到不重复、不遗漏.

③第三步　逐类讨论，对各类问题详细讨论，逐步解决.

④第四步　归纳总结，将各类情况总结归纳.

3. 典型例题

典例 1　（重庆高考）某艺校在一天的 6 节课中随机安排语文、数学、外语三门文化课和其他三门艺术课各 1 节，则在课表上的相邻两节文化课之间最多间隔 1 节艺术课的概率为________（用数字作答）.

解析：6 节课随机安排，共有 $A_6^6=720$（种）方法.

课表上相邻两节文化课之间最多间隔 1 节艺术课，分三类：　①~②

第 1 类：文化课之间没有艺术课，有 $A_3^3\cdot A_4^4=6\times24=144$（种）.

第 2 类：文化课之间有 1 节艺术课，有 $A_3^3\cdot C_3^1\cdot A_2^1\cdot A_3^3=6\times3\times2\times6=216$（种）.

第 3 类：文化课之间有 2 节艺术课，有 $A_3^3\cdot A_3^2\cdot A_2^2=6\times6\times2=72$（种）.　③

共有 $144+216+72=432$（种）.　④

由古典概型概率公式得 $P=\frac{432}{720}=\frac{3}{5}$.

鲁迅巧对奇联（一）　鲁迅曾在三味书屋拜寿镜吾老先生为师念私塾，寿老先生是一位刚正、质朴、博学的人，不仅教学生读四书五经，还教学生对对子. 由于对联讲究对仗，所以在对对中，是很能见出才思之高下的. 一天，寿老先生出了一奇对，上联是：“独角兽”. 要求他的学生对出下联.



答案：$\frac{3}{5}$

典例 2 （上海高考）对于常数 m,n，"$mn>0$"是"方程 $mx^2+ny^2=1$ 的曲线是椭圆"的（　　）.

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

解析：分别判断条件的充分性、必要性是否成立. ①~②

$\because mn>0$，$\therefore \begin{cases} m>0, \\ n>0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} m<0, \\ n<0, \end{cases}$

当 $m>0,n>0$ 时，方程 $mx^2+ny^2=1$ 的曲线是椭圆，但 $m<0,n<0$ 时，方程 $mx^2+ny^2=1$ 不表示任何图形，所以条件不充分；反之，当方程 $mx^2+ny^2=1$ 表示的曲线是椭圆时，有 $mn>0$， ③

所以"$mn>0$"是"方程 $mx^2+ny^2=1$ 的曲线是椭圆"的必要不充分条件. ④

答案：B

知识要点

分类讨论一般有以下情况：

（1）由数学概念引起的分类讨论：如绝对值的定义、不等式的含义、二次函数的定义、直线和平面所成的角、直线的倾斜角、两条异面直线所成的角等.

（2）由数学运算要求而引起的分类讨论：如除法运算中除数不为零、偶次方根为非负数、对数运算中真数与底数的要求、不等式中两边同乘一个正数或负数、三角函数的定义域等.

（3）由函数的性质、定理、公式的限制而引起的分类讨论.

（4）由图形的不确定性而引起的分类讨论.

（5）由参数的取值不同而引起的分类讨论.

（6）其他根据实际问题具体分析而引起的分类讨论.

模板演练

➡ 答案详见 P468

1. 3 位男生和 3 位女生共 6 位同学站成一排，若男生甲不站两端，3 位女生中有且只有两位女生相邻，则不同排法的种数是（　　）.

A. 360　　B. 288　　C. 216　　D. 96

2. 不等式 $\frac{1}{x}<5$ 的解集为 ________.

3. （广东高考）设 $0<a<1$，集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x>0\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}\mid 2x^2-3(1+a)x+6a>0\}$，$D=A\cap B$.

（1）求集合 D（用区间表示）；

（2）求函数 $f(x)=2x^3-3(1+a)x^2+6ax$ 在 D 内的极值点.

4. （福建高考）已知函数 $f(x)=x-a\ln x(a\in\mathbf{R})$.

（1）当 $a=2$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $A(1,f(1))$ 处的切线方程；

（2）求函数 $f(x)$ 的极值.



鲁迅巧对奇联（二）　一时引得学生们跃跃欲试，纷纷亮出自己的下联，有："两头蛇"；"三足蟾"；"九头鸟"；"百足虫"……寿老先生看了这些下联，都不满意. 由于先生上联"独角兽"中的"独"字，是一非数字而又蕴含"单"意的字，所以下联需用一非数字而又蕴含"双"意的字去对，才称得起是对联中的上乘. 当寿老先生看到鲁迅对的下联时，不禁大加赞赏. 原来鲁迅所对下联是："比目鱼".

模板3　数形结合思想【每年必考】

模板探究

母　题　呈　现	模　板　引　入
(天津高考)已知函数 $y=\frac{\lvert x^2-1\rvert}{x-1}$ 的图象与函数 $y=kx-2$ 的图象恰有两个交点,则实数 k 的取值范围是______.	本模板解决的是"将涉及的问题用有关图象来分析和解决"的问题.
解析:根据绝对值的意义,$y=\frac{\lvert x^2-1\rvert}{x-1}=\begin{cases}x+1(x>1或x<-1),\\-x-1(-1\leqslant x<1).\end{cases}$ 在直角坐标系中作出该函数的图象,如图中实线所示. 根据图象可知, 当$0<k<1$或$1<k<4$时有两个交点. **答案:**$(0,1)\cup(1,4)$	第一步　画出所给函数的图象. 第二步　根据题目要求和图象进行分析,画出临界的直线. 第三步　根据图象得出 k 的范围.

模板攻略

1. 模板解决思路

数形结合的基本思路是:根据代数的结构特征,构造出与之相应的几何图形,并利用图形的特性和规律,解决代数的问题;或将图形信息全部转化成代数信息,使解决形的问题转化为数量关系的讨论.

2. 模板解决步骤

1 第一步　根据题意作出图象.

2 第二步　结合图形分析数量关系.

3 第三步　解决问题.

3. 典型例题

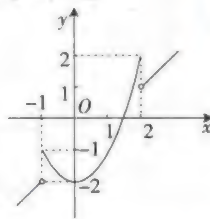
典例1　(天津高考)对实数 a 和 b,定义运算"$\otimes$":$a\otimes b=\begin{cases}a,a-b\leqslant 1,\\b,a-b>1.\end{cases}$设函数 $f(x)=(x^2-2)\otimes(x-1),x\in\mathbf{R}$.若函数 $y=f(x)-c$ 的图象与 x 轴恰有两个公共点,则实数 c 的取值范围是(　　).

A. $(-1,1]\cup(2,+\infty)$　　B. $(-2,-1)\cup(1,2]$

C. $(-\infty,-2)\cup(1,2]$　　D. $[-2,-1]$

解析:依题意得

$f(x)=\begin{cases}x^2-2,-1\leqslant x\leqslant 2,\\x-1,x<-1或x>2,\end{cases}$



作出其示意图如图所示. ①

由数形结合知,若函数 $y=f(x)-c$ 的图象与 x 轴恰有两个公共点,则实数c需有$1<c\leqslant 2$或$-2<c\leqslant -1$,故选B. ②~③

答案:B

典例2　(全国高考)正方形 $ABCD$ 的边长为1,点 E 在边 AB 上,点 F 在边 BC 上,$AE=BF=\frac{1}{3}$.动点 P 从 E 出发沿直线向 F 运动,每当碰到正方形的边

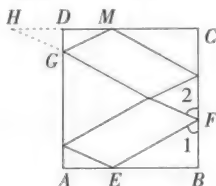
几何图形中的哲理(一)　直线:向两边延伸,无始无终,无边无际,代表着果断、刚劲和一往无前的毅力. 曲线:轻快流畅,犹如一条静静流淌的小溪;蜿蜒、曲折,犹如人生历程的轨迹. 望着您纤细不倦的身影,却放大成奔腾浩荡的大河和博大幽深的海洋.



时反弹，反弹时反射角等于入射角.当点 P 第一次碰到 E 时，P 与正方形的边碰撞的次数为(　　).

A. 8　　B. 6　　C. 4　　D. 3

解析：根据题意，作出草图.



①

延长 FG，交 DC 的反向延长线于 H 点.

$\because$反射时反射角等于入射角，$\therefore \angle 1=\angle 2$.

又$\because \tan\angle 1=\dfrac{1-\dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{3}}=2$，$\therefore \tan\angle 2=2$.

又$\tan\angle 2=\dfrac{HC}{CF}$，$\therefore HC=\dfrac{4}{3}$，$\therefore DG=\dfrac{1}{6}$.

从此以后，小球的反射线必与EF或FG平行，　②

由图可知，P与正方形的边碰撞的次数为6.　③

答案：B

知识要点

1. 在运用数形结合思想分析和解决问题时，要注意三点：

(1)要彻底弄清一些概念和运算的几何意义以及曲线的代数特征，对数学题目中的条件和结论，既分析其几何意义又分析其代数意义.

(2)要恰当设立参数，合理用之建立关系，由数思形，以形想数，做好数形转化.

(3)要正确确定参数的取值范围.

2. 应用数形结合的思想解题，通常可以从以下几个方面入手：

(1)函数与函数图象.

(2)不等式与函数图象.

(3)曲线与方程.

(4)参数本身的几何意义.

(5)代数式的结构特点.

(6)概念自身的几何意义.

(7)可行域与目标函数的最值.

模板演练

➜ 答案详见 P469

1. (福建高考)已知 $f(x)=x^3-6x^2+9x-abc$，$a<b<c$，且 $f(a)=f(b)=f(c)=0$.现给出如下结论：

①$f(0)f(1)>0$；②$f(0)f(1)<0$；

③$f(0)f(3)>0$；④$f(0)f(3)<0$.

其中正确结论的序号是(　　).

A. ①③　　B. ①④　　C. ②③　　D. ②④

2. (重庆高考)设平面点集

$A=\left\{(x,y)\mid (y-x)\left(y-\dfrac{1}{x}\right)\geqslant 0\right\}$，

$B=\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 1\}$，则 $A\cap B$ 所表示的平面图形的面积为(　　).

A. $\dfrac{3}{4}\pi$　　B. $\dfrac{3}{5}\pi$　　C. $\dfrac{4}{7}\pi$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

3. (辽宁高考)设函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$满足 $f(-x)=f(x)$，$f(x)=f(2-x)$，且当 $x\in[0,1]$时，$f(x)=x^3$.又函数 $g(x)=|x\cos(\pi x)|$，则函数 $h(x)=g(x)-f(x)$在 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$上的零点个数为(　　).

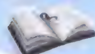
A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

4. (湖北高考)若直线 $y=x+b$ 与曲线 $y=3-\sqrt{4x-x^2}$ 有公共点，则 b 的取值范围是(　　).

A. $[1-2\sqrt{2},1+2\sqrt{2}]$　　B. $[1-\sqrt{2},3]$

C. $[-1,1+2\sqrt{2}]$　　D. $[1-2\sqrt{2},3]$

5. (江西高考)过直线 $x+y-2\sqrt{2}=0$ 上点 P 作圆 $x^2+y^2=1$ 的两条切线，若两条切线的夹角是 $60°$，则点 P 的坐标是_______.



几何图形中的哲理(二)　圆形：从各个方向看都是同一个图形，有其完美的对称性，使人产生"完美无缺"的美感和向往. 难怪有圆满、圆润、圆通、圆场之说和"花好月圆"的成语. 但是"圆滑"一词，却为人们所不爱. 等腰三角形：有扎实、深厚的基础知识功底，才能构建起尖端的科技大厦.

模板4　函数与方程思想【每年必考】

模板探究

母题呈现	模板引入
(辽宁高考)函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,$f(-1)=2$,对任意$x\in\mathbf{R}$,$f'(x)>2$,则$f(x)>2x+4$的解集为(　　). A. $(-1,1)$　　B. $(-1,+\infty)$ C. $(-\infty,-1)$　　D. $(-\infty,+\infty)$	本模板解决的是"利用题目中所给的式子构造函数(方程),将问题转化为函数(方程)来进行求解"的问题.
解析:设$g(x)=f(x)-(2x+4)$,则$g'(x)=f'(x)-2>0$, $\therefore g(x)$在$\mathbf{R}$上是增函数.$\because g(-1)=f(-1)-(-2+4)=0$, $\therefore g(x)>0$的解集为$\{x\mid x>-1\}$,即$f(x)>2x+4$的解集为$(-1,+\infty)$. **答案**:B	第一步　构造函数$g(x)$. 第二步　根据题目研究$g(x)$的单调性. 第三步　通过解$g(x)>0$解决所求问题.

模板攻略

1. 模板解决思路

解决本模板问题的关键是根据题目中所给的条件和要求的问题构造出相应的函数(方程),然后研究所构造的函数(方程)的性质来解决问题,最后将其回归到所要求的问题上.

2. 模板解决步骤

①第一步　根据所给式子的结构特征和要求问题构造"特征"函数(方程),转化问题形式.

②第二步　结合需要研究函数(方程)的相关性质.

③第三步　结合函数(方程)的相关性质,解决原问题.

3. 典型例题

典例1　(山东高考)设函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$,$g(x)=ax^2+bx$ $(a,b\in\mathbf{R},a\neq0)$.若$y=f(x)$的图象与$y=g(x)$的图象有且仅有两个不同的公共点$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则下列判断正确的是(　　).

A. 当$a<0$时,$x_1+x_2<0$,$y_1+y_2>0$

B. 当$a<0$时,$x_1+x_2>0$,$y_1+y_2<0$

C. 当$a>0$时,$x_1+x_2<0$,$y_1+y_2<0$

D. 当$a>0$时,$x_1+x_2>0$,$y_1+y_2>0$

解析:由题意知函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$,$g(x)=ax^2+bx(a,b\in\mathbf{R},a\neq0)$的图象有且仅有两个公共点$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,等价于方程$\dfrac{1}{x}=ax^2+bx(a,b\in\mathbf{R},a\neq0)$有两个不同的根$x_1,x_2$,即方程$ax^3+bx^2-1=0$有两个不同非零实根$x_1,x_2$.　①

因而可设$ax^3+bx^2-1=a(x-x_1)^2(x-x_2)$,

即$ax^3+bx^2-1=a(x^3-2x_1x^2+x_1^2x-x_2x^2+2x_1x_2x-x_2x_1^2)$,

$\therefore b=a(-2x_1-x_2)$,$x_1^2+2x_1x_2=0$,$-ax_2x_1^2=-1$,

$\therefore x_1+2x_2=0$,$ax_2>0$,

当$a>0$时,$x_2>0$,$\therefore x_1+x_2=-x_2<0$,$x_1<0$,

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_1+x_2}{x_1x_2}>0$.

当$a<0$时,$x_2<0$,$\therefore x_1+x_2=-x_2>0$,$x_1>0$,

世界是数学的(一)　数学在人们心目中始终是门令人头疼的学问.有位语言学家曾放言,没必要把数学算作技术科学,因为有计算器和电脑"代劳".但要知道,数学不仅仅是计算.我们身处的世界很多现象只能通过数学原理来解释.正如伽利略所说,世界的法则是用数学的语言写就的.其实,我们常常会按照数学的规律行事,而自己却意识不到.这样的例子在日常生活中随处可见.



$\therefore y_1+y_2=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}<0.$ ②~③

答案:B

典例2 (辽宁高考)已知函数$f(x)=e^x-2x+a$有零点,则a的取值范围是______.

解析:函数$f(x)=e^x-2x+a$有零点,即方程$e^x-2x+a=0$有实根,即函数$g(x)=2x-e^x$,$y=a$有交点, ①

而$g'(x)=2-e^x$,易知函数$g(x)=2x-e^x$在$(-\infty,\ln2)$上递增,在$(\ln2,+\infty)$上递减,因而$g(x)=2x-e^x$的值域为$(-\infty,2\ln2-2]$, ②

所以要使函数$g(x)=2x-e^x$,$y=a$有交点,只需$a\leq 2\ln2-2$即可. ③

答案:$(-\infty,2\ln2-2]$

知识要点

函数思想在解题中的应用主要表现在两个方面:一是借助初等函数的性质,解有关求值、解(证)不等式、解方程以及讨论参数的取值范围等问题;二是在问题的研究中,通过建立函数关系式或构造中间函数,把所研究的问题转化为讨论函数的有关问题,达到化难为易、化繁为简的目的. 具体分为:

(1)根据方程与函数的密切关系,将二元方程转化为函数来解决;

(2)根据不等式与函数的密切关系,有意识地把不等式问题转化为函数问题,利用函数的图象与性质进行处理;

(3)在解决实际问题时常涉及最值问题,可以考虑通过建立目标函数,利用求函数最值的方法加以解决;

(4)把问题中的已知与未知建立相等关系统一在方程中,通过解方程求解;

(5)从分析问题的结构入手,抓住某一个关键变量,将等式看成这个主变元(常称为主元)的方程,利用方程的特性解决;

(6)根据几个变量间的关系,符合某些方程的性质和特征(如利用根与系数的关系构造方程等),通过研究方程所具有的性质和特征解决问题.

模板演练

➡ 答案详见 P470

1. (重庆高考)设函数$f(x)=x^2-4x+3$,$g(x)=3^x-2$,集合$M=\{x\in\mathbf{R}|f(g(x))>0\}$,$N=\{x\in\mathbf{R}|g(x)<2\}$,则$M\cap N$为( ).

A. $(1,+\infty)$　　B. $(0,1)$

C. $(-1,1)$　　D. $(-\infty,1)$

2. 设曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的一条渐近线与抛物线$y=x^2+1$只有一个公共点,则双曲线的离心率为( ).

A. $\frac{5}{4}$　　B. 5　　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\sqrt{5}$

3. (辽宁高考)设$f(x)=\ln(x+1)+\sqrt{x+1}+ax+b$($a$,$b\in\mathbf{R}$,$a$,$b$为常数),曲线$y=f(x)$与直线$y=\frac{3}{2}x$在$(0,0)$点相切.

(1)求a,b的值;

(2)证明:当$0<x<2$时,$f(x)<\frac{9x}{x+6}$.



世界是数学的(二) 我们去超市购物时,超市中的所有商品都带有各自的条形码. 这可能是数学的又一大贡献. 骑自行车去上学,数学也陪伴着我们. 自行车大、小齿轮的转动比都经过数学的计算,以达到人们需要的骑行效果. 人们的审美观也受到数学原理的深刻影响. 美女的容貌吸引人们的注意,是因为漂亮脸庞的线条接近完美的几何对称,从而使人们感到悦目.

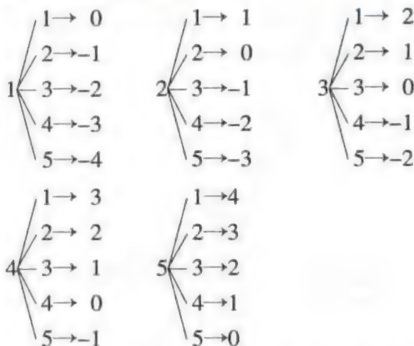
参考答案

必修 1

第一章 集合与函数概念

模板 1 求集合中元素的个数

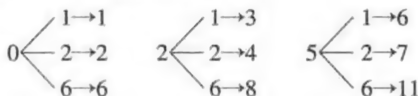
1. 解析：列树状图并计算：



经检验，$B=\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4)\}$，显然，$B$ 中有 10 个元素.

答案：D

2. 解析：列树状图并计算：

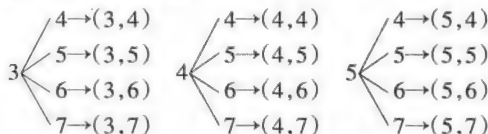


经检验，$P+Q=\{1,2,3,4,6,7,8,11\}$.

显然，$P+Q$ 中有 8 个元素.

答案：B

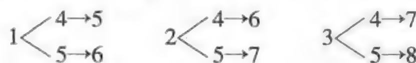
3. 解析：列树状图并计算：



显然，无重复元素，即 $P*Q$ 中有 $3\times4=12$ 个元素.

答案：D

4. 解析：列树状图并计算：



所以，$M=\{5,6,7,8\}$.

显然 M 中有 4 个元素.

答案：B

模板 2 求特定子集的个数

1. 解析：$\left\{x\in\mathbf{N}^*\ \middle|\ \frac{12}{x}\in\mathbf{Z}\right\}=\{1,2,3,4,6,12\}$共有 6 个元素.

所以子集个数为 $2^6=64$.

答案：D

2. 解析：由 $M\cap\{a_1,a_2,a_3\}=\{a_1,a_2\}$知$\{a_1,a_2\}\subseteq M$，且 $a_3\notin M$.

又 $M\subseteq\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，则

$\{a_1,a_2\}\subseteq M\subseteq\{a_1,a_2,a_4\}$.

故 M 的子集个数即$\{a_4\}$的子集个数.

显然 M 有 $2^1=2$ 个子集.

答案：B

3. 解析：由题意知，$A=\{1,2\}$，$B=\{2,4\}$，

则$\complement_U(A\cup B)=\{3,5\}$.

所以其子集个数为 $2^2=4$.

答案：4

4. 解析：若$\frac{1}{3}\in A$，由题意$\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\in A$，

$\frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}\in A$，所以 A 至少有 2 个元素.

即 A 至少有 $2^2=4$ 个子集.

答案：4

模板 3 集合的运算问题

1. 解析：集合 $S=\{-2,0\}$，$T=\{0,2\}$，则 $S\cap T=\{0\}$，故选 A.

答案：A

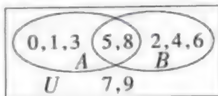
2. 解析：因为 $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,3x+2>0\}=\left\{x\ \middle|\ x>-\frac{2}{3}\right\}$，利用二次不等式可得 $B=\{x\,|\,x<-1$ 或 $x>3\}$. 画出数轴易得：$A\cap B=\{x\,|\,x>3\}$. 故选 D.

答案：D

3. 解析：$M=\{1,2,3,4\}$，$N=\{-2,2\}$，M 与 N 显然无包含关系，故 A、B 错. 又 $M\cap N=\{2\}$，故 C错，D 对.

答案：D

4. 解析：由题意，画出 Venn 图如图所示：



显然，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{7,9\}$.

答案：B

5. 解析：$\because \complement_U A=\{c,d\}$，$\complement_U B=\{a\}$，由 Venn 图易知 $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\{a,c,d\}$.

答案：$\{a,c,d\}$

6. 解析：因为 $A=\{x|2x+1>0\}=\left\{x\,\middle|\,x>-\frac{1}{2}\right\}$，

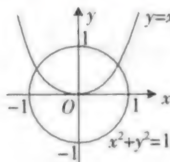
$B=\{x||x-1|<2\}=\{x|-1<x<3\}$，

画出数轴易得 $A\cap B=\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{2}<x<3\right\}$.

答案：$\left\{x\,\middle|\,-\frac{1}{2}<x<3\right\}$

模板 4 求运算后的集合的元素个数

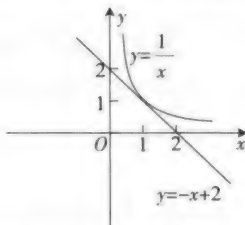
1. 解析：由题意，M，N 对应图象如图所示.



显然，图象有两个交点，即 $M\cap N$ 中有 2 个元素.

答案：B

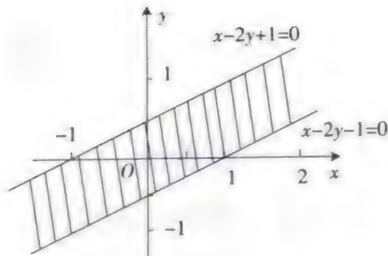
2. 解析：由题意，A，B 对应图象如图所示：



显然，图象有 1 个交点，即 $A\cap B$ 有 1 个元素.

答案：B

3. 解析：N 对应的图形如图所示：



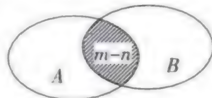
又 $U=\{(x,y)|x\in M,y\in M\}=\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$.

结合图象，$N=\{(0,0),(1,0),(1,1),(2,1)\}$.

显然，N 中有 4 个元素.

答案：C

4. 解析：画 Venn 图如图所示：



因为$\complement_U A\cup\complement_U B=\complement_U(A\cap B)$，且 $A\cap B\neq\varnothing$，

所以 $A\cap B$ 的元素个数为 $m-n$.

答案：D

模板 5 求集合中参数的值

1. 解析：由题意，两集合相等，即对应元素相等，显然，$a\neq0$，则

$\begin{cases}a+b=0,\\ a=\frac{b}{a},\\ b=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a+b=0,\\ a=b,\\ \frac{b}{a}=1.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=1.\end{cases}$

所以 $b-a=2$.

答案：C

2. 解析：$A\cup B=A$，即 $B\subseteq A$，即 $m\in A$，

故 $m=3$ 或 $m=\sqrt{m}$，

解得 $m=3$ 或 $m=0$ 或 $m=1$（舍去）.

答案：B

3. 解析：由题意，$A=\{a+4,a-4\}$.

若 $A\subseteq B$，显然 $a+4$ 与 $a-4$ 不可能同时等于 1 与 2，则 $\begin{cases}a+4=1,\\ a-4=b,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-4=1,\\ a+4=b,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a+4=2,\\ a-4=b,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-4=2,\\ a+4=b.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-3,\\ b=-7,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=5,\\ b=9,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2,\\ b=-6,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=6,\\ b=10.\end{cases}$

即 (a,b) 有 4 对值.

答案：D

4. 解析：因为 $3\in A$，则

$a-2=3$ 或 $2a^2+5a=3$，

解得 $a=5$ 或 $a=-3$ 或 $a=\frac{1}{2}$.

经检验，$a=-3$ 不合题意，

所以，$a=5$ 或 $\frac{1}{2}$.

答案：5 或 $\frac{1}{2}$

5. 解析：$\because \complement_U A=\{1,2\}$，$\therefore A=\{0,3\}$，

$\therefore 0,3$ 是方程 $x^2+mx=0$ 的两根，$\therefore m=-3$.

答案：-3

6. 解析：$A=\{x|-5<x<1\}$，因为 $A\cap B=\{x|-1<x<n\}$，$B=\{x|(x-m)(x-2)<0\}$，所以 $m=-1$，$n=1$.

答案：-1　1

模板 6　求集合中参数的取值范围

1. 解析：由 $P=\{x|x^2\leqslant 1\}$ 得 $P=\{x|-1\leqslant x\leqslant 1\}$. 由 $P\cup M=P$ 得 $M\subseteq P$. 又 $M=\{a\}$，$\therefore -1\leqslant a\leqslant 1$.

答案：C

2. 解析：$A=\{x|a-1<x<a+1\}$，$B=\{x|x>b+2$ 或 $x<b-2\}$，由 $A\subseteq B$ 得 $b+2\leqslant a-1$ 或 $b-2\geqslant a+1$.

即 $a-b\geqslant 3$ 或 $a-b\leqslant -3$，即 $|a-b|\geqslant 3$.

答案：D

3. 解析：$\because |x-2|>3$，$\therefore x>5$ 或 $x<-1$.

$\therefore S=\{x|x>5$ 或 $x<-1\}$.

又 $T=\{x|a<x<a+8\}$，$S\cup T=\mathbf{R}$.

$\therefore \begin{cases}a+8>5,\\a<-1.\end{cases}$ $\therefore -3<a<-1$.

答案：A

4. 解析：由题意，$A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$，

又 $A\subseteq B$，故 $a\leqslant -2$.

答案：$a\leqslant -2$

5. 解析：$\because A=\{x|x\leqslant 1\}$，$B=\{x|x\geqslant a\}$，且 $A\cup B=\mathbf{R}$，

$\therefore a\leqslant 1$.

答案：$a\leqslant 1$

6. 解：$A=\{0,-4\}$.

(1) $\because A\cap B=B$，$\therefore B\subseteq A$.

①若 $0\in B$，则 $a^2-1=0$，解得 $a=\pm 1$.

当 $a=1$ 时，$B=\{x|x^2+4x=0\}=A$；

当 $a=-1$ 时，$B=\{0\}\subsetneqq A$.

②若 $-4\in B$，则 $a^2-8a+7=0$，解得 $a=7$ 或 $a=1$.

当 $a=7$ 时，$B=\{x|x^2+16x+48=0\}=\{-12,-4\}\not\subseteq A$.

当 $a=1$ 时，$B=A$.

③若 $B=\varnothing$，则 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$，解得 $a<-1$.

综上所述，$a\leqslant -1$ 或 $a=1$.

(2) $\because A\cup B=B$，$\therefore A\subseteq B$.

$\because A=\{0,-4\}$，而 B 中最多有两个元素，

$\therefore A=B$，即 $a=1$.

模板 7　求函数的定义域

1. 解析：由 $\begin{cases}x+1>0,\\-x^2-3x+4>0,\end{cases}$ 解得 $-1<x<1$.

答案：C

2. 解析：要使函数有意义，需

$\begin{cases}x(x-1)\geqslant 0,\\x\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x\geqslant 1 \text{ 或 } x\leqslant 0,\\x\geqslant 0.\end{cases}$

$\therefore$ 函数的定义域为 $\{x|x\geqslant 1\}\cup\{0\}$.

答案：C

3. 解析：由 $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1,\\0\leqslant 2x+a\leqslant 1,\\0<a<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a,\\-\frac{a}{2}\leqslant x\leqslant \frac{1-a}{2},\\0<a<1,\end{cases}$

得 $-\frac{a}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1-a}{2}$.

答案：A

4. 解析：$f(f(x))=\dfrac{1}{\frac{1}{x+1}+1}=\dfrac{x+1}{x+2}$，

$\therefore x+2\neq 0$ 且 $x+1\neq 0$，即 $x\neq -2$ 且 $x\neq -1$.

所以 $f(f(x))$ 的定义域为 $\{x|x\neq -1$ 且 $x\neq -2\}$.

答案：C

5. 解析：不等式组 $\begin{cases}x^2-3x+2\geqslant 0,\\-x^2-3x+4\geqslant 0,\\x\neq 0\end{cases}$ 的解集为

$[-4,0)\cup(0,1]$.

当 $x=1$ 时，$\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{-x^2-3x+4}=0$，

不满足题意，舍去.

当 $x=-4$ 时，$\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{-x^2-3x+4}>0$，

所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-4,0)\cup(0,1)$.

答案：D

模板 8　求分段函数的函数值

1. 解析：$g(\pi)=0$，$f(g(\pi))=f(0)=0$.

答案:B

2. 解析:$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left|\frac{1}{2}-1\right|-2=-\frac{3}{2}$,

而$f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{1+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{4}{13}$.

故$f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{4}{13}$,故选 B.

答案:B

3. 解析:$f(-4)=(-4)^2=16$,

$f(f(-4))=f(16)=16-1=15$.

答案:A

4. 解析:由函数解析式,可知$f(6)=f(f(11))=f(8)=f(f(13))=f(10)=10-3=7$.

答案:B

5. 解:令$x<g(x)$,即$x^2-x-2>0$,

解得$x<-1$或$x>2$.

令$x\geqslant g(x)$,即$x^2-x-2\leqslant 0$,

解得$-1\leqslant x\leqslant 2$.

故函数$f(x)=\begin{cases}x^2+x+2(x<-1\text{ 或 }x>2),\\x^2-x-2(-1\leqslant x\leqslant 2).\end{cases}$

则$f(0)=0^2-0-2=-2$,

而$-2<-1$,则$f(f(0))=f(-2)=(-2)^2+(-2)+2=4$.

模板 9　求分段函数中参数的值

1. 解析:当$a\geqslant 0$时,$f(a)-f(1)=0$,$f(1)=3$,

即$a^2-4a+6=3$,解得$a=1$(舍去)或$a=3$.

当$a<0$时,$f(a)-f(1)=0$,$f(1)=3$.

即$a+6=3$,解得$a=-3$.

所以$a=\pm 3$.

答案:C

2. 解析:若$a\geqslant 0$,则$a^2-4a=-4$,解得$a=2$.

若$a<0$,则$3a-a^2=-4$,即$a^2-3a-4=0$,解得$a=-1$或$a=4$(舍去).综上$a=2$或$a=-1$.

答案:C

3. 解析:对$a\geqslant 0$与$a<0$进行分类讨论,

若$a\geqslant 0$,则$\frac{1}{2}a-1=a$,解得$a=-2$(舍).

若$a<0$,则$\frac{1}{a}=a$,则$a=-1$或$a=1$(舍).

答案:-1

4. 解析:由$f(1)=f(-2)$,得$1-2=-2a-1$,解得$a=0$.

答案:0

5. 解:由$f(1)=1+a$,

若$1+a\geqslant 0$,即$a\geqslant -1$时,

$f(f(1))=f(1+a)=(1+a)^2+a(1+a)=2a^2+3a+1$,

又$f(f(1))=1$,即$2a^2+3a+1=1$,

解得$a=0$或$a=-\frac{3}{2}$(舍去).

若$1+a<0$,即$a<-1$时,

$f(f(1))=f(1+a)=6+2a$,

又$f(f(1))=1$,即$6+2a=1$,

解得$a=-\frac{5}{2}$.

综上,$a=0$或$a=-\frac{5}{2}$.

模板 10　求函数的值域

1. 解析:函数值只有四个数 2,3,4,5. 故值域为$\{2,3,4,5\}$.

答案:D

2. 解析:$x^2-4x+5=(x-2)^2+1\geqslant 1$,

$\therefore \frac{8}{x^2-4x+5}\in(0,8]$.

答案:D

3. 解析:当$1\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$时,$f(x)=8x-8$,此时$0\leqslant f(x)\leqslant 4$;当$\frac{3}{2}<x\leqslant 2$时,$f(x)=16-8x$,此时$0\leqslant f(x)<4$;当$2<x\leqslant 3$时,$1<\frac{x}{2}\leqslant\frac{3}{2}$,此时$0<f(x)\leqslant 2$;当$3<x\leqslant 4$时,$\frac{3}{2}<\frac{x}{2}\leqslant 2$,此时$0\leqslant f(x)<2$;当$4<x\leqslant 8$时,$2<\frac{x}{2}\leqslant 4$,此时$0\leqslant f(x)\leqslant 1$. 综上可知$f(x)\in[0,4]$.

答案:$[0,4]$

4. 解析:(1)配方,得$y=(x+2)^2-6$,

因为$x\in\mathbf{R}$,

所以当$x=-2$时,$y_{\min}=-6$,无最大值.

所以函数的值域是$[-6,+\infty)$.

(2)令$t=\sqrt{1-2x}$,则$x=\frac{1-t^2}{2}(t\geqslant 0)$,

所以$y=\frac{1-t^2}{2}-t=-\frac{1}{2}(t+1)^2+1$.

因为 $t\geqslant0$，所以当 $t=0$ 时，$y_{max}=\frac{1}{2}$.

故函数的值域为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

(3)令 $t=x+\frac{1}{x}$，因为 $x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq0$，

所以 $t\in(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

则原函数化为 $y=t^2-t-2=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$，

当 $t=2$ 时，$y_{min}=0$，

故所求值域为 $[0,+\infty)$.

(4)因为 $y=\frac{x+1}{x+2}=\frac{(x+2)-1}{x+2}=1-\frac{1}{x+2}\neq1$，所以函数的值域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

(5)由 $y=\frac{2\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+3}$，解得 $\sqrt{x}=\frac{-3y-4}{y-2}$.

因为 $\sqrt{x}\geqslant0$，所以 $\frac{-3y-4}{y-2}\geqslant0$，解得 $-\frac{4}{3}\leqslant y<2$.

故函数的值域为 $\left[-\frac{4}{3},2\right)$.

答案：(1)$[-6,+\infty)$　(2)$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$

(3)$[0,+\infty)$　(4)$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$

(5)$\left[-\frac{4}{3},2\right)$

模板 11　求函数的解析式

1. 解析：令 $\frac{1-x}{1+x}=t$，则 $x=\frac{1-t}{1+t}$，$f(t)=\frac{1-\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2}{1+\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2}$

$=\frac{2t}{1+t^2}$.

答案：C

2. 解析：令 $x+1=t$，则 $x=t-1$，

$f(t)=2(t-1)^2+1=2t^2-4t+3$.

所以 $f(x)=2x^2-4x+3$.

答案：$2x^2-4x+3$

3. 解析：把解析式按自变量 $x+\frac{1}{x}$ 进行变形，

则 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2-1+\frac{1}{x^2}\right)$

$=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left[\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3\right]$，

令 $t=x+\frac{1}{x}$，则 $t\leqslant-2$ 或 $t\geqslant2$，得 $f(t)=t\cdot(t^2-3)$.

所以 $f(x)=x^3-3x(x\geqslant2$ 或 $x\leqslant-2)$.

答案：$f(x)=x^3-3x(x\geqslant2$ 或 $x\leqslant-2)$

4. 解析：令 $x=\frac{1}{x}$，则 $3f\left(\frac{1}{x}\right)+5f(x)=2x+1$. 由

$$\begin{cases}3f(x)+5f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x}+1,\\ 3f\left(\frac{1}{x}\right)+5f(x)=2x+1,\end{cases}$$ 消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$，得

$f(x)=\frac{5}{8}x-\frac{3}{8x}+\frac{1}{8}(x\neq0)$.

答案：$f(x)=\frac{5}{8}x-\frac{3}{8x}+\frac{1}{8}(x\neq0)$

5. 解析：令 $2x+1=t$，则 $x=\frac{t-1}{2}$，

则 $f(t)=\frac{3}{2}(t-1)+2=\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}$，

即 $f(x)=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$，又 $f(a)=4$，

则 $\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}=4$，解得 $a=\frac{7}{3}$.

答案：$\frac{7}{3}$

模板 12　函数的单调性问题

1. 解析：函数 $y=\ln(x+2)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上为增函数；函数 $y=-\sqrt{x+1}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上为减函数；函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上为减函数；函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上不具有单调性.

答案：A

2. 解析：直线 $y=kx+b$ 在 $k<0$ 时单调递减.

所以 $2a-1<0$，所以 $a<\frac{1}{2}$.

答案：D

3. 解析：由已知易知 $x\neq1$，故先排除 A，B. 又 $g(x)=\frac{1}{x-1}$ 在 $(1,+\infty)$ 上是减函数，故 $y=1-\frac{1}{x-1}$ 在 $(1,+\infty)$ 上为增函数.

答案：C

4. 解析：函数的对称轴为 $x=2-a$，因为二次函数的图象开口向上，要保证函数在 $(4,+\infty)$ 上单调递增，则 $2-a\leqslant4$，得 $a\geqslant-2$.

答案:B

5. 解析:由图象的对称性,知函数$f(x)=|2x+a|$关于直线$x=-\frac{a}{2}$对称,因为函数$f(x)=|2x+a|$的单调递增区间是$[3,+\infty)$,所以$-\frac{a}{2}=3$,即$a=-6$.

答案:-6

6. 解析:由$f(x)=a|x-b|+2$知其图象关于$x=b$对称. 又$f(x)$为一次函数,在$(-\infty,b]$与$[b,+\infty)$上具有相反的单调性,且$f(x)$在$[0,+\infty)$上为单调增函数,则$b\leqslant 0$且$a>0$.

答案:$a>0$且$b\leqslant 0$

模板 13 函数的最值问题

1. 解析:由题设,知二次函数$f(x)=x^2-2ax+a$的对称轴$x=a$在区间$(-\infty,1)$上,即$a<1$.

$g(x)=\frac{f(x)}{x}=x+\frac{a}{x}-2a,x>1$,

若$a=0$,则$g(x)=x$在区间$(1,+\infty)$上一定是增函数;

若$0<a<1$,因为分式函数$y=x+\frac{a}{x}$在区间$(\sqrt{a},+\infty)$上是增函数,这里$\sqrt{a}<1$,故函数$g(x)=\frac{f(x)}{x}$在区间$(1,+\infty)$上一定是增函数;

若$a<0$,由于$y=\frac{a}{x}$在区间$(1,+\infty)$上是增函数,故函数$g(x)=\frac{f(x)}{x}=x+\frac{a}{x}-2a$在区间$(1,+\infty)$上一定是增函数.

综上,当$a<1$时,函数$g(x)=\frac{f(x)}{x}=x+\frac{a}{x}-2a$在区间$(1,+\infty)$上一定是增函数.

答案:D

2. 解析:若函数$f(x)$在$[m,n]$上是单调递增的,则其在$[m,n]$上的最小、大值为$f(m)$,$f(n)$,最大值与最小值之差为$f(n)-f(m)$. 同理,若函数$f(x)$在$[m,n]$上是单调递减的,最大值与最小值之差为$f(m)-f(n)$. 综上,最大值与最小值之差为$|f(m)-f(n)|$.

答案:$|f(m)-f(n)|$

3. 解析:函数$f(x)=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$,其对称轴为$x=1$. 则$f(1)$最大,$f(3)$最小,$f(1)=4$,$f(3)=0$.

答案:4　0

4. 解析:$y=k(x+1)^2+1-k$. 若$k<0$,则其在顶点处取最大值,即$1-k=4$,得$k=-3<0$;若$k>0$,最大值在区间端点处取得. 由$f(-3)=4k+1-k=4$得$k=1$,此时$f(x)=(x+1)^2$,$f(2)=9$,不符合题意;由$f(2)=9k+1-k=4$得$k=\frac{3}{8}$,此时$f(x)=\frac{3}{8}(x+1)^2+\frac{5}{8}$,$f(-3)=\frac{3}{2}+\frac{5}{8}=\frac{17}{8}<4$,符合题意.

答案:-3或$\frac{3}{8}$

模板 14 函数的奇偶性问题

1. 解析:因为$f(x)$为定义在$\mathbf{R}$上的奇函数,所以有$f(0)=2^0+2\times0+b=0$,解得$b=-1$,所以当$x\geqslant 0$时,$f(x)=2^x+2x-1$,所以$f(-1)=-f(1)=-(2^1+2\times1-1)=-3$,故选A.

答案:A

2. 解析:$\because g(x)$为偶函数,$f(x)$为奇函数,

$\therefore g(2)=g(-2)=a,f(-2)=-f(2)$,

$\therefore f(2)+g(2)=a^2-a^{-2}+2$,　①

$f(-2)+g(-2)=-f(2)+g(2)=a^{-2}-a^2+2$,　②

联立①②解得$g(2)=2=a,f(2)=a^2-a^{-2}=2^2-2^{-2}=\frac{15}{4}$.

故选B.

答案:B

3. 解析:首先$[a-1,2a]$应关于原点对称,即$2a=1-a$,解得$a=\frac{1}{3}$,代入得$f(x)=\frac{1}{3}x^2+bx+\frac{2}{3}-b$,是偶函数,得$-\frac{b}{\frac{2}{3}}=0$,解得$b=0$,所以$a+b=\frac{1}{3}$.

答案:B

4. 解析:$f(x)=(x+a)(bx+2a)=bx^2+(2a+ab)x+2a^2$是偶函数,则其图象关于$y$轴对称,

$\therefore 2a+ab=0\Rightarrow b=-2$.

$\therefore f(x)=-2x^2+2a^2$,且值域为$(-\infty,4]$,$\therefore 2a^2=4$,

$\therefore f(x)=-2x^2+4$.

答案:$-2x^2+4$

5. 解析:$\because f(x)$为偶函数,$\therefore f(-x)=f(x)$,

$f(x)=x^2-4x+ax-4a$,

$f(-x)=x^2+4x-ax-4a$,

$\therefore -4x+ax=4x-ax$,

$\therefore 2ax=8x$,对任意 x 恒成立,$\therefore a=4$.

答案:4

6. 解析:由偶函数的定义可知 $k=3$,故 $f(x)=x^2+3$,其图象开口向上,故 $f(x)$ 的递减区间是 $(-\infty,0]$.

答案:$(-\infty,0]$

7. 解:$\because f(x)=\dfrac{ax^2+1}{bx+c}$ 是奇函数,

$\therefore f(-x)=\dfrac{a(-x)^2+1}{b(-x)+c}=-f(x)=-\dfrac{ax^2+1}{bx+c}$.

$\therefore b(-x)+c=-(bx+c)$,求得 $c=0$.

由 $f(1)=2,f(2)<3$,

得 $\begin{cases}\dfrac{a+1}{b}=2,\\ \dfrac{4a+1}{2b}<3,\end{cases}$ 消去 b,得 $\dfrac{4a+1}{a+1}<3$,

解得 $-1<a<2$.

又 $a\in\mathbf{Z}$,$\therefore a=0$ 或 $a=1$.

当 $a=0$ 时,求得 $b=\dfrac{1}{2}\notin\mathbf{Z}$;

当 $a=1$ 时,求得 $b=1\in\mathbf{Z}$.

$\therefore a=1,b=1,c=0$.

模板 15 解函数不等式

1. 解析:由题意知 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,由已知得 $2-a^2>a$,解得 $-2<a<1$,故选 C.

答案:C

2. 解析:依题意得 $\left|\dfrac{1}{x}\right|>1$,即 $\dfrac{1}{x}>1$ 或 $\dfrac{1}{x}<-1$ 即 $\dfrac{x-1}{x}<0$ 或 $\dfrac{x+1}{x}<0$,解得实数 x 的取值范围是 $0<x<1$ 或 $-1<x<0$,选 C.

答案:C

3. 解析:由题意知 $f(0)=-1,f(3)=1$,

$|f(x+1)|<1\Rightarrow -1<f(x+1)<1\Rightarrow f(0)<f(x+1)<f(3)$,

$\because$ 函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,

$\therefore 0<x+1<3$,解得 $-1<x<2$.

故所要求的补集为 $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$.

答案:D

4. 解析:$\because f(x)$ 为奇函数,$\therefore f(x)=-f(-x)$,

$\therefore \dfrac{f(x)-f(-x)}{x}=\dfrac{2f(x)}{x}<0$,

而 $\begin{cases}f(x)<0,\\ x>0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)>0,\\ x<0.\end{cases}$

$\because f(x)$ 是奇函数且在 $(0,+\infty)$ 上是增函数,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函数.

由 $f(1)=0$ 知 $f(-1)=0$,

$\therefore \begin{cases}f(x)<0,\\ x>0\end{cases}$ 可化为 $\begin{cases}f(x)<f(1),\\ x>0,\end{cases}$ $\therefore 0<x<1$;

$\begin{cases}f(x)>0,\\ x<0\end{cases}$ 可化为 $\begin{cases}f(x)>f(-1),\\ x<0,\end{cases}$ $\therefore -1<x<0$.

答案:D

5. 解:(1)令 $x=y=1$,得 $f(1)=2f(1)$,

故 $f(1)=0$.

(2)令 $y=\dfrac{1}{x}$,得 $f(1)=f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$,故 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=-f(x)$.

任取 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,

则 $f(x_2)-f(x_1)=f(x_2)+f\left(\dfrac{1}{x_1}\right)=f\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)$.

由于 $\dfrac{x_2}{x_1}>1$,故 $f\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)>0$,

从而 $f(x_2)>f(x_1)$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

(3)由于 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=-1$,而 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=-f(3)$,

$\therefore f(3)=1$.

在 $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$ 中,令 $x=y=3$,

得 $f(9)=f(3)+f(3)=2$.

又 $-f\left(\dfrac{1}{x-2}\right)=f(x-2)$,

故原不等式可化为 $f(x)+f(x-2)\geqslant f(9)$,

即 $f[x(x-2)]\geqslant f(9)$.

$\therefore \begin{cases}x>0,\\ x-2>0,\\ x(x-2)\geqslant 9.\end{cases}$ 解得 $x\geqslant 1+\sqrt{10}$.

$\therefore x$ 的取值范围是 $[1+\sqrt{10},+\infty)$.

模板 16 抽象函数的函数值问题

1. 解析:$\because f(x)$ 是连续的偶函数,且 $x>0$ 时是单调函数,由偶函数的性质可知,若 $f(x)=f\left(\dfrac{x+3}{x+4}\right)$,则只有两种情况:①$x=\dfrac{x+3}{x+4}$;②$x+\dfrac{x+3}{x+4}=0$.

由①知 $x^2+3x-3=0$,故其两根之和为 $x_1+x_2=-3$;

由②知 $x^2+5x+3=0$,故其两根之和为 $x_3+x_4=-5$.

$\therefore$满足条件的所有 x 之和为-8.

答案:C

2. 解析:由 $g(x)=f(x)+2$,得 $f(x)=g(x)-2$,$\because f(x)$为奇函数,$\therefore f(-1)=-f(1)=-[g(1)-2]=1$,$\therefore g(-1)=f(-1)+2=3$.

答案:3

3. 解析:$g(-2)=f(-2)+9=3$,则 $f(-2)=-6$,又 $f(x)$ 为奇函数,所以 $f(2)=-f(-2)=6$.

答案:6

4. 解析:$\because f(x)$为奇函数,$f(1)=2$,$f(x+1)=f(x+6)$,$\therefore f(0)=0$,$f(-1)=-2$,$f(10)=f(5)=f(0)=0$,$f(4)=f(-1)=-2$. 故 $f(10)+f(4)=-2$.

答案:-2

5. 解析:$f\left(\frac{1}{1-\sqrt{2}}\right)=f[-(1+\sqrt{2})]=f(1+\sqrt{2})$.

所以 $f(1+\sqrt{2})-f\left(\frac{1}{1-\sqrt{2}}\right)=0$.

答案:0

第二章 基本初等函数(Ⅰ)

模板 1 比较数的大小

1. 解析:$\because x=\ln\pi>\ln e$,$\therefore x>1$.

$\because y=\log_5 2<\log_5\sqrt{5}$. $\therefore 0<y<\frac{1}{2}$.

$\therefore z=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}>\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$,$\therefore \frac{1}{2}<z<1$.

综上可得,$y<z<x$.

答案:D

2. 解析:$\because a=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}=\log_3 2$,$b=\log_{\frac{1}{3}}\frac{2}{3}=\log_3\frac{3}{2}$,而 $2>\frac{3}{2}>\frac{4}{3}$,$\therefore a>b>c$.

答案:B

3. 解析:$\because 0<\log_5 3<\log_5 4<1<\log_4 5$.

$\therefore(\log_5 3)^2<\log_5 4$,$\therefore b<a<c$.

答案:D

4. 解析:$a=\log_3 6=1+\log_3 2$,$b=\log_5 10=1+\log_5 2$,$c=\log_7 14=1+\log_7 2$,则只要比较 $\log_3 2$,$\log_5 2$,$\log_7 2$ 的大小即可,在同一坐标系中作出函数 $y=\log_3 x$,$y=\log_5 x$,$y=\log_7 x$ 的图象,由三个图象的相对位置关系,可知 $a>b>c$,故选 D.

答案:D

5. 解析:因为 $\ln 2\in(0,1)$,所以$(\ln 2)^2<\ln 2$.

而 $\ln(\ln 2)<0$,$\ln\sqrt{2}<\ln 2$,所以 $\ln 2$ 为最大.

答案:D

6. 解析:$\left(-\frac{2}{3}\right)^3<0<\left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{3}}<1=\left(\frac{1}{5}\right)^0<\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{2}{3}}$. 这里可构造幂函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 来判断 $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}<2^{\frac{2}{3}}$.

答案:B

模板 2 对数式的化简求值

1. 解析:$2\log_5 10+\log_5 0.25=\log_5 100+\log_5 0.25=\log_5 25=2$.

答案:C

2. 解:(1)$\log_3(81\sqrt{3})=\log_3 81+\log_3\sqrt{3}$

$=\log_3 3^4+\log_3 3^{\frac{1}{2}}=4+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$.

(2)$\frac{2\lg(\lg a^{100})}{2+\lg(\lg a)}=\frac{2\lg(100\lg a)}{2+\lg(\lg a)}$

$=\frac{2[\lg 100+\lg(\lg a)]}{2+\lg(\lg a)}=\frac{2[2+\lg(\lg a)]}{2+\lg(\lg a)}=2$.

(3)原式$=-\log_6(2^2\times3)-2\log_6 3+\frac{1}{3}\log_6 3^3$

$=-(\log_6 2^2+\log_6 3)-2\log_6 3+\log_6 3$

$=-(2\log_6 2+\log_6 3)-2\log_6 3+\log_6 3$

$=-2(\log_6 2+\log_6 3)$

$=-2\log_6(2\times3)=-2$.

3. 解:(1)方法一:由 $x=\log_2 3$ 得 $2^x=3$,$2^{-x}=\frac{1}{3}$,

$\therefore\frac{2^{3x}-2^{-3x}}{2^x-2^{-x}}=\frac{3^3-\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3-\frac{1}{3}}=3^2+3\times\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{91}{9}$.

方法二:$\frac{2^{3x}-2^{-3x}}{2^x-2^{-x}}=\frac{(2^x-2^{-x})(2^{2x}+1+2^{-2x})}{2^x-2^{-x}}$

$=2^{2x}+1+2^{-2x}=3^2+1+\frac{1}{3^2}=\frac{91}{9}$.

(2)由已知,可得 $\lg(xy)=\lg(x-2y)^2$,从而 $xy=(x-2y)^2$,整理得 $x^2-5xy+4y^2=0$,即$(x-y)(x-4y)=0$.

$\therefore x=y$ 或 $x=4y$.

但由 $x>0$,$y>0$,$x-2y>0$,可得 $x>2y>0$,

$\therefore x=y$ 应舍去,

故 $x=4y$,即 $\frac{x}{y}=4$.

$\therefore \log_{\sqrt{2}}\frac{x}{y}=\log_{\sqrt{2}}4=\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^4=4$.

4. 解：由 $a^2-2ab-9b^2=0$，

得 $\left(\frac{a}{b}\right)^2-2\left(\frac{a}{b}\right)-9=0$.

令 $\frac{a}{b}=x>0$，$\therefore x^2-2x-9=0$，解得 $x=1+\sqrt{10}$（另一负根已舍去），且 $x^2=2x+9$，

$\therefore \lg(a^2+ab-6b^2)-\lg(a^2+4ab+15b^2)$

$=\lg\frac{a^2+ab-6b^2}{a^2+4ab+15b^2}=\lg\frac{x^2+x-6}{x^2+4x+15}$

$=\lg\frac{(2x+9)+x-6}{(2x+9)+4x+15}=\lg\frac{3(x+1)}{6(x+4)}$

$=\lg\frac{x+1}{2(x+4)}=\lg\frac{\sqrt{10}+2}{2\sqrt{10}+10}$

$=\lg\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$.

模板 3　解指数(对数)方程或不等式

1. 解析：原方程即为 $(3^x)^2-6\cdot 3^x-7=0$. 令 $3^x=t(t>0)$，则原方程变为 $t^2-6t-7=0$. 解得 $t=7$ 或 $t=-1$（舍去）. 又 $3^x=7$，两边取对数得 $x=\log_3 7$.

答案：$\log_3 7$

2. 解：当 $x<0$ 时，$f(x)=0$ 恒成立.

当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=2$，即 $2^x-\frac{1}{2^x}=2$，

令 $2^x=t(t>0)$，则 $t-\frac{1}{t}=2$.

即 $t^2-2t-1=0$，解得

$t=1+\sqrt{2}$ 或 $t=1-\sqrt{2}$（舍去）.

代入得 $2^x=1+\sqrt{2}$，即 $x=\log_2(1+\sqrt{2})$.

3. 解：当 $x>1$ 时，$f(x)=-x<-1$.

当 $x\leqslant 1$ 时，$f(x)=2$，即 $3^x+1=2$，

则 $3^x=1$，所以 $x=0$.

4. 解：令 $\log_2 x=t$，则 $\log_5 t=0$.

解得 $t=1$，所以 $\log_2 x=1$，

解得 $x=2$.

5. 解：原不等式可化为 $\log_a x(\log_a x-m)<0$，

(1)当 $a>1$ 时，有：

①当 $m>0$ 时，则由不等式解得 $0<\log_a x<m$，

$\therefore 1<x<a^m$.

②当 $m<0$ 时，则由不等式解得 $m<\log_a x<0$，

$\therefore a^m<x<1$.

③当 $m=0$ 时，则不等式无解.

(2)当 $0<a<1$ 时，有：

①当 $m>0$ 时，则由不等式解得 $0<\log_a x<m$，

$\therefore a^m<x<1$.

②当 $m<0$ 时，则由不等式解得 $m<\log_a x<0$，

$\therefore 1<x<a^m$.

③当 $m=0$ 时，则不等式无解.

模板 4　指数函数、对数函数、幂函数的性质

1. 解析：根据题意得 $\begin{cases}1-x>0,\\x\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant x<1$，即所求定义域为 $[0,1)$.

答案：B

2. 解析：由题意得 $\begin{cases}x+1>0,\\x-1\neq 0,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}x>-1,\\x\neq 1.\end{cases}$ 故选 C.

答案：C

3. 解析：由题意得 $\begin{cases}1-2^x\geqslant 0,\\x+3>0,\end{cases}$ 所以 $-3<x\leqslant 0$.

答案：A

4. 解析：从函数定义域切入，$1-x\geqslant 0$，$\therefore x\leqslant 1$，依据补集的运算知识得所求集合为 $(1,+\infty)$，选 B.

答案：B

5. 解析：$\sqrt{(3-a)(a+6)}=\sqrt{-\left(a+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{81}{4}}\leqslant\frac{9}{2}$，

当且仅当 $a=-\frac{3}{2}$ 时等号成立.

答案：B

模板 5　求参数的值或取值范围

1. 解析：当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=-x^2+2x=-(x-1)^2+1\leqslant 0$，所以 $|f(x)|\geqslant ax$ 化简为 $x^2-2x\geqslant ax$，即 $x^2\geqslant(a+2)x$，因为 $x\leqslant 0$，所以 $a+2\geqslant x$ 恒成立，所以 $a\geqslant -2$；当 $x>0$ 时，$f(x)=\ln(x+1)>0$，所以 $|f(x)|\geqslant ax$ 化简为 $\ln(x+1)>ax$ 恒成立，由函数图象可知 $a\leqslant 0$，综上，当 $-2\leqslant a\leqslant 0$ 时，不等式 $|f(x)|\geqslant ax$ 恒成立，选 D.

答案：D

2. 解析：因为 $\log_{\frac{1}{2}}a=-\log_2 a$，且 $f(x)$ 是偶函数，所以

$f(\log_2 a)+f(\log_{\frac{1}{2}}a)=2f(\log_2 a)=2f(|\log_2 a|)\leqslant 2f(1)$，

即 $f(|\log_2 a|)\leqslant f(1)$，又函数在 $[0,+\infty)$ 上单调递

增，所以 $0\leq|\log_2 a|\leq 1$，即 $-1\leq\log_2 a\leq 1$，解得 $\frac{1}{2}\leq a\leq 2$.

答案：C

3. 解析：$f(a)>f(-a)\Rightarrow$

$\begin{cases}a>0,\\ \log_2 a>\log_{\frac{1}{2}}a\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0,\\ \log_{\frac{1}{2}}(-a)>\log_2(-a)\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}a>0,\\ a>\frac{1}{a}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a<0,\\ \frac{1}{a}<a\end{cases}\Rightarrow a>1$ 或 $-1<a<0$. 故选 C.

答案：C

4. 解析：因为 $f(x)$ 是偶函数，所以恒有 $f(-x)=f(x)$，即 $-x(e^{-x}+ae^{x})=x(e^{x}+ae^{-x})$，

化简，得 $x(e^{-x}+e^{x})(a+1)=0$.

因为上式对任意实数 x 都成立，所以 $a=-1$.

答案：-1

5. 解析：令 $t=|x-a|$，则 $t=|x-a|$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上单调递增，而 $y=e^{t}$ 为增函数，所以要使函数 $f(x)=e^{|x-a|}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，则有 $a\leq 1$，所以 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

答案：$(-\infty,1]$

6. 解析：$g(x)=(1-4m)\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，应有 $1-4m>0$，即 $m<\frac{1}{4}$.

当 $a>1$ 时，$f(x)=a^{x}$ 为增函数，由题意知 $\begin{cases}a^2=4,\\ a^{-1}=m,\end{cases}$

解得 $m=\frac{1}{2}$，与 $m<\frac{1}{4}$ 矛盾.

当 $0<a<1$ 时，$f(x)=a^{x}$ 为减函数，

由题意知 $\begin{cases}a^2=m,\\ a^{-1}=4,\end{cases}$ 解得 $m=\frac{1}{16}$，满足 $m<\frac{1}{4}$. 故 $a=\frac{1}{4}$.

答案：$\frac{1}{4}$

模板 6 求函数的反函数

1. 解析：反函数的定义域即为原函数的值域，又由 $y=3^{x}$ 在定义域上为增函数，故其在 $(0,2]$ 上的值域为 $(1,9]$.

答案：B

2. 解析：$\because y=a^{x}\Rightarrow x=\log_a y$，$\therefore f(x)=\log_a x$，又点 $(\sqrt{a},a)$ 在函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 上，

$\therefore a=\log_a\sqrt{a}=\frac{1}{2}$，$\therefore f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$.

答案：B

3. 解析：由题意知 $y=g(x)$ 应为 $y=e^{x}$ 的反函数. 由 $y=e^{x}$，得 $x=\ln y$，即 $y=g(x)=\ln x$，而 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)=\ln x$ 图象之间关于 y 轴对称，故可得 $y=f(x)=\ln(-x)$. 又 $f(m)=-1$，所以 $\ln(-m)=-1$，得 $-m=e^{-1}$，即 $m=-\frac{1}{e}$.

答案：B

4. 解析：当 $x=-2$ 时，$f(-2)=\log_a(-2+3)=0$，

$\therefore f(x)$ 恒过点 $(-2,0)$，即反函数的图象恒过点 $P(0,-2)$.

答案：$(0,-2)$

模板 7 函数图象的判断

1. 解析：由幂函数的性质知：①图象过 $(1,1)$ 点，可排除 A，D；②当 $0<\alpha<1$ 时，$y=x^{\alpha}$ 为增速较缓的增函数，故可排除 C，从而选 B.

答案：B

2. 解析：当 $x=1$ 时，$y=a^{1}-a=0$，所以函数 $y=a^{x}-a$ 的图象恒过定点 $(1,0)$，只有 C 选项符合.

答案：C

3. 解析：$y=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}=1+\frac{2}{e^{2x}-1}$，当 $x>0$ 时，$e^{2x}-1>0$ 且随着 x 的增大而增大，故 $y=1+\frac{2}{e^{2x}-1}>1$ 且随着 x 的增大而减小，即函数 y 在 $(0,+\infty)$ 上恒大于 1 且单调递减. 又函数 y 是奇函数，故选 A.

答案：A

4. 解析：因为函数的定义域是非零实数集，所以 A 错；当 $x<0$ 时，$y>0$，所以 B 错；当 $x=2$ 时，$y=1$，当 $x=4$ 时，$y=\frac{4}{5}$，$1>\frac{4}{5}$，所以 D 错，故选 C.

答案：C

第三章 函数的应用

模板 1 判断函数的零点个数

1. 解析：由已知 $g(x)=(x-2)^2+1$，所以其顶点为 $(2,1)$，又 $f(2)=2\ln 2\in(1,2)$，可知点 $(2,1)$ 位于函数 $f(x)=2\ln x$ 图象的下方，故函数 $f(x)=2\ln x$

的图象与函数 $g(x)=x^2-4x+5$ 的图象有两个交点.

答案:B

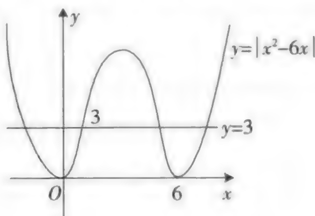
2. 解析:由 $\Delta=4+8>0$ 可知函数图象与 x 轴有两个交点,即有两个零点.

答案:C

3. 解析:因为 $\Delta=b^2-4ac=(a+c)^2-4ac=(a-c)^2\geqslant 0$,函数 $f(x)$的图象与 x 轴有 1 或 2 个交点,即函数 $f(x)$的零点个数为 1 或 2.

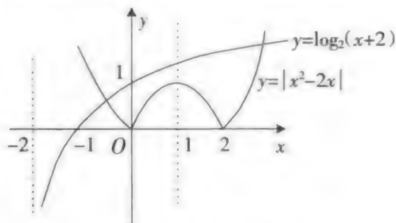
答案:D

4. 解析:构造两函数 $f(x)=|x^2-6x|$,$g(x)=3$,画出两函数图象如图所示,由图象知两函数的图象的交点个数为 4,即零点个数为 4.



答案:A

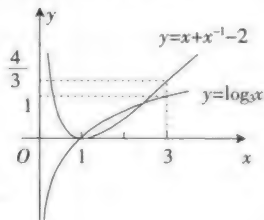
5. 解析:设 $g(x)=|x^2-2x|$,$h(x)=\log_2(x+2)$,则 $f(x)=g(x)-h(x)$,$g(x)$与 $h(x)$的图象如图所示.



显然,$g(x)$与 $h(x)$有两个交点,即 $f(x)$有两个零点.

答案:2

6. 解析:函数 $y=x+x^{-1}-2$ 与函数 $y=\log_3x$ 的图象如图,故方程实数解的个数是 2.



答案:2

模板 2　判断区间内是否有零点

1. 解析:因为 $f(-1)=e^{-1}-1-2=e^{-1}-3<0$,$f(0)=e^0+0-2=-1<0$,$f(1)=e^1+1-2=e-1>0$,所以函数 $f(x)=e^x+x-2$ 的零点所在的一个区间是$(0,1)$. 故选 C.

答案:C

2. 解析:构造函数 $f(x)=\lg x+x-2$,由 $f(1.75)=f\left(\frac{7}{4}\right)=\lg\frac{7}{4}-\frac{1}{4}<0$,$f(2)=\lg 2>0$ 知 x_0 属于区间$(1.75,2)$. 故选 D.

答案:D

3. 解析:因为 $f(-2)=2^{-2}-6<0$,$f(-1)=2^{-1}-3<0$,$f(0)=2^0+0=1>0$,所以函数 $f(x)=2^x+3x$ 的零点所在的一个区间是$(-1,0)$. 故选 B.

答案:B

4. 解析:令 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x-x^{\frac{1}{3}}$,$f(1)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}<0$,

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}<0$,

$f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}>0$,

$f\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}<0$,

$\therefore f(x)$在$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$内有零点.

答案:C

5. 解析:由题意易知 $f(a)=(a-b)(a-c)>0$,$f(b)=(b-c)(b-a)<0$,$f(c)=(c-a)(c-b)>0$,函数 $f(x)$在区间(a,b)和(b,c)内各存在一个零点.

答案:A

模板 3　利用零点求参数的取值范围

1. 解析:由 $g(x)=0$,得 $x^2-mx+e^2=0$,$x>0$.

由此方程有大于零的根,得$\begin{cases}\frac{m}{2}>0,\\ \Delta=m^2-4e^2\geqslant 0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}m>0,\\ m\geqslant 2e\text{ 或 }m\leqslant -2e,\end{cases}$故 $m\geqslant 2e$.

答案:$m\geqslant 2e$

2. 解析：设$f(x)=(m-2)x^2+3mx+1$，由题意知 $m\neq2$.

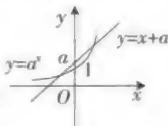
因为$f(0)=1>0$，所以$\begin{cases}f(-1)=m-2-3m+1<0,\\f(2)=4(m-2)+6m+1<0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}m>-\frac{1}{2},\\m<\frac{7}{10},\end{cases}$

所以实数 m 的取值范围是$\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{10}\right)$.

答案：$\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{10}\right)$

3. 解析：设函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$和函数 $y=x+a$，则函数$f(x)=a^x-x-a(a>0$，且 $a\neq1)$有两个零点，就是函数 $y=a^x(a>0$，且 $a\neq1)$与函数 $y=x+a$ 有两个交点，由图象可知当 $0<a<1$ 时两函数只有一个交点，不符合；如图，当 $a>1$ 时，因为函数 $y=a^x(a>1)$的图象过点$(0,1)$，而直线 $y=x+a$ 与 y 轴的交点一定在点$(0,1)$的上方，所以一定有两个交点. 所以实数 a 的取值范围是 $a>1$.



答案：$(1,+\infty)$

4. 解：若存在实数 a 使函数$f(x)$在$(-1,3)$有且只有一个零点，则只需$f(-1)\cdot f(3)<0$ 即可.

$f(-1)\cdot f(3)=(1-3a+2+a-1)\cdot(9+9a-6+a-1)$
$=4(1-a)(5a+1)<0$，

解得 $a<-\frac{1}{5}$ 或 $a>1$.

当$f(-1)=0$ 时，$a=1$. 所以$f(x)=x^2+x$.

令$f(x)=0$，即 $x^2+x=0$，得 $x=0$ 或 $x=-1$.

方程在$[-1,3]$上有两根，不合题意，故 $a\neq1$.

当$f(3)=0$ 时，$a=-\frac{1}{5}$，此时$f(x)=x^2-\frac{13}{5}x-\frac{6}{5}$.

令$f(x)=0$，即 $x^2-\frac{13}{5}x-\frac{6}{5}=0$，

解得 $x=-\frac{2}{5}$ 或 $x=3$.

方程在$[-1,3]$上有两根，不合题意，故 $a\neq-\frac{1}{5}$.

综上所述，$a<-\frac{1}{5}$ 或 $a>1$.

模板 4　利用函数模型解应用题

1. 解析：由条件可知，$x\geqslant A$ 时所用的时间为常数，所以组装第 4 件产品用时必然满足第一个分段函数，即$f(4)=\frac{c}{\sqrt{4}}=30\Rightarrow c=60$，$f(A)=\frac{60}{\sqrt{A}}=15\Rightarrow A=16$，选 D.

答案：D

2. 解析：设扣税前应得稿费为 x 元，则应纳税额 y 为分段函数，由题意，得

$$y=\begin{cases}0, & x\leqslant800,\\(x-800)\times14\%, & 800<x\leqslant4\ 000,\\11\%\cdot x & x>4\ 000.\end{cases}$$

如果稿费大于 4 000 元应至少纳税 440 元，现知某人共纳税 420 元，所以稿费应在 800~4 000 元之间，$\therefore(x-800)\times14\%=420$，$\therefore x=3\ 800$.

答案：C

3. 解析：(1)由题意和图知，当 $0\leqslant t\leqslant0.1$ 时，可设 $y=kt$(k 为待定系数)，由于点$(0.1,1)$在直线上，$\therefore k=10$；同理，当 $t=0.1$ 时，可得 $1=\left(\frac{1}{16}\right)^{0.1-a}$，

$\therefore0.1-a=0$，即 $a=\frac{1}{10}$.

$$\therefore y=\begin{cases}10t,0\leqslant t\leqslant0.1,\\\left(\frac{1}{16}\right)^{t-\frac{1}{10}},t>0.1.\end{cases}$$

(2)由当空气中每立方米的含药量降低到 0.25 毫克以下时，学生方可进教室可得，$\left(\frac{1}{16}\right)^{t-\frac{1}{10}}\leqslant0.25$ 即$\left(\frac{1}{16}\right)^{t-\frac{1}{10}}\leqslant\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$，即 $t-\frac{1}{10}\geqslant\frac{1}{2}$，$\therefore t\geqslant\frac{6}{10}=0.6$.

答案：(1)$y=\begin{cases}10t,0\leqslant t\leqslant0.1,\\\left(\frac{1}{16}\right)^{t-\frac{1}{10}},t>0.1\end{cases}$　(2)0.6

4. 解：(1)由题意知，E 移动时单位时间内的淋雨量为$\frac{3}{20}|v-c|+\frac{1}{2}$，故 $y=\frac{100}{v}\cdot\left(\frac{3}{20}|v-c|+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{v}(3|v-c|+10)$.

(2)由(1)知，当 $0<v\leqslant c$ 时，$y=\frac{5}{v}(3c-3v+10)=\frac{5(3c+10)}{v}-15$；

当 $c<v\leqslant10$ 时，$y=\frac{5}{v}(3v-3c+10)=\frac{5(10-3c)}{v}+15$.

故 $y=\begin{cases}\frac{5(3c+10)}{v}-15, & 0<v\leqslant c,\\ \frac{5(10-3c)}{v}+15, & c<v\leqslant10.\end{cases}$

①当 $0<c\leqslant\frac{10}{3}$ 时，y 是关于 v 的减函数，故当 $v=10$ 时，$y_{\min}=20-\frac{3c}{2}$.

②当 $\frac{10}{3}<c\leqslant5$ 时，在 $(0,c]$ 上，y 是关于 v 的减函数；在 $(c,10]$ 上，y 是关于 v 的增函数. 故当 $v=c$ 时，$y_{\min}=\frac{50}{c}$.

必修 2

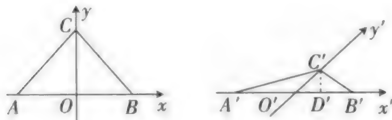
第一章 空间几何体

模板 1 根据直观图计算原图形面积

1. 解析：根据斜二测画法规则画出直观图，如图. 作 $B'E\perp x'$ 轴于点 E，在 $Rt\triangle B'C'E$ 中，$B'C'=1$，$\angle B'C'E=45°$，则 $B'E=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 A.

答案：A

2. 解析：



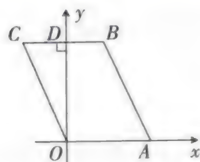
由斜二测画法可知，$A'B'=AB=a$，$O'C'=\frac{1}{2}OC=\frac{\sqrt{3}}{4}a$，在 $\triangle A'B'C'$ 中，作 $C'D'\perp A'B'$ 于 D'，

则 $C'D'=\frac{\sqrt{2}}{2}O'C'=\frac{\sqrt{6}}{8}a$.

$\therefore S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}A'B'\cdot C'D'=\frac{1}{2}\times a\times\frac{\sqrt{6}}{8}a=\frac{\sqrt{6}}{16}a^2$.

答案：D

3. 解析：将直观图还原得▱$OABC$(如图).



$\because O'D'=\sqrt{2}\ O'C'=2\sqrt{2}$ cm,

$OD=2O'D'=4\sqrt{2}$ cm，$C'D'=O'C'=2$cm，

$\therefore CD=2$cm，$OC=\sqrt{CD^2+OD^2}=\sqrt{2^2+(4\sqrt{2})^2}=6$cm，

又 $OA=O'A'=6$cm$=OC$，故原图形为菱形.

答案：C

4. 解析：由题意，得直观图 $A'B'C'D'$ 是一个上底为 1，下底为 3，高为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 的梯形，所以直观图 $A'B'C'D'$ 的面积为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

答案：$\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. 解析：如图 1，在直观图中，过点 A 作 $AE\perp BC$，垂足为 E，

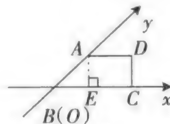


图 1

在 $Rt\triangle ABE$ 中，$AB=1$，$\angle ABE=45°$，$\therefore BE=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

而四边形 $AECD$ 为矩形，$AD=1$，

$\therefore EC=AD=1$. $\therefore BC=BE+EC=\frac{\sqrt{2}}{2}+1$.

由此可还原原图形如图 2.

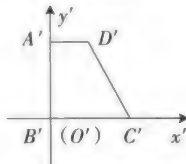


图 2

在原图形中，$A'D'=1$，$A'B'=2$，$B'C'=\frac{\sqrt{2}}{2}+1$，且 $A'D'\parallel B'C'$，$A'B'\perp B'C'$，

$\therefore$ 这块菜地的面积为 $S=\frac{1}{2}(A'D'+B'C')\cdot A'B'=$

$\frac{1}{2}\times\left(1+1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times2=2+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

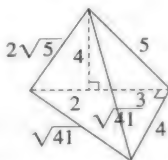
答案：$2+\frac{\sqrt{2}}{2}$

模板 2 由三视图求表面积或体积

1. 解析：由三视图可知，该几何体是三棱锥，高为 3，所以几何体的体积为 $V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times3\times3=9$，选 B.

答案：B

2. 解析：从所给的三视图可以得到该几何体为三棱锥，直观图如图所示.



可得：$S_{底}=10, S_{后}=10, S_{右}=10$，$S_{左}=6\sqrt{5}$，因此该几何体表面积 $S=10+10+10+6\sqrt{5}=30+6\sqrt{5}$，故选 B.

答案：B

3. 解析：该几何体是同底的圆柱和圆锥的组合体，根据三视图中的数量关系，可得 $V=V_{圆锥}+V_{圆柱}=\frac{1}{3}\times\pi\times3^2\times\sqrt{5^2-3^2}+\pi\times3^2\times5=57\pi$. 故选 C.

答案：C

4. 解析：设圆锥的母线长为 l，底面半径为 r. 因为半圆面的面积为 $\frac{1}{2}\pi l^2=2\pi$，所以 $l^2=4$，$l=2$，底面圆的周长 $2\pi r=\pi l=2\pi$，$r=1$，所以圆锥的高 $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{3}$，所以圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$.

答案：$\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

5. 解析：根据三视图可知，这是一个上面为长方体，下面为两个直径为 3 的球构成的组合体，两个球的体积和为 $2\times\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{3}{2}\right)^3=9\pi$，长方体的体积为 $1\times3\times6=18$，所以该几何体的体积为 $18+9\pi$.

答案：$18+9\pi$

模板 3 求球的体积或表面积

1. 解析：由已知，$O_1A=3$，$O_1O=4$，从而 $R=OA=5$，

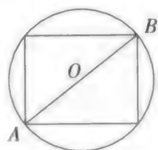
$\therefore V_{球}=\frac{4\pi}{3}\times5^3=\frac{500\pi}{3}(\text{cm}^3)$.

答案：C

2. 解析：设三棱柱上底面所在圆的半径为 r，球的半径为 R，由已知 $r=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{3}a$. 又 $\because R^2=r^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2=\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{4}a^2=\frac{7}{12}a^2$，$\therefore S_{球}=4\pi R^2=4\pi\cdot\frac{7}{12}a^2=\frac{7}{3}\pi a^2$，故选 B.

答案：B

3. 解析：如图为过长方体的一条体对角线 AB 的截面. 设长方体的有公共顶点的三条侧棱的长分别为 x,y,z，则由已知有 $\begin{cases}xy=\sqrt{3},\\yz=\sqrt{5},\\zx=\sqrt{15},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\sqrt{3},\\y=1,\\z=\sqrt{5}.\end{cases}$



$\therefore$ 球的半径 $R=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{3}{2}$.

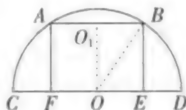
$\therefore S_{球}=4\pi R^2=9\pi$.

答案：9π

4. 解析：由于正六棱柱的所有顶点都在同一个球面上，则六棱柱底面圆半径 $r=\frac{\sqrt{6}}{2}$，球心 O 到底面的距离 $d=\frac{\sqrt{6}}{2}$，球的半径 $R=\sqrt{r^2+d^2}=\sqrt{3}$，$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3=4\sqrt{3}\pi$.

答案：$4\sqrt{3}\pi$

5. 解析：如图是半球的内接正方体的对角面轴截面图，过 B 作 $BE\perp OD$ 于 E，则 $OE=O_1B$，设正方体的棱长为 a，则 $O_1B=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，



在 Rt△OEB 中，$OB=R$（球半径），$OE=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$BE=a$，$\therefore R^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2+a^2=\frac{3}{2}a^2$，而 $S_{正方体}=6a^2$，

$S_{半球}=\frac{1}{2}\times4\pi R^2=3\pi a^2$，

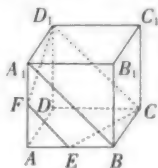
$\therefore \frac{S_{半球}}{S_{正方体}}=\frac{3\pi a^2}{6a^2}=\frac{\pi}{2}$.

答案：$\pi:2$

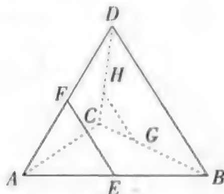
第二章 点、直线、平面之间的位置关系

模板1 共面问题的证明

1. 证明：如图，连接 EF,CD_1,A_1B.
∵E,F 分别是 AB,AA_1 的中点，∴$EF/\!/A_1B$.
又 $A_1B/\!/D_1C$，∴$EF/\!/CD_1$，
∴E,C,D_1,F 四点共面.



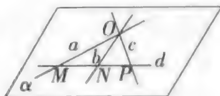
2. 证明：连接 EF,GH.



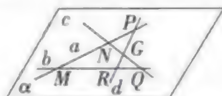
由 E,F 分别为 AB,AD 的中点，
∴$EF\underline{\underline{/\!/}}\frac{1}{2}BD$.
由 $CG=\frac{1}{3}BC,CH=\frac{1}{3}DC$，∴$HG\underline{\underline{/\!/}}\frac{1}{3}BD$.
∴$EF/\!/HG$.
∴EF,HG 可确定平面 α，
∴E,F,H,G 四点共面.

3. 证明：如图，连 QP 并延长交 DA 的延长线于 H_1，连 MN 并延长交 DA 延长线于 H_2.
由 Q、P 均为中点，且 $BC/\!/AD$，
易证：$AH_1=BQ=\frac{1}{2}BC$，
同理可证：$AH_2=A_1M=\frac{1}{2}A_1D_1$，
∵$A_1D_1=BC$，∴H_1,H_2 重合，不妨设为 H，
若设过 N、P、Q 的平面为平面 α.
易知 $H\in\alpha$，∵$N\in\alpha$，∴$M\in\alpha$. 同理可证，$R,S\in\alpha$，
∴P,Q,R,S,M,N 共面.

4. 证明：(1)如图，设直线 a、b、c 相交于 O 点，直线 d 和 a、b、c 分别交于 M、N、P 三点，直线 d 和点 O 确定平面 α. ∵$O\in$ 直线 a，$M\in$ 直线 a，
∴ 直线 $a\subset$ 平面 α.
同理，$b\subset$ 平面 α，$c\subset$ 平面 α.



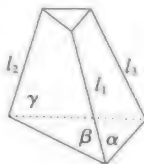
∴a、b、c、d 四线共面.
(2)如图，设直线 a、b、c、d 两两相交，且任意三条直线不共点.



∵ 直线 $a\cap b=M$，∴ 直线 a 和 b 确定平面 α.
∵$a\cap c=N,b\cap c=Q$，∴N、Q 都在平面 α 内.
∴ 直线 $c\subset$ 平面 α. 同理可证，直线 $d\subset$ 平面 α.
∴ 直线 a、b、c、d 共面于 α.
综合(1)(2)知，两两相交且不过同一点的四条直线必在同一平面内.

模板2 证明线共点或点共线问题

1. 解：已知：平面 α、β、γ 两两相交于三条直线 l_1、l_2、l_3，且 l_1、l_2、l_3 不平行.
求证：l_1、l_2、l_3 相交于一点.
证明：如图，$\alpha\cap\beta=l_1,\beta\cap\gamma=l_2$，$\alpha\cap\gamma=l_3$，

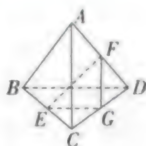


∵$l_1\subset\beta,l_2\subset\beta$，且 l_1、l_2 不平行，
∴l_1 与 l_2 必相交. 设 $l_1\cap l_2=P$，
则 $P\in l_1\subset\alpha,P\in l_2\subset\gamma$，
∴$P\in\alpha\cap\gamma=l_3$，∴l_1、l_2、l_3 相交于一点 P.

2. 证明：∵$AA_1/\!/CC_1$，
∴AA_1、CC_1 确定一个平面 A_1C，
显然有 $A_1C\subset$ 平面 A_1C
又 ∵$A_1C\cap$ 平面 $BC_1D=O$，$AC\cap BD=M$，
∴ 点 C_1、O、M 三点在平面 A_1C 内，也在平面 BC_1D 内，从而 C_1、O、M 三点都在这两个平面的交线上，即 C_1、O、M 三点共线.

模板3 求异面直线所成的角

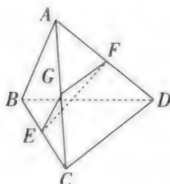
1. 解：如图，取 CD 的中点 G，连接 EG,FG，则 $EG/\!/BD$，所以相交直线 EF 与 EG 所成的角即为异面直线 EF 与 BD 所成



的角. 在 Rt△EGF 中，因为 $EG=FG=\frac{1}{2}AC$，且 $EG\perp FG$，即 $\angle EGF=90°$，所以 $\angle FEG=45°$，即异面直线 EF 与 BD 所成的角为 45°.

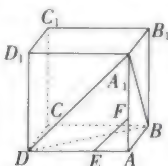
2. 解：在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，因为 E、F 分别是 AD，AA_1 的中点，
所以 $EF/\!/A_1D$.
因为 $AD/\!/B_1C_1$，$AD=B_1C_1$，
所以四边形 ADC_1B_1 为平行四边形.
所以 $AB_1/\!/DC_1$.
所以 $\angle A_1DC_1$ 是直线 AB_1 和 EF 所成的角.
因为 $\triangle A_1DC_1$ 是等边三角形，
所以 $\angle A_1DC_1=60°$，即直线 AB_1 和 EF 所成的角是 60°.

3. 解：取 AC 的中点 G，连接 EG、FG，



则 $EG \underline{/\!/} \frac{1}{2}AB$，$GF \underline{/\!/} \frac{1}{2}CD$，
由 $AB=CD$ 知 $EG=FG$，
$\therefore \angle GEF$（或它的补角）为 EF 与 AB 所成的角，$\angle EGF$（或它的补角）为 AB 与 CD 所成的角.
$\because AB$ 与 CD 所成的角为 30°，
$\therefore \angle EGF=30°$ 或 150°.
由 $EG=FG$ 知 $\triangle EFG$ 为等腰三角形，
当 $\angle EGF=30°$ 时，$\angle GEF=75°$；
当 $\angle EGF=150°$ 时，$\angle GEF=15°$.
故 EF 与 AB 所成的角为 15°或 75°.

4. 解：(1)如图，$\because CC_1/\!/A_1A$，$\therefore A_1B$ 和 AA_1 所成的锐角 $\angle AA_1B$ 就是 A_1B 和 CC_1 所成的角.

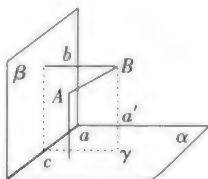


$\because \angle AA_1B=45°$，$\therefore A_1B$ 和 CC_1 所成的角是 45°.
(2)如图，连接 DA_1、DB.
$\because EF/\!/A_1D$，$\therefore \angle DA_1B$ 是直线 A_1B 和 EF 所成的角.
$\because \triangle A_1DB$ 是等边三角形，$\therefore \angle DA_1B=60°$，即直线 A_1B 和 EF 所成的角是 60°.

模板 4 线线平行的证明

1. 解析：若 $\alpha\perp\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则 m 与 n 可能平行，故 A 错；若 $\alpha/\!/\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则 m 与 n 可能平行，也可能异面，故 B 错；若 $m\perp n$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则 α 与 β 可能相交，也可能平行，故 C 错；对于 D 项，由 $m\perp\alpha$，$m/\!/n$，得 $n\perp\alpha$，又知 $n/\!/\beta$，故 $\alpha\perp\beta$，所以 D 项正确.
答案：D

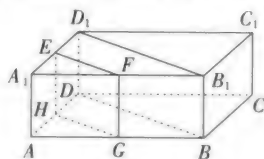
2. 证明：过点 B 引直线 $a'/\!/a$，a' 与 b 确定的平面设为 γ，如图.



因为 $a'/\!/a$，$AB\perp a$，所以 $AB\perp a'$.
又 $a'\cap b=B$，$AB\perp b$，所以 $AB\perp\gamma$.
因为 $b\perp\beta$，$c\subset\beta$，所以 $b\perp c$. ①
因为 $a\perp\alpha$，$c\subset\alpha$，所以 $a\perp c$.
又 $a'/\!/a$，所以 $a'\perp c$. ②
由①②可得 $c\perp\gamma$，又 $AB\perp\gamma$，所以 $AB/\!/c$.

模板 5 线面平行的证明

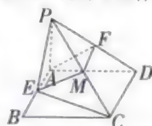
1. 解析：如图，在 A_1A 和四边形 BB_1D_1D 之间的四条棱的中点 F、E、H、G 组成的平面中，有 EF、FG、GH、HE、EG、HF 共 6 条直线与平面 BB_1D_1D 平行，另一侧还有 6 条，共 12 条. 故选 D.



答案：D

2. $b/\!/\beta$ 或 $b\subset\beta$

3. 证明：取 PC 的中点 M，连接 ME，MF，则 $FM/\!/CD$ 且 $FM=\frac{1}{2}CD$.
又 $\because AE/\!/CD$ 且 $AE=\frac{1}{2}CD$，



$\therefore FM \mathrel{\underline{\parallel}} AE$,即四边形 $AFME$ 是平行四边形.

$\therefore AF/\!/ME$,又 $\because AF\not\subset$ 平面 PCE,$EM\subset$ 平面 PCE,

$\therefore AF/\!/$平面 PCE.

4. 解:方法一:取 AA_1,A_1B_1 的中点 M,N,如图 1,连接 MN,NQ,MP,A_1D,B_1D_1.

易知 P 在 A_1D 上,Q 在 B_1D_1 上.

则 $MP/\!/AD$,$MP=\frac{1}{2}AD$,$NQ/\!/A_1D_1$,$NQ=\frac{1}{2}A_1D_1$,

$\therefore MP/\!/NQ$ 且 $MP=NQ$.

$\therefore$ 四边形 $PQNM$ 为平行四边形. $\therefore PQ/\!/MN$.

$\because MN\subset$ 平面 AA_1B_1B,$PQ\not\subset$ 平面 AA_1B_1B,

$\therefore PQ/\!/$平面 AA_1B_1B.

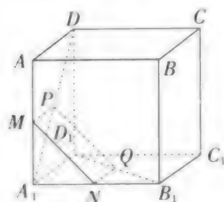


图 1

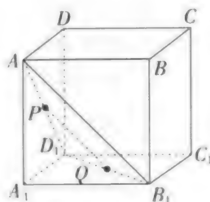


图 2

方法二:如图 2,连接 AD_1,AB_1,B_1D_1,在 $\triangle AB_1D_1$ 中,显然,P,Q 分别是 AD_1,D_1B_1 的中点,

$\therefore PQ/\!/AB_1$ 且 $PQ=\frac{1}{2}AB_1$.

$\because PQ\not\subset$ 平面 AA_1B_1B,$AB_1\subset$ 平面 AA_1B_1B,

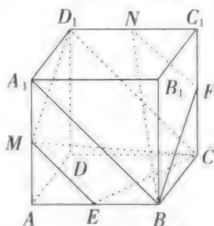
$\therefore PQ/\!/$平面 AA_1B_1B.

模板 6 面面平行的证明

1. 解析:对于 A,同时平行于平面 α 的两条直线可能相交,可能异面,如当 $\alpha/\!/\beta$,且 $m\subset\beta$,$n\subset\beta$ 时,$m/\!/\alpha$,$n/\!/\alpha$,此时直线 m,n 可能是相交直线,因此 A 不正确;对于 B,垂直于同一平面的两个平面未必平行,它们可能是相交的两个平面,如墙角的 3 个平面两两互相垂直,因此 B 不正确;对于 C,平行于同一直线的两个平面未必平行,它们可能是相交的两个平面,因此 C 不正确;对于 D,由"垂直于同一平面的两条直线平行",可知 D 正确.

答案:D

2. 证明:因为 E,F,M,N 分别为其所在各棱的中点,如图,连接 CD_1,A_1B,



易知 $FN/\!/CD_1$.

同理,$ME/\!/A_1B$.

易证四边形 A_1BCD_1 为平行四边形,所以 $ME/\!/NF$.

连接 MD_1,

同理可得 $MD_1/\!/BF$.

又 BF,NF 为平面 BFN 中两相交直线,ME,MD_1 为平面 CEM 中两相交直线,

故平面 $CEM/\!/$平面 BFN.

3. 证明:连接 BM、BN、BG 并延长,分别交 AC、AD、CD 于 P、F、H.

$\because M$、N、G 分别为 $\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle BCD$ 的重心,

$\therefore \frac{BM}{MP}=\frac{BN}{NF}=\frac{BG}{GH}=2$.



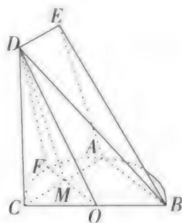
连接 PF、FH、PH,

有 $MN/\!/PF$,$NG/\!/FH$.

$\because MN\cap NG=N$,$PF\cap FH=F$,

$\therefore$ 平面 $MNG/\!/$平面 ACD.

4. 证明:如图所示,设 $OF\cap AC=M$,连接 DM.



因为 F 为 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点,所以 M 为 AC 的中点.

因为 $AC=2DE$,$DE/\!/AC$,

所以 $DE/\!/AM$,$DE=AM$.

所以四边形 $AMDE$ 为平行四边形. 所以 $DM/\!/AE$.

因为 $DM\not\subset$ 平面 ABE,$AE\subset$ 平面 ABE,所以 $DM/\!/$平面 ABE.

因为 O 为 BC 中点,所以 OM 为 $\triangle ABC$ 的中位线. 所以 $OM/\!/AB$.

因为 $OM\not\subset$ 平面 ABE,$AB\subset$ 平面 ABE,所以 $OM/\!/$平面 ABE.

因为 $OM\subset$ 平面 OFD,$DM\subset$ 平面 OFD,$OM\cap DM=M$.

所以平面 $OFD/\!/$平面 ABE.

模板 7 线线垂直的证明

1. 解析:由一条直线和三角形的两边都垂直,得这条直线和三角形所在的平面垂直,即这条直线与三角形的第三边垂直.

答案:B

2. 解析:A 中,由 $l\perp m$,$m\subset\alpha$ 可得 l 与 α 相交或平

行或 $l\subset\alpha$.

B 中,$l\perp\alpha,l/\!/m\Rightarrow m\perp\alpha$.

C 中,由 $l/\!/\alpha,m\subset\alpha$ 可得 l 与 m 平行或异面.

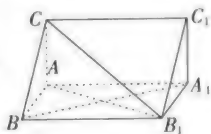
D 中,由 $l/\!/\alpha,m/\!/\alpha$ 可得 l 与 m 平行或异面或相交.

答案:B

3. 解析:直线 $a\not\subset\alpha$ 时,$a/\!/\alpha$.

答案:D

4. 证明:如图,连接 AB_1,



$\because ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱,

$\angle CAB=\frac{\pi}{2}$,

$\therefore AC\perp$平面 ABB_1A_1,故 $AC\perp BA_1$.

又 $\because AB=AA_1$,$\therefore$ 四边形 ABB_1A_1 是正方形,

$\therefore BA_1\perp AB_1$,又 $CA\cap AB_1=A$,

$\therefore BA_1\perp$平面 CAB_1,故 $CB_1\perp BA_1$.

模板 8　线面垂直的证明

1. 证明:因为 $PC\perp$平面 BDE,$BD\subset$平面 BDE,

所以 $PC\perp BD$.

又 $PA\perp$平面 $ABCD$,$BD\subset$平面 $ABCD$,

所以 $PA\perp BD$.

又 $PC\cap PA=P$,所以 $BD\perp$平面 PAC.

2. 证明:因为底面 $ABCD$ 为菱形,所以$BD\perp AC$,

又 $PA\perp$底面 $ABCD$,所以 $PC\perp BD$.

设 $AC\cap BD=F$,连接 EF.

因为 $AC=2\sqrt{2}$,$PA=2$,$PE=2EC$,

故 $PC=2\sqrt{3}$,$EC=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,$FC=\sqrt{2}$,

从而$\frac{PC}{FC}=\sqrt{6}$,$\frac{AC}{EC}=\sqrt{6}$.

因为$\frac{PC}{FC}=\frac{AC}{EC}$,$\angle FCE=\angle PCA$,

所以$\triangle FCE\backsim\triangle PCA$,$\angle FEC=\angle PAC=90°$,由此知 $PC\perp EF$.

PC 与平面 BED 内两条相交直线 BD,EF 都垂直,所以 $PC\perp$平面 BED.

3. 证明:因为平面 $ABFE\perp$平面 $ABCD$,且平面 $ABFE\cap$平面 $ABCD=AB$,四边形 $ABCD$ 是矩形,即 $CB\perp AB$,所以 $CB\perp$平面 $ABFE$.

又 $AF\subset$平面 $ABFE$,所以 $CB\perp AF$.

又 $AB/\!/EF$,$\angle EAB=90°$,$AB=2$,$AD=AE=EF=1$,

所以 $AF=\sqrt{2}$,$BF=\sqrt{2}$,即 $AB^2=AF^2+BF^2$.

所以 $AF\perp FB$.

而 $CB\cap FB=B$,所以 $AF\perp$平面 BCF.

4. 证明:因为 $PD\perp$底面 $ABCD$ 且 $DC\subset$底面 $ABCD$,

所以 $PD\perp DC$.

因为 $PD=DC$,可知$\triangle PDC$ 是等腰直角三角形,而 DE 是斜边 PC 的中线,所以 $DE\perp PC$.　①

同理由 $PD\perp$底面 $ABCD$,$BC\subset$底面 $ABCD$,得 $PD\perp BC$.

因为底面 $ABCD$ 是正方形,所以 $DC\perp BC$.

又 $PD\cap DC=D$,所以 $BC\perp$平面 PDC. 而 $DE\subset$平面 PDC,所以 $BC\perp DE$.　②

由①和②且 $BC\cap PC=C$ 推得 $DE\perp$平面 PBC. 而 $PB\subset$平面 PBC,所以 $DE\perp PB$.

又 $EF\perp PB$ 且 $DE\cap EF=E$,所以 $PB\perp$平面 EFD.

模板 9　面面垂直的证明

1. 证明:由 AB 是圆的直径,得 $AC\perp BC$,由 $PA\perp$平面 ABC,$BC\subset$平面 ABC,得 $PA\perp BC$.

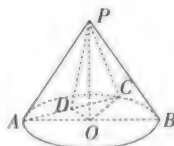
又 $PA\cap AC=A$,$PA\subset$平面 PAC,$AC\subset$平面 PAC,

所以 $BC\perp$平面 PAC.

因为 $BC\subset$平面 PBC,

所以平面 $PBC\perp$平面 PAC.

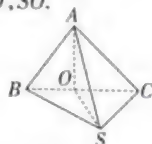
2. 证明:如图,连接 OC,因为 $OA=OC$,D 是 AC 的中点,所以 $AC\perp OD$.



又 $PO\perp$底面$\odot O$,$AC\subset$底面$\odot O$,所以 $AC\perp PO$. 因为OD,PO 是平面 POD 内的两条相交直线,所以 $AC\perp$平面 POD,

而 $AC\subset$平面 PAC,所以平面 $POD\perp$平面 PAC.

3. 证明:取 BC 的中点 O,连接 AO,SO.



因为 $AS=BS=CS$,

所以 $AB=AC=AS$.

从而 $AO\perp BC$.

设 $AS=a$,由$\angle BSC=90°$,则 $SO=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

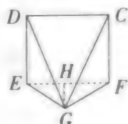
又 $AO=\sqrt{AB^2-BO^2}=\sqrt{a^2-\frac{1}{2}a^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,

所以 $AS^2=AO^2+SO^2$,故 $AO\perp SO$.

因为 $BC\cap SO=O$,从而 $AO\perp$平面 BSC.

又 $AO\subset$ 平面 ABC,所以平面 $ABC\perp$ 平面 BSC.

4. 解:(1)证明:因为 $DE\perp EF,CF\perp EF$,所以四边形 $CDEF$ 为矩形,



由 $GD=5,DE=4$,

得 $EG=\sqrt{GD^2-DE^2}=3$,

由 $GC=4\sqrt{2}$,$CF=4$,

得 $FG=\sqrt{GC^2-CF^2}=4$,所以 $EF=5$,

在△EFG 中,有 $EF^2=GE^2+FG^2$,所以 $EG\perp FG$.

又因为 $CF\perp EF,CF\perp FG$,得 $CF\perp$ 平面 EFG,所以 $CF\perp EG$,所以 $EG\perp$ 平面 CFG,即平面 $DEG\perp$ 平面 CFG.

(2)在平面 EGF 中,过点 G 作$GH\perp EF$ 于点 H,则 $GH=\frac{EG\cdot FG}{EF}=\frac{12}{5}$,

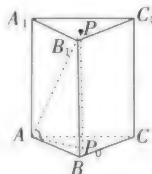
因为平面 $CDEF\perp$ 平面 EFG,得 $GH\perp$ 平面 $CDEF$,

$V_{CDEFG}=\frac{1}{3}S_{矩形CDEF}\cdot GH=16$.

模板 10 求直线与平面所成的角

1. 解析:如图,设 P_0 为底面 ABC 的中心,连接PP_0,由题意知$|PP_0|$为直三棱柱的高,$\angle PAP_0$ 为 PA 与平面 ABC 所成的角,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2\times\sin60^\circ$

$=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.



∵ 三棱柱的体积 $V=\frac{9}{4}$,

$\therefore\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot|PP_0|=\frac{9}{4}$,

$\therefore|PP_0|=\sqrt{3}$. 又 P_0 为底面 ABC 的中心,则$|AP_0|$等于正△ABC 高的$\frac{2}{3}$,

又易知△ABC 的高为$\frac{3}{2}$,

$\therefore|AP_0|=\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=1$.

在 Rt△PAP_0 中,$\tan\angle PAP_0=\frac{|PP_0|}{|AP_0|}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$,$\therefore\angle PAP_0=\frac{\pi}{3}$,故选 B.

答案:B

2. 解析:$\because BB_1/\!/DD_1$,$\therefore DD_1$ 与平面 ACD_1 所成的角即为 BB_1 与平面 ACD_1 所成的角,设其大小为θ,设正方体的棱长为 1,则点 D 到面 ACD_1 的距离为$\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\therefore\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\therefore\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$,故选 D.

答案:D

3. 解:(1)证明:由正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的性质知 $AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.

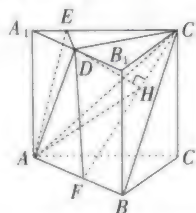
又 $DE\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$,$\therefore DE\perp AA_1$.

而 $DE\perp AE,AA_1\cap AE=A$,$\therefore DE\perp$ 平面 ACC_1A_1.

又 $DE\subset$ 平面 ADE,∴ 平面 $ADE\perp$ 平面 ACC_1A_1.

(2)设 F 是 AB 的中点,连接 DF、DC_1、C_1F.

由正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的性质及 D 是 A_1B_1 的中点知,$A_1B_1\perp C_1D,A_1B_1\perp DF$.



又 $C_1D\cap DF=D$,$\therefore A_1B_1\perp$ 平面 C_1DF.

而 $AB/\!/A_1B_1$,$\therefore AB\perp$ 平面 C_1DF.

又 $AB\subset$ 平面 ABC_1,

故平面 $ABC_1\perp$ 平面 C_1DF.

过点 D 作 DH 垂直 C_1F 于点 H,则 $DH\perp$ 平面 ABC_1.

连接 AH,则$\angle HAD$ 是直线 AD 和平面 ABC_1 所成的角.

由已知 $AB=\sqrt{2}AA_1$,不妨设 $AA_1=\sqrt{2}$,

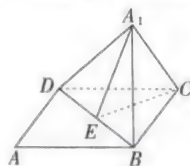
即 $A_1B_1=AB=2,DF=\sqrt{2}$,$DC_1=\sqrt{3}$,$C_1F=\sqrt{5}$,

$AD=\sqrt{AA_1^2+A_1D^2}=\sqrt{3}$,$DH=\frac{DF\cdot DC_1}{C_1F}=\frac{\sqrt{30}}{5}$.

$\therefore\sin\angle HAD=\frac{DH}{AD}=\frac{\sqrt{10}}{5}$,即直线 AD 和平面 ABC_1 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{10}}{5}$.

模板 11 求二面角

1. 解析:如图,取 BD的中点 E,连接 A_1E、CE.



$\therefore BD\perp CE, BD\perp A_1E$.

$\therefore\angle A_1EC$ 为二面角 A_1-BD-C 的平面角.

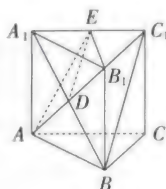
在菱形 $ABCD$ 中, $\angle A=60°, AB=a$,

$\therefore A_1E=CE=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, 又 $A_1C=\frac{\sqrt{3}}{2}a$,

$\therefore\triangle A_1EC$ 是等边三角形, $\therefore\angle A_1EC=60°$.

答案:60°

2. 解:如图,连接 A_1B 交于 AB_1 于点 D,取 A_1C_1 的中点 E,连接 DE,则 $DE\parallel BC_1$,过 AB_1 与 DE 作平面 AB_1E,则平面 $AB_1E\parallel BC_1$.



$\because$ 平面 $ABC\parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$,

$\therefore$ 平面 AB_1E 与底面 ABC 所成二面角等于二面角 $A-B_1E-A_1$.

$\because$ 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是底面为正三角形的三棱柱,

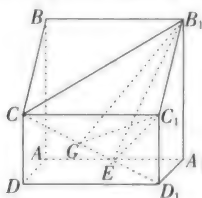
$\therefore B_1E\perp$ 平面 AA_1C_1C,且平面 $AA_1C_1C\cap$ 平面 $A_1B_1E=A_1E$,平面 $AA_1C_1C\cap$ 平面 $AB_1E=AE$,

$\therefore\angle AEA_1=\beta$. 又 $A_1A=3\sqrt{3}$ cm, $A_1E=3$cm,

$\therefore\tan\beta=\frac{A_1A}{A_1E}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$.

$\because 0°<\beta\leqslant 180°$, $\therefore\beta=60°$

3. 解:(1)证明:因为侧棱 $CC_1\perp$ 底面 $A_1B_1C_1D_1$, $B_1C_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$,所以 $CC_1\perp B_1C_1$. 经计算可得 $B_1E=\sqrt{5}$, $B_1C_1=\sqrt{2}$, $EC_1=\sqrt{3}$,从而 $B_1E^2=B_1C_1^2+EC_1^2$,所以在 $\triangle B_1EC_1$ 中, $B_1C_1\perp C_1E$,又 CC_1, $C_1E\subset$ 平面 CC_1E, $CC_1\cap C_1E=C_1$,所以 $B_1C_1\perp$ 平面 CC_1E,又 $CE\subset$ 平面 CC_1E,故 $B_1C_1\perp CE$.



(2)过 B_1 作 $B_1G\perp CE$ 于点 G,连接 C_1G.

由(1), $B_1C_1\perp CE$,故 $CE\perp$ 平面 B_1C_1G,

得 $CE\perp C_1G$,所以 $\angle B_1GC_1$ 为二面角 B_1-CE-C_1 的平面角. 在 $\triangle CC_1E$ 中,由 $CE=C_1E=\sqrt{3}$, $CC_1=2$,可得 $C_1G=\frac{2\sqrt{6}}{3}$. 在 $Rt\triangle B_1C_1G$ 中, $B_1G=\frac{\sqrt{42}}{3}$,

所以 $\sin\angle B_1GC_1=\frac{\sqrt{21}}{7}$,即二面角 B_1-CE-C_1 的正弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

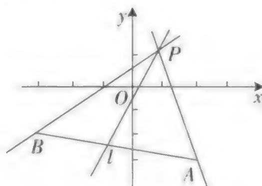
第三章 直线与方程

模板 1 求斜率的取值范围

1. 解析:直线 l 的斜率为 $k=\frac{m^2-1}{1-2}=1-m^2\leqslant 1$,又直线 l 的倾斜角为 α,则有 $\tan\alpha\leqslant 1$,即 $\tan\alpha<0$ 或 $0\leqslant\tan\alpha\leqslant 1$,所以 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ 或 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}$,故选B.

答案:B

2. 解:如图所示,由斜率公式可知 $k_{PA}=\frac{1-(-3)}{1-2}=-4$, $k_{PB}=\frac{1-(-2)}{1-(-3)}=\frac{3}{4}$.



则直线 l 的斜率 k 的取值范围为 $k\leqslant -4$ 或 $k\geqslant\frac{3}{4}$.

3. 解:(1) $\because y=-2x+8$, $\therefore\frac{y}{x}=\frac{8}{x}-2$.

设 $f(x)=\frac{8}{x}-2$,则 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上单调递减.

当 $x=2$ 时, $f(x)_{max}=2$;当 $x=3$ 时, $f(x)_{min}=\frac{2}{3}$.

故 $\frac{y}{x}$ 的最大值、最小值分别为 $2, \frac{2}{3}$.

(2)由于 $\frac{y+1}{x+1}=\frac{y-(-1)}{x-(-1)}$,其几何意义是过 $M(x, y)$, $N(-1,-1)$ 两点的直线的斜率.

设函数 $y=-2x+8$ 在 $x\in[2,3]$ 的图象的左、右端点分别为 $A(2,4)$, $B(3,2)$.

$\because k_{NA}=\frac{5}{3}$, $k_{NB}=\frac{3}{4}$, $\therefore\frac{3}{4}\leqslant\frac{y+1}{x+1}\leqslant\frac{5}{3}$.

$\therefore\frac{y+1}{x+1}$ 的取值范围为 $\left[\frac{3}{4},\frac{5}{3}\right]$.

模板 2 三点共线问题

1. 解析:由题意得, $\frac{5-7}{3-a}=2$, $\frac{5-b}{3-(-1)}=2$,解得 $a=$

$4,b=-3$.

答案:4 -3

2. 解析:$k_{AC}=\frac{5-3}{6-4}=1,k_{AB}=\frac{a-3}{5-4}=a-3$.

由于 A,B,C 三点共线,所以 $a-3=1$,即 $a=4$.

答案:4

3. 解析:由条件,得 $k_{AB}=k_{AC}$,即 $\frac{b-0}{0-a}=\frac{-1-0}{1-a}$.

所以 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=1$. 所以 $a-b=(a-b)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=2-\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=2+\left[\left(-\frac{b}{a}\right)+\left(-\frac{a}{b}\right)\right]\geqslant 4$,

当且仅当 $a^2=b^2$ 时取等号,所以 $a-b$ 的最小值为4.

答案:4

4. 证明:由已知可得 $k_{PQ}=\frac{2-1}{3-2}=1,k_{QR}=\frac{3-2}{4-3}=1$,

即 $k_{PQ}=k_{QR}$,所以三点共线.

模板 3 求直线的方程

1. 解析:由点斜式方程知直线 l 的方程为 $y-5=-\frac{3}{4}(x+2)$,即 $3x+4y-14=0$.

答案:A

2. 解析:所求直线的斜率 $k=\frac{3-1}{0-2}=-1$,又过点 $(0,3)$,

所以直线方程为 $y-3=-x$,即 $x+y-3=0$.

答案:B

3. 解:由斜截式方程知直线 l_1 的斜率 $k_1=-2$,

又 $\because l/\!/l_1$,$\therefore l$ 的斜率 $k=k_1=-2$.

由题意知 l_2 在 y 轴上的截距为 -2,

$\therefore l$ 在 y 轴上的截距 $b=-2$,

由斜截式可得直线 l 的方程为 $y=-2x-2$.

4. 解:若直线过原点,则 $k=-\frac{4}{3}$,

$\therefore$ 直线方程为 $y=-\frac{4}{3}x$,即 $4x+3y=0$.

若直线不过原点,设直线方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$,即 $x+y=a$. 又 $\because$ 直线过点 $M(3,-4)$,$\therefore a=3+(-4)=-1$,

$\therefore$ 直线方程为 $x+y+1=0$.

综上,直线方程为 $4x+3y=0$ 或 $x+y+1=0$.

5. 解:由于已知每条直线上的两点,故可直接用两点式求解,也可先由两点坐标求出斜率,用点斜式得到.

直线 AB 的方程为 $\frac{y-0}{-3-0}=\frac{x-(-5)}{3-(-5)}$,

整理,得 $3x+8y+15=0$.

直线 AC 的斜率 $k_{AC}=\frac{2-0}{0-(-5)}=\frac{2}{5}$,

$\therefore$ 直线 AC 的方程为 $y-0=\frac{2}{5}(x+5)$,即 $2x-5y+10=0$.

直线 BC 的斜率 $k_{BC}=\frac{2-(-3)}{0-3}=-\frac{5}{3}$,

$\therefore$ 直线 BC 的方程为 $y-2=-\frac{5}{3}(x-0)$,即 $5x+3y-6=0$.

模板 4 求两直线平行或垂直中参数的值

1. 解析:由 $3a\left(a-\frac{2}{3}\right)+(-1)\times 1=0$,得 $a=-\frac{1}{3}$ 或 $a=1$.

答案:D

2. 解析:因为两直线平行,所以 $k=3$ 或 $\frac{k-3}{k-4}=k-3$,解得 $k=3$ 或 $k=5$,故选 C.

答案:C

3. 解析:若 $1-k=0$,即 $k=1$,直线 $l_1:x=3,l_2:y=\frac{2}{5}$,显然两直线垂直. 若 $k\neq 1$,直线 l_1,l_2 的斜率分别为 $k_1=\frac{k}{k-1},k_2=\frac{1-k}{2k+3}$. 由 $k_1k_2=-1$ 得,$k=-3$.

综上 $k=1$ 或 $k=-3$,故选 C.

答案:C

4. 解析:由题意知 l 的斜率为 -1,则 l_1 的斜率为 1,

$\therefore k_{AB}=\frac{2-(-1)}{3-a}=1$,解得 $a=0$.

由 $l_1/\!/l_2$,得 $-\frac{2}{b}=1,b=-2$,所以 $a+b=-2$,故选 B.

答案:B

模板 5 求距离中参数的值

1. 解析:$a=\frac{|4\times 4-3a-1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\leqslant 3$,即 $|5-a|\leqslant 5$.

得 $0\leqslant a\leqslant 10$.

答案:A

2. 解析:$\because P(a,2),Q(-2,-3),M(1,1)$ 且 $|PQ|=|PM|$,

$\therefore \sqrt{(-2-a)^2+(-3-2)^2}=\sqrt{(1-a)^2+(1-2)^2}$.

解得 $a=-\frac{9}{2}$.

答案:$-\frac{9}{2}$

3. 解析:由题意易得 $a\neq0$.根据两点到直线的距离相等,得 $\frac{6}{\sqrt{a^2+a^4}}=\frac{|4a-a^2+6|}{\sqrt{a^2+a^4}}$,

即 $4a-a^2+6=\pm6$,

解得 $a=4$ 或 -2 或 6.

答案:-2 或 4 或 6

4. 解:$\because l_1//l_2$,$\therefore\frac{m}{2}=\frac{8}{m}\neq\frac{n}{-1}$,$\therefore\begin{cases}m=4,\\n\neq-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=-4,\\n\neq2.\end{cases}$

(1)当 $m=4$ 时,直线 l_1 的方程为 $4x+8y+n=0$,把 l_2 的方程写成 $4x+8y-2=0$. $\therefore\frac{|n+2|}{\sqrt{16+64}}=\sqrt{5}$,

解得 $n=-22$ 或 $n=18$. $\therefore$ 直线 l_1 的方程为 $2x+4y-11=0$ 或 $2x+4y+9=0$.

(2)当 $m=-4$ 时,直线 l_1 的方程为 $4x-8y-n=0$,l_2 的方程写成 $4x-8y-2=0$,$\therefore\frac{|-n+2|}{\sqrt{16+64}}=\sqrt{5}$,解得 $n=-18$ 或 $n=22$.

$\therefore$ 直线 l_1 的方程为 $2x-4y+9=0$ 或 $2x-4y-11=0$.

综上所述,直线 l_1 的方程为 $2x\pm4y-11=0$ 或 $2x\pm4y+9=0$.

模板 6　对称问题

1. 解析:在入射光线上取点 $\left(0,-\frac{c}{2}\right)$,它关于直线 l 的对称点为 $\left(\frac{c}{2},0\right)$,可排除 A,C;在入射光线上取点 $(-c,0)$,它关于直线 l 的对称点为 $(0,c)$,可排除 D. 故选 B.

答案:B

2. 解析:由 $\begin{cases}x-2y+1=0,\\x=1\end{cases}$ 得交点 $A(1,1)$,且可知所求直线斜率为 $-\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 直线为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$,即 $x+2y-3=0$,故选 D.

答案:D

3. 解析:点 $A(-3,5)$ 关于 x 轴的对称点是 $A'(-3,-5)$,于是 $|A'B|$ 即为所求距离,由两点间距离公式易求得 $|A'B|=5\sqrt{10}$.

答案:$5\sqrt{10}$

4. 解:依题意,得直线 l 是直线 AB 的垂直平分线.

因为 $k_{AB}=-\frac{5}{6}$,所以直线 l 的斜率 $k=-\frac{1}{k_{AB}}=\frac{6}{5}$.

因为 AB 的中点为 $(1,1)$,所以直线 l 的方程是 $y-1=\frac{6}{5}(x-1)$,即 $6x-5y-1=0$.

5. 解:设 A 关于直线 $y=x$ 的对称点为 A',D 关于 y 轴的对称点为 D',则易得 $A'(-2,-4)$,$D'(1,6)$.由入射角等于反射角可得 $A'D'$ 所在直线经过点 B,C. 故 BC 所在的直线方程为 $\frac{y-6}{-4-6}=\frac{x-1}{-2-1}$,

即 $10x-3y+8=0$.

第四章　圆与方程

模板 1　求圆的方程

1. 解析:AB 的中点坐标为 $(0,0)$,

$|AB|=\sqrt{(1+1)^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{2}$,$\therefore r=\sqrt{2}$,

$\therefore$ 圆的方程为 $x^2+y^2=2$.

答案:A

2. 解析:设圆心坐标为 $(0,b)$,则由题意知

$\sqrt{(0-1)^2+(b-2)^2}=1$,解得 $b=2$,故圆的方程为 $x^2+(y-2)^2=1$.

答案:A

3. 解析:设点 (x,y) 与圆 C_1 的圆心 $(-1,1)$ 关于直线 $x-y-1=0$ 对称,则 $\begin{cases}\frac{y-1}{x+1}=-1,\\\frac{x-1}{2}-\frac{y+1}{2}-1=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=2,\\y=-2,\end{cases}$ 从而可知圆 C_2 的圆心坐标为 $(2,-2)$,

又知其半径为 1,故所求圆 C_2 的方程为 $(x-2)^2+(y+2)^2=1$.

答案:B

4. 解析:方法一:设圆心坐标为 $(a,-a)$,

则 $\frac{|a-(-a)|}{\sqrt{2}}=\frac{|a-(-a)-4|}{\sqrt{2}}=r$, 即 $|a|=|a-2|$,

解得 $a=1$,故圆心坐标为 $(1,-1)$,半径 $r=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,故圆的方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$.

方法二:题目给出的圆的两条切线是平行线,故

圆的直径就是这两条平行线之间的距离 $d=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，$r=\sqrt{2}$；圆心是直线 $x+y=0$ 与这两条平行线交点的中点，直线 $x+y=0$ 与直线 $x-y=0$ 的交点坐标是$(0,0)$，与直线 $x-y-4=0$ 的交点坐标是$(2,-2)$，故所求圆的圆心坐标是$(1,-1)$，所求的圆的方程是$(x-1)^2+(y+1)^2=2$.

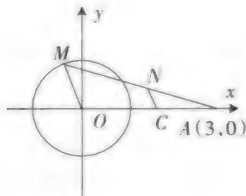
答案：B

模板 2　求动点的轨迹方程

1. 解析：设圆上任一点为 $Q(x_0,y_0)$，PQ 的中点为 $M(x,y)$，则 $\begin{cases}x=\frac{4+x_0}{2},\\ y=\frac{-2+y_0}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=2x-4,\\ y_0=2y+2.\end{cases}$ 因为点 Q 在圆 $x^2+y^2=4$ 上，所以 $x_0^2+y_0^2=4$，即$(2x-4)^2+(2y+2)^2=4$，即$(x-2)^2+(y+1)^2=1$.

答案：A

2. 解析：如图，设 M 为圆上任意一点，点 A 为$(3,0)$，连接 AM. 设 AM 的中点为 N，又 OA 中点为 $C\left(\frac{3}{2},0\right)$，则 $CN=\frac{1}{2}$，于是 N 到 C 的距离为定长为$\frac{1}{2}$，其轨迹方程为$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$，即$(2x-3)^2+4y^2=1$.



答案：C

3. 解析：$x^2+y^2=1$ 为圆心在原点的单位圆，即$|OA|=|OB|=1$，又$\angle APB=60°$，则$\angle APO=30°$，$|OP|=2$. 不管点 P 怎么移动，$|OP|=2$ 是不变的，故动点的轨迹是以 O 为圆心，2 为半径的圆，其方程为 $x^2+y^2=4$.

答案：$x^2+y^2=4$

4. 解：方法一：设所求轨迹上任意一点 $M(x,y)$，圆的方程可化为$(x-3)^2+(y-3)^2=4$，

圆心为 $C(3,3)$.

$\because CM\perp AM$，$\therefore k_{CM}\cdot k_{AM}=-1$，

即 $\frac{y-3}{x-3}\cdot\frac{y+5}{x+3}=-1$，

即 $x^2+(y+1)^2=25$.

$\therefore$ 所求轨迹方程为 $x^2+(y+1)^2=25$（已知圆内的部分）.

方法二：设弦 PQ 的中点坐标为 $M(x,y)$、$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$，如图，因为 P、Q 两点都在已知圆上，

所以 $\begin{cases}x_1^2+y_1^2-6x_1-6y_1+14=0, & ①\\ x_2^2+y_2^2-6x_2-6y_2+14=0. & ②\end{cases}$

由②-①得

$(x_2^2-x_1^2)+(y_2^2-y_1^2)-6(x_2-x_1)-6(y_2-y_1)=0$，

即$(x_1+x_2-6)(x_2-x_1)+(y_1+y_2-6)(y_2-y_1)=0$.

当 $x_1=x_2$ 时，直线方程为 $x=-3$，显然不符合题意.

当 $x_1\neq x_2$ 时，$\frac{y_1+y_2-6}{x_1+x_2-6}\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1$.

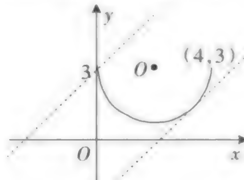
而 $x_1+x_2=2x$，$y_1+y_2=2y$，$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=k_{PQ}=\frac{y+5}{x+3}$，

所以 $\frac{y-3}{x-3}\cdot\frac{y+5}{x+3}=-1$，整理得 $x^2+(y+1)^2=25$.

$\therefore$ 所求轨迹方程为 $x^2+(y+1)^2=25$（已知圆内的部分）.

模板 3　求直线与圆位置关系中的参数

1. 解析：由 $y=3-\sqrt{4x-x^2}$，得 $3-y=\sqrt{4x-x^2}$，即$(x-2)^2+(y-3)^2=4$ $(y\leqslant 3)$，$\therefore$ 曲线 $y=3-\sqrt{4x-x^2}$ 为半圆（如图）. 由圆心$(2,3)$到直线 $y=x+b$ 的距离等于 2，得 $b=1-2\sqrt{2}$. 由直线 $y=x+b$ 过点$(0,3)$可得 $b=3$. 由图可知 $1-2\sqrt{2}\leqslant b\leqslant 3$，故选 C.



答案：C

2. 解析：圆心坐标为$(0,0)$，半径为$\sqrt{2}$，圆心到直线的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{2}}$. 因为 $d=r$，所以 $\frac{|m|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，所以 $m=\pm 2$，故选 D.

答案:D

3. 解析:首先判断方程应表示圆,再求出圆心到直线的距离,使之小于半径. 故选 B.

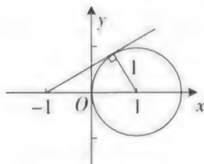
答案:B

模板 4　求圆与圆位置关系中的参数

1. 解析:圆 $x^2+y^2-1=0$ 关于直线 $x-y=1$ 对称的圆的方程为 $x^2+y^2-2x+2y+1=0$,故 $a=2$.

答案:C

2. 解析:解法一:曲线 C_1 是圆,其标准方程为$(x-1)^2+y^2=1$. 圆心为(1,0),半径为 1. 曲线 C_2 是两条直线. 一条为 x 轴:$y=0$. 另一条为过点(-1,0)、斜率为 m 的直线. 当 $m=0$ 时不合题意,排除A、C. 当$|m|$较大时,如$m=2$,不合题意,排除D. 故选 B.



解法二:曲线 C_1 是以(1,0)为圆心,1 为半径的圆,当 $m\neq0$ 时,C_2 为两直线 $y=0$,$y=m(x+1)$,其中 $y=0$ 与圆一定有两个交点,直线 $y=m(x+1)$与圆相切时,$m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$,若有两个交点则 $m\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. 故选 B.

答案:B

3. 解析:由圆 $x^2+y^2-ax+2y+1=0$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 关于直线 $y=x-1$ 对称可知两圆半径相等且两圆圆心连线的中点在直线 $y=x-1$ 上,故可得 $a=2$,即点 $C(-2,2)$,所以过点 $C(-2,2)$且与 y 轴相切的圆 P 的圆心的轨迹方程为$(x+2)^2+(y-2)^2=x^2$,整理得 $y^2+4x-4y+8=0$.

答案:C

4. [-2,2]

模板 5　弦长或公共弦长问题

1. 解析:由题意得直线方程为 $y=\sqrt{3}x$,圆心为(0,2),$r=2$,所以 $d=\frac{2}{\sqrt{3+1}}=1$,弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{3}$.

答案:D

2. 解析:直线 $y=x$ 过圆 $x^2+y^2=1$ 的圆心 $C(0,0)$,故 AB 为圆的直径,所以$|AB|=2$,选 D.

答案:D

3. 解析:圆心(0,0)到直线的距离为$\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=1$,又圆的半径为 2,所以弦长$|AB|=2\sqrt{2^2-1^2}=2\sqrt{3}$.

答案:B

4. 解析:圆心(0,0)到直线的距离为$\frac{|-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$,又圆的半径为 2,所以弦长为 $2\sqrt{2^2-1^2}=2\sqrt{3}$.

答案:B

5. 解析:由题意,圆心(0,2),$r=2$. 圆心到直线 $y=x$ 的距离为$\frac{|0-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$,所以 $l=2\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$.

答案:$2\sqrt{2}$

6. 解析:圆心到直线 $y=2x+3$ 的距离 $d=\frac{|2\times3-4+3|}{\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$,由于圆的半径 $r=5$,所以所求弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{25-5}=4\sqrt{5}$.

答案:$4\sqrt{5}$

模板 6　与圆有关的最值问题

1. 解析:由直线 $\sqrt{2}ax+by=1$(其中 a,b 是实数)与圆 $x^2+y^2=1$ 相交于 A,B 两点,又$\triangle AOB$ 是直角三角形,可知$\triangle AOB$ 是等腰直角三角形. 坐标原点 O 到直线 $\sqrt{2}ax+by=1$ 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{2a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,即 $2a^2+b^2=2$,所以 $a^2=\frac{2-b^2}{2}$ $(-\sqrt{2}\leqslant b\leqslant\sqrt{2})$,则$|PM|=\sqrt{a^2+(b-1)^2}=\sqrt{\frac{b^2}{2}-2b+2}=\frac{\sqrt{2}|b-2|}{2}$,所以当 $b=-\sqrt{2}$ 时,$|PM|_{max}=\frac{\sqrt{2}\times|-\sqrt{2}-2|}{2}=\sqrt{2}+1$.

答案:A

2. C

3. 解析:两圆圆心距 $d=\sqrt{(3-0)^2+(-4-0)^2}=5$,故

最短距离为 $5-r_1-r_2=5-1-2=2$.

答案:2

4. 解:$(x-1)^2+(y+2)^2=2^2$ 表示以$(1,-2)$为圆心,半径等于 2 的圆.

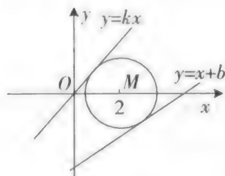
由 $S=2x+y$,得 $y=-2x+S$.

由图可知,当直线和圆相切时,S 取得最大值与最小值. 当直线与圆相切时,有 $\frac{|2\times1-2-S|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2$,

得 $S=\pm2\sqrt{5}$.

$\therefore S_{max}=2\sqrt{5}$,$S_{min}=-2\sqrt{5}$.

5. 解:将实数 x,y 看作点 $P(x,y)$的坐标,满足 $x^2+y^2-4x+1=0$ 的点 $P(x,y)$组成的图形是以 $M(2,0)$为圆心,半径为$\sqrt{3}$的圆,如图.



(1)设 $\frac{y}{x}=\frac{y-0}{x-0}=k$,即$\frac{y}{x}$是圆上的点 P 与原点 O 连线的斜率.

由图知,直线 $y=kx$ 和圆 M 在第一象限相切时,k 取最大值,此时有 $OP\perp PM$,$|PM|=\sqrt{3}$,$|OM|=2$,$\therefore\angle POM=60°$.

此时 $k=\tan60°=\sqrt{3}$,$\therefore\frac{y}{x}$的最大值是$\sqrt{3}$.

(2)设 $y-x=b$,则 $y=x+b$,b 是直线 $y=x+b$ 在 y 轴上的截距.

由图知,当直线 $y=x+b$ 和圆 M 在第四象限相切时,$b(b<0)$取最小值,此时有 $\frac{|2+b|}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$,解得 $b=-\sqrt{6}-2$,

$\therefore y-x$ 的最小值是$-\sqrt{6}-2$.

必修 3

第一章 算法初步

模板 1 根据程序框图写出运算结果

1. 解析:开始:$S=4$,$i=1$,

$1<9$,是,$S=\frac{2}{2-4}=-1$,$i=2$;

$2<9$,是,$S=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}$,$i=3$;

$3<9$,是,$S=\frac{2}{2-\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$,$i=4$;

$4<9$,是,$S=\frac{2}{2-\frac{3}{2}}=4$,$i=5$;

$5<9$,是,$S=\frac{2}{2-4}=-1$,$i=6$,所以 S 的周期为 4,故输出 $S=4$.

答案:D

2. 解析:$S=(3^1-3^0)+(3^2-3^1)+(3^3-3^2)=3^3-1=26$.

答案:C

3. 解析:第一次循环,$s=\frac{1}{2}$,$n=4$;第二次循环,$s=\frac{3}{4}$,$n=6$;第三次循环,$s=\frac{11}{12}$,$n=8$;跳出循环,输出 $s=\frac{11}{12}$,故选 D.

答案:D

4. 解析:结合题中程序框图,由当 $x>A$ 时 $A=x$ 可知 A 应为 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 中最大的数. 由当 $x<B$ 时 $B=x$ 可知 B 应为 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 中最小的数.故选 C.

答案:C

5. 解析:逐次计算的结果是 $F_1=3$,$F_0=2$,$n=2$;$F_1=5$,$F_0=3$,$n=3$,此时输出,故输出结果为 3.

答案:3

模板 2 根据运算结果选择判断框内的内容

1. 解析:第一步,$s=s\cdot\log_k(k+1)=\log_2 3$,$k=2+1=3$.

第二步,$s=s\cdot\log_k(k+1)=\log_2 3\cdot\log_3 4=\log_2 4$,$k=3+1=4$;

第三步,$s=s\cdot\log_k(k+1)=\log_2 4\cdot\log_4 5=\log_2 5$,$k=5$;

…

第 n 步,$s=\log_2(n+1)\cdot\log_{(n+1)}(n+2)=\log_2(n+2)$,$k=n+2$,

若输出 $s=3$,则 $\log_2(n+2)=3$,$n+2=8$,$n=6$,$k=n+2=8$,说明 $k=8$ 时结束,故应填 $k\leqslant7$. 故选 B.

答案:B

2. 解析:第一次执行循环体时 $S=1$,$i=3$;第二次执行循环体时 $S=-2$,$i=5$;第三次执行循环体时 $S=$

$-7,i=7$,所以判断框内可填写 $i<6$?. 故选 D.

答案:D

3. 解析:要统计身高在 160~180cm 的学生人数即求 $A_4+A_5+A_6+A_7$ 的和,第一次循环:$S=A_4,i=5$;第二次循环:$S=A_4+A_5,i=6$;第三次循环:$S=A_4+A_5+A_6,i=7$;第四次循环:$S=A_4+A_5+A_6+A_7,i=8$. 所以判断框内可填 $i<8$.

答案:B

模板 3 根据基本算法语句写出结果

1. 解析:对一个变量重复赋值,变量保存的是最后一次的值,因此在执行 PRINT 语句时,A,B 的值都是 5,但输出时只输出数值,值与值之间用空格隔开,不会输出逗号.

答案:C

2. 解析:当 $i=45$ 时,$45\times45=2\ 025>2\ 000$,当 $i=44$ 时,$44\times44=1\ 936<2\ 000$,所以输出的结果 $i=i-1=45-1=44$.

答案:C

3. 解析:第 1 次循环:$a=1,j=2$;第 2 次循环:$a=3,j=3$;第 3 次循环:$a=1,j=4$;第 4 次循环:$a=0,j=5$;第 5 次循环:$a=0,j=6>5$;退出循环.

答案:D

4. 解析:$\because a=1,b=2,a=a+b,\therefore a=1+2=3$,

$\therefore$ 该程序输出的结果是 3.

答案:3

5. 解析:(1)当 $x=4$ 时满足 $x>3$ 的条件,输出 $y=4\times4-1=15$.

(2)该程序表示的函数解析式是 $y=\begin{cases}2x,x<3,\\2,x=3,\\x^2-1,x>3.\end{cases}$

答案:15 $y=\begin{cases}2x,x<3\\2,x=3\\x^2-1,x>3\end{cases}$

6. 解析:$i=1$ 时,$s=2$;当 $i=2$ 时,$s=2+2\times2=6$;$i=3$ 时,$s=6+2\times3=12$;$i=4>3$,退出循环.

答案:12

第二章 统 计

模板 1 判断抽样方法

1. 解析:对于①,总体个数较少,采用简单随机抽样;对于②,个体数相对较多,采用系统抽样;对于③,个体分几部分差异明显,采用分层抽样.

答案:A

2. 解析:抽取的样本与容器无关,且总体个数比较多,故可用系统抽样来抽取样本.

答案:C

3. 解析:由系统抽样的定义,知道该抽样方法是系统抽样.

答案:C

4. 解析:由简单随机抽样和系统抽样的概念知 D 项符合题意.

答案:D

模板 2 求系统抽样中抽取的编号

1. 解析:$\because$ 总体数为 600,样本的容量是 50,

$\therefore 600\div50=12$.

因此,每隔 12 个号能抽到一名,由于随机抽得第一个号码为 003,按照系统抽样的操作步骤在第Ⅰ营区应抽到 25 人,第Ⅱ营区应抽到 17 人,第Ⅲ营区应抽到 8 人. 故选 A.

答案:A

2. B

3. 解析:这是一逆向思维的过程,由于系统抽样出来的个体的编号是等差数列,且公差为总体个数除以样本个数. 因此本题中公差为 $\frac{8\ 000}{50}=160$,从而由 7 894 除以 160 余 54 可知第一个人样的编号为 0054.

答案:0054

4. 解析:由题意得,分段间隔为 $\frac{500}{50}=10$. 且第一个编号为 006 号,故在区间[465,500]的编号为 466,476,486,496.

答案:466,476,486,496

模板 3 求分层抽样中各层样本个数

1. 解析:设在高二年级的学生中应抽取的人数为 x,则 $\frac{x}{40}=\frac{6}{30}$,解得 $x=8$,故选 B.

答案:B

2. 解析:设抽取男运动员的人数为 n,则

$\frac{n}{21}=\frac{48}{48+36}$,解得 $n=12$.

答案:12

3. 解析:由题意得高二年级的学生人数占该学校高中人数的 $\frac{3}{10}$,则应从高二年级抽取 $50\times\frac{3}{10}=15$ 名学生.

答案:15

4. 解析:被抽取女运动员人数为 $\frac{98-56}{98}\times28=12$.

答案:12

5. 解析:由题意知,各层人数比例为 3 : 3 : 8 : 6,所以应在丙专业抽取的学生人数为 $40\times\frac{8}{20}=16$.

答案:16

6. 解析:应抽取中型超市 $\frac{400}{200+400+1\ 400}\times100=20$(家).

答案:20

模板 4 用频率分布直方图估计总体

1. 解析:[20,40)间的频率为 $0.005\times20=0.1$,[40,60)间的频率为 $0.01\times20=0.2$. 所以低于 60 分的频率为 0.3,总人数为 $\frac{15}{0.3}=50$,故选 B.

答案:B

2. 解析:由频率分布直方图可得,该模块测试成绩不少于 60 分的学生人数为 $600-(0.005+0.015)\times10\times600=480$.

答案:B

3. 解析:该班学生视力在 0.9 以上的频率为 $(1+0.75+0.25)\times0.2=0.4$,故能报 A 专业的人数为 $0.4\times50=20$.

答案:B

4. 解析:后两个小组的频率为 $(0.037\ 5+0.087\ 5)\times2=0.25$,所以前 3 个小组的频率为 $1-0.25=0.75$. 又前 3 个小组的面积比为 1 : 2 : 3,所以第三小组的频率为 $\frac{3}{1+2+3}\times0.75=0.375$,第四小组的频率为 $0.087\ 5\times2=0.175$,所以购鞋尺寸在[39.5,43.5)的频率为 $0.375+0.175=0.55=55\%$.

答案:55%

5. 解析:$\because(0.005+0.035+a+0.020+0.010)\times10=1$,$\therefore a=0.030$,设身高在[120,130),[130,140),[140,150]三组的分别有 x,y,z 人,

$\therefore\frac{x}{100}=0.030\times10$,$\therefore x=30$,同理 $y=20$,$z=10$.

$\therefore$ 从[140,150]中抽取 $\frac{10}{30+20+10}\times18=3$.

答案:0.030 3

6. 解析:(1)由频率分布直方图中总面积为 1,得 $(0.001\ 2+0.002\ 4\times2+0.003\ 6+x+0.006\ 0)\times50=1$,解得 $x=0.004\ 4$.

(2)用电量在[100,250)内的频率为 $(0.003\ 6+0.004\ 4+0.006\ 0)\times50=0.7$,故户数为 $100\times0.7=70$.

答案:(1)0.004 4 (2)70

模板 5 根据样本求总体的数字特征

1. 解析:平均数 $\bar{x}=\frac{10+6+8+5+6}{5}=7$,

$\therefore s^2=\frac{1}{5}[(10-7)^2+(6-7)^2+(8-7)^2+(5-7)^2+(6-7)^2]=\frac{16}{5}=3.2$.

答案:3.2

2. 解析:对于甲,平均成绩为 $\bar{x}=90$,所以方差为 $s^2=\frac{1}{5}\times[(87-90)^2+(91-90)^2+(90-90)^2+(89-90)^2+(93-90)^2]=4$;对于乙,平均成绩为 $\bar{x}=90$,方差为 $s^2=\frac{1}{5}\times[(89-90)^2+(90-90)^2+(91-90)^2+(88-90)^2+(92-90)^2]=2$. 由于 2<4,所以乙的平均成绩较为稳定.

答案:2

3. 解:(1)由图象可得甲、乙两人五次测试的成绩分别为

甲:10 分,13 分,12 分,14 分,16 分;

乙:13 分,14 分,12 分,12 分,14 分.

$\bar{x}_{甲}=\frac{10+13+12+14+16}{5}=13$,

$\bar{x}_{乙}=\frac{13+14+12+12+14}{5}=13$,

$s_{甲}^2=\frac{1}{5}[(10-13)^2+(13-13)^2+(12-13)^2+(14-13)^2+(16-13)^2]=4$,

$s_{乙}^2=\frac{1}{5}[(13-13)^2+(14-13)^2+(12-13)^2+(12-13)^2+$

$(14-13)^2]=0.8$.

(2)由$s_{甲}^2>s_{乙}^2$可知乙的成绩较稳定.

从折线图看,甲的成绩基本上呈上升状态,而乙的成绩上下波动,可知甲的成绩在不断提高,而乙的成绩则无明显提高.

模板 6　由茎叶图计算数字特征

1. 解析:中位数为$\frac{1}{2}\times(91+92)=91.5$;平均数为$\frac{1}{8}\times(87+89+90+91+92+93+94+96)=91.5$.

   答案:A

2. 解析:经计算,得甲的平均成绩是 81,乙的平均成绩是 86.8;甲的方差是 50.4,乙的方差是 37.36.

   答案:A

3. 解析:由茎叶图可知在这 20 名教师中,上学期使用多媒体进行教学的次数在[16,30)内的人数为 8,据此可以估计 400 名教师中,使用多媒体进行教学次数在[16,30)内的人数为$\frac{8}{20}\times 400=160$.

   答案:B

4. 解析:样本数据共 30 个. 中位数为$\frac{45+47}{2}=46$;样本中出现次数最多的为 45,故众数为 45;极差为 68−12=56. 故选 A.

   答案:A

5. 解析:$\bar{x}_{甲}=\frac{1}{10}\times(19+18+20+21+23+22+20+31+31+35)=24$,

   $\bar{x}_{乙}=\frac{1}{10}\times(19+17+11+21+24+22+24+30+32+30)=23$.

   答案:24　23

6. 解析:由茎叶图可知,甲组数据共有 9 个数,分别为 28,31,39,42,45,55,57,58,66,其中位数为 45;乙组数据中共有 9 个数,分别为 29,34,35,42,46,48,53,55,67,其中位数为 46.

   答案:45　46

模板 7　由数字特征求参数

1. 解析:由图可知去掉的两个数是 87,99,所以 $87+90\times2+91\times2+94+90+x=91\times7$,$x=4$.

   $s^2=\frac{1}{7}[(87-91)^2+(90-91)^2\times2+(91-91)^2\times2+(94-91)^2\times2]=\frac{36}{7}$.

   答案:B

2. 解析:依题意,甲班学生的平均分

   $85=\frac{78+79+85+80+x+80+92+96}{7}$,解得 $x=5$,

   乙班学生成绩的中位数为 83, 故其成绩为 76,81,81,83,91,91,96,所以 $y=3$,$x+y=8$.

   答案:8

3. 解析:$\bar{x}=\frac{1}{7}(17+18+19+40+d+e+22+23)=20$,所以 $d+e=1$. 又中位数是 20,所以 $d=0$,$e=1$,或 $e=0$,$d=1$. 所以这 7 个数是 17,18,19,20,21,22,23,故方差 $s^2=\frac{1}{7}[(17-20)^2+(18-20)^2+(19-20)^2+(20-20)^2+(21-20)^2+(22-20)^2+(23-20)^2]=\frac{1}{7}(9+4+1+0+1+4+9)=4$.

   答案:4

4. 解析:由题意可知去掉的最高分和最低分为 94 和 88,所以$\frac{89+89+92+93+92+91+(90+x)}{7}=91\Rightarrow x=1$.

   答案:1

模板 8　数字特征的实际应用

1. 解:(1)各组中值分别为 165,195,225,255,285,315,345,375,由此可算得平均数约为$165\times1\%+195\times11\%+225\times18\%+255\times20\%+285\times25\%+315\times16\%+345\times7\%+375\times2\%=267.9\approx268$(天).

   (2)将各组中值对此平均数求方差:

   $\frac{1}{100}\times[1\times(165-268)^2+11\times(195-268)^2+18\times(225-268)^2+20\times(255-268)^2+25\times(285-268)^2+16\times(315-268)^2+7\times(345-268)^2+2\times(375-268)^2]=2\,128.60$.

   故标准差为$\sqrt{2\,128.60}\approx46$(天).

   所以,估计这种日光灯的平均使用寿命约为268天,标准差约为 46 天,故可在 222 天到 314 天左右统一更换较合适.

2. 解:(1)乙的射靶环数依次为 2,4,6,8,7,7,8,

9,9,10. 可知$\bar{x}_乙=\frac{1}{10}(2+4+6+8+7+7+8+9+9+10)=$7,所以填7,乙的射靶环数由小到大排列为:2,4,6,7,7,8,8,9,9,10. 所以中位数为$\frac{7+8}{2}=$7.5;甲的射靶环数从小到大排列为:5,6,6,7,7,7,7,8,8,9,所以中位数为7. 于是填充后的表格如下表所示.

	平均数	方差	中位数	命中9环及以上
甲	7	1.2	7	1
乙	7	5.4	7.5	3

(2)①甲、乙的平均数相同;均为7,但$s_甲^2<s_乙^2$,说明甲偏离平均数的程度小,而乙偏离平均数的程度大.

②甲、乙平均水平相同,而乙的中位数比甲大,可预见乙射靶环数的优秀次数比甲的多.

③甲、乙平均水平相同,而乙命中9环以上(包含9环)的次数比甲多2次,可知乙的射靶成绩比甲好.

④从折线图上看,乙的成绩呈上升趋势,而甲的成绩在平均线上波动不大,说明乙的状态在提升,有潜力可挖.

模板9　求线性回归方程

1. 解析:回归直线必过样本中心,故其方程为$\hat{y}-5=1.23(x-4)$,即$\hat{y}=1.23x+0.08$.

答案:C

2. 解析:$\bar{x}=5,\bar{y}=5,\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=138,\sum_{i=1}^{5}x_i^2=145$.

则$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\frac{138-5\times5\times5}{145-5\times5^2}=\frac{13}{20}$,

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=5-\frac{13}{20}\times5=5-\frac{13}{4}=\frac{7}{4}$.

故所求回归直线方程是$\hat{y}=\frac{13}{20}x+\frac{7}{4}$.

答案:$\hat{y}=\frac{13}{20}x+\frac{7}{4}$

3. $\hat{y}=0.56x+997.4$

4. 解:$\bar{x}=5,\bar{y}=50,\sum_{i=1}^{5}x_i^2=145,\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=1\ 380$,

$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\frac{1\ 380-5\times5\times50}{145-5\times5^2}=6.5$,

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=50-6.5\times5=17.5$.

故所求回归直线方程为$\hat{y}=6.5x+17.5$.

模板10　利用回归直线进行估计

1. 解析:由题意,知$\bar{x}=17.5,\bar{y}=39$,代入回归直线方程,$39=-4\times17.5+\hat{a}$,解得$\hat{a}=109$,所以每天的销售量为$109-15\times4=49$(个).

答案:B

2. 解析:由题设知:设解释变量为x,预报变量为y,它们对应的取值如下表所示:

x	173	170	176
y	170	176	182

于是有$\bar{x}=173,\bar{y}=176$,

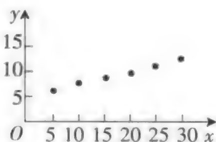
经计算,$\hat{b}=1,\hat{a}=176-173\times1=3$,则回归方程为$\hat{y}=x+3$,所以当$x=182$时,$\hat{y}=185$.

答案:185

3. 解析:当$x=2$时,总成本y的估计值$\hat{y}=1.215\times2+0.974=3.404$.

答案:3.404

4. 解:(1)散点图如图所示:



(2)采用列表的方法计算$\hat{a}$与回归系数$\hat{b}$(如下表所示).

序号	x	y	x^2	xy
1	5	7.25	25	36.25
2	10	8.12	100	81.2
3	15	8.95	225	134.25
4	20	9.90	400	198
5	25	10.96	625	274
6	30	11.80	900	354

$\bar{x}=\frac{1}{6}\times(5+10+\cdots+30)=17.5,\bar{y}=\frac{1}{6}\times(7.25+8.12+$

$\cdots+11.80)\approx9.50$，$\sum_{i=1}^{6}x_i^2=25+100+\cdots+900=2\ 275$，

$\sum_{i=1}^{6}x_iy_i=36.25+81.2+\cdots+354=1\ 077.7$，

$\hat{b}=\frac{1\ 077.7-6\times17.5\times9.50}{2\ 275-6\times17.5^2}\approx0.183$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=9.50-0.183\times17.5\approx6.30$.

所以 y 与 x 的回归直线方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}=0.183x+6.30$.

(3)当重量为 27g 时，

有 $\hat{y}=0.183\times27+6.30\approx11.24$(cm).

故当所挂物体重量为 27g 时，弹簧的长度大约为 11.24cm.

第三章　概　率

模板 1　用频率估计概率

1. 解：(1)在所给数据中，降雨量为 110 毫米的有 3 个，为 160 毫米的有 7 个，为 200 毫米的有 3 个，故近 20 年六月份降雨量频率分布表为：

降雨量	70	110	140	160	200	220
频率	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{7}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$

(2)由已知可得 $Y=\frac{X}{2}+425$，故 P("发电量低于 490 万千瓦时或超过 530 万千瓦时")$=P(Y<490$ 或 $Y>530)=P(X<130$ 或 $X>210)=P(X=70)+P(X=110)+P(X=220)=\frac{1}{20}+\frac{3}{20}+\frac{2}{20}=\frac{3}{10}$.

故今年六月份该水力发电站的发电量低于 490 (万千瓦时)或超过 530(万千瓦时)的概率为 $\frac{3}{10}$.

2. 解：(1)由已知共调查了 100 人，其中 40 分钟内不能赶到火车站的有 12+12+16+4=44 人，用频率估计相应的概率为 0.44.

(2)选择 L_1 的有 60 人，选择 L_2 的有 40 人，故由调查结果得频率为：

所用时间（分钟）	10~20	20~30	30~40	40~50	50~60
选择路径 L_1 的频率	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2
选择路径 L_2 的频率	0	0.1	0.4	0.4	0.1

(3)用 A_1,A_2 分别表示甲选择 L_1 和 L_2 时，在 40 分钟内赶到火车站；

用 B_1,B_2 分别表示乙选择 L_1 和 L_2 时，在 50 分钟内赶到火车站.

由(2)知 $P(A_1)=0.1+0.2+0.3=0.6$，$P(A_2)=0.1+0.4=0.5$，$P(A_1)>P(A_2)$，甲应选择路径 L_1；

$P(B_1)=0.1+0.2+0.3+0.2=0.8$，$P(B_2)=0.1+0.4+0.4=0.9$，$P(B_2)>P(B_1)$，乙应选择路径 L_2.

3. 解：(1)当日需求量 $n\geqslant17$ 时，利润 $y=85$.

当日需求量 $n<17$ 时，利润 $y=10n-85$，所以 y 关于 n 的函数解析式为 $y=\begin{cases}10n-85,n<17,\\85,n\geqslant17\end{cases}(n\in\mathbf{N})$.

(2)①这 100 天中有 10 天的日利润为 55 元，20 天的日利润为 65 元，16 天的日利润为 75 元，54 天的日利润为 85 元，所以这 100 天的日利润的平均数为 $\frac{1}{100}(55\times10+65\times20+75\times16+85\times54)=76.4$.

②利润不低于 75 元当且仅当日需求量不少于 16 枝. 故当天的利润不少于 75 元的概率为 $P=0.16+0.16+0.15+0.13+0.1=0.7$.

4. 解：(1)甲品牌产品寿命小于 200 小时的频率为 $\frac{5+20}{100}=\frac{1}{4}$，用频率估计概率，所以，甲品牌产品寿命小于 200 小时的概率为 $\frac{1}{4}$.

(2)根据抽样结果，寿命大于 200 小时的产品有 75+70=145 个，其中甲品牌产品是 75 个，所以在样本中，寿命大于 200 小时的产品是甲品牌的频率是 $\frac{75}{145}=\frac{15}{29}$，用频率估计概率，所以已使用了 200 小时的该产品是甲品牌的概率为 $\frac{15}{29}$.

模板 2　求古典概型的概率

1. 解析：甲、乙两位同学参加 3 个小组中的一个的所有可能性有 3×3=9(种)，其中甲、乙两人参加同一个小组的情况有 3(种)，故这两位同学参加同一个兴趣小组的概率为 $P=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

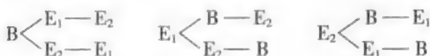
答案：A

2. 解析：设正六边形为 $ABCDEF$，从 6 个顶点中随机选择 4 个顶点，共有 15 种结果，以所取 4 个

点作为顶点的四边形是矩形有 3 种结果,故其概率为$\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$.

答案:D

3. 解析:如图所示. 基本事件总数为 6,所求基本事件个数为 2,所以所求的概率是 $P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.



答案:$\frac{1}{3}$

4. 解析:设此正方形为 $ABCD$,中心为 O,则任取两个点的取法有 $AB,AC,AD,BC,BD,CD,AO,BO,CO,DO$,共 10 种. 取出的两点间的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$的取法有 AO,BO,CO,DO,共 4 种,故所求概率为$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

答案:$\frac{2}{5}$

5. 解:(1)4　6　6

(2)①得分在区间[20,30)内的运动员编号为 $A_3,A_4,A_5,A_{10},A_{11},A_{13}$.

从中随机抽取 2 人,所有可能的抽取结果有:$\{A_3,A_4\},\{A_3,A_5\},\{A_3,A_{10}\},\{A_3,A_{11}\},\{A_3,A_{13}\},\{A_4,A_5\},\{A_4,A_{10}\},\{A_4,A_{11}\},\{A_4,A_{13}\},\{A_5,A_{10}\},\{A_5,A_{11}\},\{A_5,A_{13}\},\{A_{10},A_{11}\},\{A_{10},A_{13}\},\{A_{11},A_{13}\}$,共 15 种.

②"从得分在区间[20,30)内的运动员中随机抽取 2 人,这 2 人得分之和大于 50"(记为事件 B)的所有可能结果有:$\{A_4,A_5\},\{A_4,A_{10}\},\{A_4,A_{11}\},\{A_5,A_{10}\},\{A_{10},A_{11}\}$,共 5 种.

所以 $P(B)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

6. 解:(1)由频率分布表得 $a+0.2+0.45+b+c=1$,即$a+b+c=0.35$.

因为抽取的 20 件日用品中,等级系数为 4 的恰有 3 件,所以 $b=\frac{3}{20}=0.15$;

等级系数为 5 的恰有 2 件,所以 $c=\frac{2}{20}=0.1$,从而 $a=0.35-b-c=0.1$,所以 $a=0.1,b=0.15,c=0.1$.

(2)从日用品 x_1,x_2,x_3,y_1,y_2 中任取两件,所有可能的结果为:$\{x_1,x_2\},\{x_1,x_3\},\{x_1,y_1\},\{x_1,y_2\},\{x_2,x_3\},\{x_2,y_1\},\{x_2,y_2\},\{x_3,y_1\},\{x_3,y_2\},\{y_1,y_2\}$.

设事件 A 表示"从日用品 x_1,x_2,x_3,y_1,y_2 中任取两件,其等级系数相等",则 A 包含的基本事件为$\{x_1,x_2\},\{x_1,x_3\},\{x_2,x_3\},\{y_1,y_2\}$共 4 个.

又基本事件的总数为 10,

故所求的概率 $P(A)=\frac{4}{10}=0.4$.

模板 3　求几何概型的概率

1. 解析:"点 Q 取自$\triangle ABE$ 内部"记为事件 M,则

$P(M)=\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{矩形ABCD}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|AD|}{|AB|\cdot|AD|}=\frac{1}{2}$,故选C.

答案:C

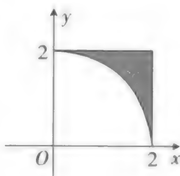
2. 解析:设扇形的半径为 2,其面积为$\frac{\pi\times2^2}{4}=\pi$,阴影部分的面积是 $\pi-\frac{1}{2}\times2\times2=\pi-2$,因此此点取自阴影部分的概率为$\frac{\pi-2}{\pi}=1-\frac{2}{\pi}$,故选 A.

答案:A

3. 解析:设$AC=x$cm,$0<x<12$,则$CB=(12-x)$cm,要使矩形面积大于 20cm^2,只要 $x(12-x)>20$,即 $x^2-12x+20<0$,解得 $2<x<10$,所以所求概率 $P=\frac{10-2}{12}=\frac{2}{3}$,故选 C.

答案:C

4. 解析:由图可知,当点落在阴影部分时满足题意.即设事件 A 为"在区域内随机取一个点,则此点到原点的距离大于 2",所以



$P(A)=\frac{4-\pi}{4}$.

答案:D

5. 解析:由$(x+1)(x-3)\leqslant0$,解得$-1\leqslant x\leqslant3$,在[-2,3]上随机取一个数是等可能的,所以符合几何概型的条件,所以所求事件的概率 $P=\frac{3-(-1)}{3-(-2)}=\frac{4}{5}$.

答案:D

6. 解析:(1)由点到直线的距离公式可得

$d=\frac{25}{\sqrt{4^2+3^2}}=5.$

(2)由(1)可知圆心到直线 l 的距离为 5,要使圆上点到直线的距离小于 2,即 $l_1:4x+3y=15$ 与圆相交所得劣弧上,由半径为 $2\sqrt{3}$,圆心到直线的距离为 3 可知劣弧所对圆心角为 $\frac{\pi}{3}$,故所求

概率为 $P=\frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi}=\frac{1}{6}$.

答案:(1)5 (2)$\frac{1}{6}$

7. 解析:记事件 A 为"射线落在 $\angle xOT$ 内",事件 A 的几何度量是 135°,全体基本事件的几何度量是 360°,所以由几何概型的概率公式可得 $P(A)=\frac{135°}{360°}=\frac{3}{8}$.

答案:$\frac{3}{8}$

模板 4 几何概型的实际应用

1. 解析:记"小波周末去看电影"为事件 A,"小波周末打篮球"为事件 B. 依题意,事件 A,B 互斥,且 $A+B$ 表示"小波周末不在家看书".
又全部试验区域的面积为 $\pi\cdot 1^2=\pi$,事件 A,B 发生所在区域面积分别为 $S_1=\pi-\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}\pi$,

$S_2=\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{\pi}{16}$,

$\therefore P(A)=\frac{\frac{3}{4}\pi}{\pi}=\frac{3}{4}$,$P(B)=\frac{\frac{\pi}{16}}{\pi}=\frac{1}{16}$,

则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{4}+\frac{1}{16}=\frac{13}{16}$,

因此小波周末不在家看书的概率为 $\frac{13}{16}$.

答案:$\frac{13}{16}$

2. 解析:海豚的嘴尖可随机地落在长方形 $ABCD$ 内的任意一点,海豚嘴尖离岸边不超过 2m,即海豚嘴尖落在如图所示的阴影部分内.

$\therefore P(A)=\frac{40\times 30-(40-4)\times(30-4)}{40\times 30}=\frac{11}{50}$.



答案:$\frac{11}{50}$

3. 解析:设黄灯亮的时间间隔为 t 秒,P(遇到红灯)$=\frac{2}{5}=\frac{30}{30+40+t}$,解得 $t=5$.

答案:5

4. 解:由于箭都能中靶,且射中靶面的任一点是等可能的,因此符合几何概型的特征,可用几何概型的概率公式求解. 记"射中'黄心'"为事件 B,由于中靶点随机落在面积为 $\frac{1}{4}\pi\times 122^2\text{cm}^2$ 的大圆内,而当中靶点落在面积为 $\frac{1}{4}\pi\times 12.2^2\text{cm}^2$ 的"黄心"时,事件 B 发生,于是事件 B 发生的概率 $P(B)=\frac{\frac{1}{4}\pi\times 12.2^2}{\frac{1}{4}\pi\times 122^2}=0.01$.

必修 4

第一章 三角函数

模板 1 三角式的化简求值

1. 解析:$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=\frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1}=-3$,故选 A.

答案:A

2. 解析:由 $\sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{2}$ 得 $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\frac{5}{4}$,得 $1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{5}{4}$,得 $\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{1}{8}$,所以 $\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha^2+\cos\alpha^2}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$ $=-8$,故选 C.

答案:C

3. 解析:原式$=\frac{3\sin^2\alpha-\cos\alpha\sin\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}+1=\frac{3\tan^2\alpha-\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}+1=\frac{3\times 2^2-2}{1+2^2}+1=\frac{10}{5}+1=3$. 故选 A.

答案：A

4. 解：$\because \tan\alpha=\sqrt{3}$，$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，

$\therefore \sin\alpha<0$，$\cos\alpha<0$.

由$\begin{cases}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{3},\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\end{cases}$得$\begin{cases}\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos\alpha=-\frac{1}{2}.\end{cases}$

$\therefore \sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

模板 2　三角等式的证明

1. 证明：左边$=\cos\alpha\sqrt{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}+\sin\alpha\sqrt{1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}$

$=\cos\alpha\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}}+\sin\alpha\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}}=\frac{\cos\alpha}{-\cos\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha}=0=$右边.

$\therefore$ 原式成立.

2. 证明：由 $\sin\alpha=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$ 得 $\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$. $\therefore$ 原式成立.

3. 证明：因为 A、B、C 为三角形的三个内角，所以 $A+B+C=\pi$，所以 $\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$，所以 $\cos\frac{A+B}{2}=\sin\frac{C}{2}$，所以 $\cos^2\frac{A+B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=\sin^2\frac{C}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=1$.

$\therefore$ 原式成立.

4. 证明：$\because \frac{\cos x}{1-\sin x}-\frac{1+\sin x}{\cos x}$

$=\frac{\cos^2x-(1+\sin x)(1-\sin x)}{\cos x(1-\sin x)}$

$=\frac{\cos^2x-(1-\sin^2x)}{\cos x(1-\sin x)}=\frac{\cos^2x-\cos^2x}{\cos x(1-\sin x)}=0$，

$\therefore \frac{\cos x}{1-\sin x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}$.

模板 3　求一个角的三角函数值

1. 解析：$\cos\alpha=\sin\alpha-\sqrt{2}$，代入$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$得$\sin^2\alpha+(\sin\alpha-\sqrt{2})^2=1$，又$\alpha\in(0,\pi)$，解得$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-1$.

答案：A

2. 解析：$\cos300°=\cos(180°+120°)=-\cos120°=\frac{1}{2}$.

答案：C

3. 解析：$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha=a$.

答案：A

4. 解析：因为 $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，$\cos\alpha=-\frac{3}{5}$，所以 $\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{4}{5}$，所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{3}$.

答案：$\frac{4}{3}$

5. 解析：$\because \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，$\sin\alpha=-\frac{3}{5}$，

$\therefore \cos\alpha=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$，$\therefore \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{4}{5}$.

答案：$-\frac{4}{5}$

6. 解：原式$=\frac{-\cos\theta}{\cos\theta(-\cos\theta-1)}+\frac{\cos\theta}{-\cos\theta\cos\theta+\cos\theta}$

$=\frac{1}{1+\cos\theta}+\frac{1}{1-\cos\theta}$

$=\frac{2}{\sin^2\theta}=\frac{2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=6$.

模板 4　三角函数性质的应用

1. 解：(1) $\because \begin{cases}-2\sin x-\sqrt{3}\geqslant 0,\\ 1+\tan x\neq 0,\\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z}),\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}\sin x\leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \tan x\neq -1,\\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z}).\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}2k\pi+\frac{4\pi}{3}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{3}\ (k\in\mathbf{Z}),\\ x\neq 2k\pi+\frac{3\pi}{4}\text{ 且 }x\neq 2k\pi+\frac{7\pi}{4}\ (k\in\mathbf{Z}),\\ x\neq 2k\pi+\frac{\pi}{2}\text{ 且 }x\neq 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z}).\end{cases}$

$\therefore x\in\left[2k\pi+\frac{4\pi}{3},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(2k\pi+\frac{3\pi}{2},2k\pi+\frac{5\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$.

(2) $\because \sin(\cos x)>0$，

$\therefore 2k\pi<\cos x<2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$.

又 $\because -1\leqslant\cos x\leqslant 1$，$\therefore 0<\cos x\leqslant 1$，

$\therefore 2k\pi-\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{\pi}{2}$，

$\therefore x\in\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

2. 解：(1)由 $2k\pi-\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

得 $k\pi-\frac{7}{12}\pi\leqslant x\leqslant k\pi-\frac{\pi}{12}(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$的单调递增区间为

$\left[k\pi-\frac{7}{12}\pi,k\pi-\frac{\pi}{12}\right](k\in\mathbf{Z})$.

(2)$y=3\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)=-3\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$，

求 $y=3\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)$的单调递增区间即求 $y=3\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$的单调递减区间.

由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

得 $4k\pi+\frac{5\pi}{3}\leqslant x\leqslant 4k\pi+\frac{11\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.

$\therefore y=3\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)$的单调递增区间为

$\left[4k\pi+\frac{5\pi}{3},4k\pi+\frac{11\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$.

3. 解：(1)$\because\begin{cases}1-\frac{1}{2}\sin x\geqslant 0,\\-1\leqslant\sin x\leqslant 1,\end{cases}$解得$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$.

$\therefore$ 当 $\sin x=-1$ 时，$y_{max}=\frac{\sqrt{6}}{2}$；当 $\sin x=1$时，$y_{min}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)$\because -1\leqslant\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\leqslant 1$，

$\therefore$ 当 $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=1$ 时，$y_{max}=5$；

当 $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-1$ 时，$y_{min}=1$.

4. 解：由$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=-2$，得$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=-2\sin\left(2\times\frac{\pi}{8}+\varphi\right)=-2\times\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=-2$，所以$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=1$. 因为$|\varphi|<\pi$，所以$\varphi=\frac{\pi}{4}$. 所以$f(x)$的单调递减区间，即 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$的单调递增区间，即$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $k\pi-\frac{3\pi}{8}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$.

模板 5 利用函数性质求参数

1. 解析：因为函数$f(x)$为偶函数，$f(0)=\sin\frac{\varphi}{3}$，所以$\frac{\varphi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，所以 $\varphi=\frac{3\pi}{2}+3k\pi,k\in\mathbf{Z}$，又 $\varphi\in[0,2\pi]$，所以当 $k=0$ 时，$\varphi=\frac{3\pi}{2}$，故选 C.

答案：C

2. 解析：欲使 $y=\sin(\omega x+\theta)$为偶函数，则 $\theta=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$. 又 $0<\theta<\pi$，所以 $\theta=\frac{\pi}{2}$. 故选 C.

答案：C

3. 解析：由 $y=\tan\omega x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内为减函数，则$\omega<0$，$y=-\tan(-\omega x)$. 由$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$知$\frac{\pi}{2}\omega<-\omega x<-\frac{\pi}{2}\omega$，从而$\begin{cases}\frac{\pi}{2}\omega\geqslant-\frac{\pi}{2},\\-\frac{\pi}{2}\omega\leqslant\frac{\pi}{2},\end{cases}$故 $\omega\geqslant-1$，即$-1\leqslant\omega<0$.

故选 B.

答案：B

4. 解析：将 $x=\frac{\pi}{12}$ 代入解析式得 $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=0$，得$\frac{\pi}{6}+\varphi=k\pi$，即 $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{6}$. 令 $k=0$，得 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$. 故选 B.

答案：B

5. 解：由$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{3},\\0<\omega<1\end{cases}$得 $0\leqslant\omega x\leqslant\frac{\pi}{3}\omega<\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}$.

从而$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增，

故$f(x)_{max}=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{\pi}{3}\omega=\sqrt{2}$，

则 $\sin\frac{\pi}{3}\omega=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故$\frac{\pi}{3}\omega=\frac{\pi}{4}$，则 $\omega=\frac{3}{4}$.

模板 6 三角函数不等式的解法

1. 解 $\because f\left(\frac{3}{5}\right)=2\sin\frac{\pi}{2}=2$，

$\therefore f(x)\leqslant\frac{1}{2}f\left(\frac{3}{5}\right)=1.$

$\therefore\sin\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{5}\right)\leqslant\frac{1}{2}$,

$\therefore\frac{\pi}{6}+2k\pi\leqslant\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{5}\leqslant\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}.$

$\therefore-\frac{1}{15}+4k\leqslant x\leqslant\frac{19}{15}+4k,k\in\mathbf{Z}.$

2. 解：$\because f(0)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+b=\frac{1}{2}+b=1$,

$\therefore b=\frac{1}{2}.$

$\therefore f(x)=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}.$

$\therefore\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{3}+1}{2}$,

$\therefore\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)<\frac{\sqrt{3}}{2}.$

$\therefore\frac{\pi}{6}+2k\pi<x-\frac{\pi}{3}<\frac{11\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}.$

$\therefore\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{13\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}.$

3. 解：$\because f(x)_{\max}=3,\therefore A=3$,

$\therefore f(x)=3\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)>\frac{3\sqrt{2}}{2}.$

即 $\sin\left(x+\frac{\pi}{12}\right)>\frac{\sqrt{2}}{2}.$

$\therefore\frac{\pi}{4}+2k\pi<x+\frac{\pi}{12}<\frac{3\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}.$

$\therefore\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}.$

4. 解：由 $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\pi\right)\geqslant\frac{1}{2}$，得 $-\frac{\pi}{3}+2k\pi\leqslant\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\pi\leqslant\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\frac{\pi}{3}+4k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5}{3}\pi+4k\pi(k\in\mathbf{Z})$，又 $x\in[0,2\pi)$，所以 $\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{5}{3}\pi.$

模板 7　求三角函数的周期或对称轴(中心)

1. 解析：$\because\omega=\frac{1}{2},\therefore T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi.$

答案：D

2. 解析：周期为 $\frac{\pi}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}\pi$. 故选 B.

答案：B

3. B

4. 解析：由 $2x+\frac{\pi}{3}=k\pi$ 得 $x=\frac{1}{2}k\pi-\frac{\pi}{6}$，对称中心为 $\left(\frac{1}{2}k\pi-\frac{\pi}{6},0\right)(k\in\mathbf{Z})$，当 $k=1$ 时，为 $\left(\frac{\pi}{3},0\right).$

答案：A

5. 解析：由于 $y=|\sin x|$ 的最小正周期为 π，故 $y=|\sin 3x|$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{3}$. 即 $y=\left|\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{3}.$

答案：$\frac{\pi}{3}$

6. 解：(1)最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{3}}=6\pi$,

令 $\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $x=2\pi+3k\pi,k\in\mathbf{Z}.$

令 $\frac{x}{3}-\frac{\pi}{6}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $x=\frac{\pi}{2}+3k\pi,k\in\mathbf{Z}.$

故函数最小正周期为 6π，对称轴为 $x=2\pi+3k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$.对称中心为 $\left(\frac{\pi}{2}+3k\pi,0\right),k\in\mathbf{Z}.$

(2)$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(2x-\frac{3\pi}{10}\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{5}\right).$

$\therefore$ 最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi.$

令 $2x+\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $x=\frac{3\pi}{20}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}.$

令 $2x+\frac{\pi}{5}=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $x=-\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}.$

故函数最小正周期为 π. 对称轴为 $x=\frac{3\pi}{20}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}.$

对称中心为 $\left(-\frac{\pi}{10}+\frac{k\pi}{2},0\right),k\in\mathbf{Z}.$

模板 8　由三角函数的周期性或对称性求参数

1. 解析：由题意得周期 $T=2\left(\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=2\pi$,

$\therefore 2\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，即 $\omega=1,\therefore f(x)=\sin(x+\varphi)$,

$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)=\pm1,\frac{\pi}{4}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2},\varphi=k\pi+\frac{\pi}{4}$,

$\because 0<\varphi<\pi$，令 $k=0$，得$\varphi=\frac{\pi}{4}$.

答案：A

2. 解析：由题意知 $\omega=2$，所以解析式为 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，经验证可知它的一个对称中心为 $\left(\frac{\pi}{3},0\right)$.

答案：A

3. 解析：由 $k>0$，则 $T=\frac{2\pi}{\frac{1}{k}}=2\pi k=\frac{\pi}{3}$，得 $k=\frac{1}{6}$. 故选 B.

答案：B

4. 解析：$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{5}\Rightarrow\omega=10$.

答案：10

5. 解：要出现 50 次最大值，则至少需有 $49\frac{1}{4}$ 周期，即有 $\left(49\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{2\pi}{\omega}\leqslant 1$，即 $\frac{197}{4}\times\frac{2\pi}{\omega}\leqslant 1$，解得 $\omega\geqslant\frac{197}{2}\pi$. 故 $\omega_{\min}=\frac{197}{2}\pi$.

6. 解：由于两个函数对称轴完全相同，即周期相同，则 $\omega=2$.

则 $f(x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$的对称轴为

$2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，即 $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，而 $g(x)=2\cos(2x+\varphi)+1$ 的对称轴为 $2x+\varphi=k\pi$，即 $x=-\frac{\varphi}{2}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，则$-\frac{\varphi}{2}=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，又 $\varphi\in[0,\pi]$，令 $k=-1$，得 $\varphi=\frac{1}{3}\pi$.

模板 9　利用周期性求函数值

1. 解析：$\because f(x)$是周期为 2 的奇函数，

$\therefore f\left(-\frac{5}{2}\right)=f\left(-\frac{5}{2}+2\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}\right)=-2\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$.

答案：A

2. 解析：由题意，得 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，即 $f(x)$ 是以 4 为周期的偶函数，因此 $f(19)=f(4\times5-1)=f(-1)=f(1)$，而 $f(-1+2)=-f(-1)$，即 $f(1)=-f(1)$，所以 $f(1)=0$，因此 $f(19)=0$.

答案：A

3. 解析：$\because f(x+4)=f(x)$，$\therefore f(x)$是周期为 4 的函数，

$\therefore f(2\ 015)=f(504\times4-1)=f(-1)$.

又 $\because f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是奇函数，$\therefore f(-x)=-f(x)$，

$\therefore f(-1)=-f(1)$，而当 $x\in(0,2)$时，$f(x)=2x^2$，

$\therefore f(1)=2\times1^2=2$，

$\therefore f(2\ 015)=f(-1)=-f(1)=-2$，故选 A.

答案：A

4. 解析：$\because$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数满足 $f(x-4)=-f(x)$，即$-f(x-4)=f(x)$，$\therefore f(4-x)=f(x)$. $\therefore$ 函数图象关于直线 $x=2$ 对称，且 $f(0)=0$. 由 $f(x-4)=-f(x)$ 知 $f(x-8)=f(x)$，故函数是以 8 为周期的周期函数，$\therefore f(-25)=f(-1)$，$f(80)=f(0)$，$f(11)=f(8+3)=f(3)$. $\because f(4-x)=f(x)$，$\therefore f(3)=f(4-1)=f(1)$. 由于函数 $f(x)$在$[0,2]$上是增函数，$\therefore f(x)$在$[-2,0]$上也是增函数，故 $f(-1)<f(0)<f(1)$. $\therefore f(-25)<f(80)<f(11)$.

答案：D

5. 解：$\because f(1)=\frac{1}{4}$，令 $y=1$ 得 $f(x)=f(x+1)+f(x-1)$，即

$f(x+1)=f(x)-f(x-1)$，　①

$f(x+2)=f(x+1)-f(x)$，　②

由①②得 $f(x+2)=-f(x-1)$，即 $f(x+3)=-f(x)$，

则 $f(x+6)=f(x)$. $\therefore$ 该函数周期为 6.

$\therefore f(100)=f(6\times17-2)=f(-2)$.

令 $x=1,y=0$ 得 $4f(1)f(0)=f(1)+f(1)$，$\therefore f(0)=\frac{1}{2}$.

令 $x=0,y=1$ 得 $4f(0)f(1)=f(1)+f(-1)$，

$\therefore f(-1)=\frac{1}{4}$.

令 $x=-1,y=1$ 得 $4f(-1)f(1)=f(0)+f(-2)$，

$\therefore f(-2)=-\frac{1}{4}$.

$\therefore f(100)=f(-2)=-\frac{1}{4}$.

6. 解：当 $x>0$ 时，$\because f(x)=f(x-1)-f(x-2)$，

$\therefore f(x+1)=f(x)-f(x-1)$.

$\therefore f(x+1)=-f(x-2)$，即 $f(x+3)=-f(x)$.

$\therefore f(x+6)=f(x)$，

即当 $x>0$ 时，函数 $f(x)$的周期是 6.

又 $\because f(2\ 015)=f(335\times6+5)=f(5)$，

$\therefore$ 由已知得 $f(-1)=\log_2 2=1, f(0)=0, f(1)=f(0)-f(-1)=-1, f(2)=f(1)-f(0)=-1, f(3)=f(2)-f(1)=-1-(-1)=0, f(4)=f(3)-f(2)=0-(-1)=1, f(5)=f(4)-f(3)=1$.

$\therefore f(2\ 015)=1$.

模板 10 由函数变换求参数

1. 解析：因为函数 $f(x)$ 的图象过点 P，

所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$，所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$；

又函数 $f(x)$ 的图象向右平移 φ 个单位长度后，

得到函数 $g(x)=\sin\left[2(x-\varphi)+\frac{\pi}{3}\right]$ 的图象，

所以 $\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\varphi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 φ 可以为 $\frac{5\pi}{6}$，故选 B.

答案：B

2. 解析：由函数向右平移 $\frac{4\pi}{3}$ 个单位后与原图象重合，得 $\frac{4\pi}{3}$ 是此函数周期的整数倍.

$\therefore \frac{2\pi}{\omega}\cdot k=\frac{4\pi}{3}$，$\therefore \omega=\frac{3}{2}k(k\in\mathbf{Z})$，

又 $\omega>0$，$\therefore \omega_{\min}=\frac{3}{2}$.

答案：C

3. 解析：将函数 $y=\sin x$ 的图象向左平移 $\varphi(0\leqslant\varphi<2\pi)$ 个单位得到函数 $y=\sin(x+\varphi)$ 的图象，在 A、B、C、D 四项中，只有 $\varphi=\frac{11}{6}\pi$ 时有 $y=\sin\left(x+\frac{11}{6}\pi\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

答案：D

4. 解析：函数 $y=\tan\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位后得到 $y=\tan\left[\omega\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\tan\left(\omega x-\frac{\omega\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象.

又 $\because y=\tan\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，

$\therefore$ 令 $\frac{\pi}{4}-\frac{\omega\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+k\pi$，$\therefore \omega=\frac{1}{2}-6k(k\in\mathbf{Z})$.

又 $\because \omega>0$，$\therefore \omega$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

答案：D

5. 解析：因为 $T=\pi$，则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$，$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，$g(x)=\cos 2x$. 将 $y=f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度时，$y=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)+\frac{\pi}{4}\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$.

答案：A

模板 11 由函数图象求解析式

1. 解析：由图象知 $\frac{T}{4}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}$，$\therefore T=\pi, \omega=2$.

且 $2\times\frac{7\pi}{12}+\varphi=k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，$\varphi=k\pi-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$.

又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \varphi=-\frac{\pi}{6}$.

答案：D

2. 解析：由题意可知，

此函数的周期 $T=2\left(\frac{11}{12}\pi-\frac{7}{12}\pi\right)=\frac{2\pi}{3}$，

故 $\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore \omega=3$，$f(x)=A\cos(3x+\varphi)$.

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=A\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\varphi\right)=A\sin\varphi=-\frac{2}{3}$.

又由题图可知 $f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=A\cos\left(3\times\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)=0$，

$\therefore A\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=0$. 不妨取 $\varphi=\frac{7\pi}{4}$，则 $A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$\therefore f(0)=A\cos\varphi=\frac{2}{3}$.

答案：C

3. 解析：由图象知 $\frac{T}{4}=\frac{2}{3}\pi-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\pi$，则 $T=4\pi$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{1}{2}$. 又 $f(x)$ 的图象过点 $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$，则 $\varphi=\frac{\pi}{6}$. 故选 C.

答案：C

4. 解析：由已知得 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$，又 $f(0)=2\sin\varphi=\sqrt{3}$，

即 $\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 且 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，

所以 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，$x\in\mathbf{R}$.

令 $2x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$x\in\mathbf{Z}$，得 $x=k\pi+\frac{\pi}{12}$，$x\in\mathbf{Z}$，

故选 D.

答案：D

5. 解析：因为 $\frac{5\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2\pi}{\omega}\cdot\frac{3}{4}$，

所以 $\omega=2$，又因为 $2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$，

故选 A.

答案：A

6. 解析：由题设图象知，周期 $T=2\left(\frac{11\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)=\pi$，

$\therefore\omega=\frac{2\pi}{T}=2$.

因为点 $\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$ 在函数图象上，

所以 $A\sin\left(2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi\right)=0$，

即 $\sin\left(\frac{5\pi}{6}+\varphi\right)=0$.

又 $\because 0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\frac{5\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}+\varphi<\frac{4\pi}{3}$，

从而 $\frac{5\pi}{6}+\varphi=\pi$，即 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

又点(0，1)在函数图象上，

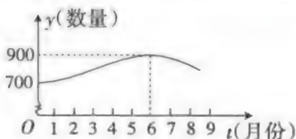
所以 $A\sin\frac{\pi}{6}=1$，$A=2$，

故函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

答案：$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

模板 12　三角函数模型的应用

1. 解：(1)种群数量关于时间变化的图象如图所示.



(2)设表示该曲线的三角函数为 $y=A\sin(\omega t+\varphi)+b(A>0)$. 由最高数量与最低数量的差为 200，数量变化的周期为 12 个月，

所以 $A=\frac{200}{2}=100$，$\omega=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}$，

$b=\frac{700+900}{2}=800$，

又 7 月 1 日种群数量达最高，

$\therefore\frac{\pi}{6}\times6+\varphi=\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\varphi=-\frac{\pi}{2}$.

则种群数量关于时间 t 的函数表达式为

$y=800+100\sin\left(\frac{\pi}{6}t-\frac{\pi}{2}\right)$.

2. 解：(1)由图可知 $A=300$.

设 $t_1=-\frac{1}{900}$，$t_2=\frac{1}{180}$，

则周期 $T=2(t_2-t_1)=2\left(\frac{1}{180}+\frac{1}{900}\right)=\frac{1}{75}$.

故 $\omega=\frac{2\pi}{T}=150\pi$.

又 $t=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{180}-\frac{1}{900}\right)=\frac{1}{450}$ 时，$I_{max}=300$，

即 $300\sin\left(150\pi\times\frac{1}{450}+\varphi\right)=300$，

解得 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$.

故 $I=300\sin\left(150\pi t+\frac{\pi}{6}\right)$.

(2)依题意，周期 $T\leqslant\frac{1}{150}$，

即 $\frac{2\pi}{\omega}\leqslant\frac{1}{150}(\omega>0)$，

故 $\omega\geqslant300\pi$，又 $\omega\in\mathbf{N}^*$，

故 ω 的最小正整数值为 943.

第二章　平面向量

模板 1　用已知向量表示其他向量

1. 解析：$\because 2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\mathbf{0}$，

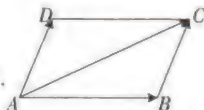
$\therefore 2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})=\mathbf{0}$，

$\therefore\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$.

答案：A

2. 解析：如图，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-1,-1)$，

所以 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=(-3,-5)$.



答案：B

3. 解析：方法一：设 $\overrightarrow{OP}=(10\cos\theta,10\sin\theta)$，

其中 $\cos\theta=\frac{3}{5}$，$\sin\theta=\frac{4}{5}$，

则$\overrightarrow{OQ}=\left(10\cos\left(\theta+\frac{3\pi}{4}\right),10\sin\left(\theta+\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$=(-7\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

方法二:将向量$\overrightarrow{OP}=(6,8)$按逆时针旋转$\frac{3\pi}{2}$后

得$\overrightarrow{OM}=(8,-6)$,则$\overrightarrow{OQ}=-\frac{1}{\sqrt{2}}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OM})$

$=(-7\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

答案:A

4. 解析:由于$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DE}$,故$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CF}$.

答案:D

5. 解:$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BA}=\frac{1}{6}\boldsymbol{a}-\frac{1}{6}\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=\frac{1}{6}\boldsymbol{a}+\frac{5}{6}\boldsymbol{b}$.

$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{6}\overrightarrow{OD}$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{6}\boldsymbol{b}$.

6. 解:$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{AD}$

$=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{AB}$

$=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$.

连接BD,因为G是$\triangle CBD$的重心,

所以$\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

模板2 向量的数量积运算

1. 解析:由$|\overrightarrow{BD}|+(|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{DC}|)=4$,

以及$|\overrightarrow{BD}|\cdot(|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{DC}|)=4$,

得$|\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{DC}|=2$.

$\therefore(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC})$

$=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}^2$

$=\overrightarrow{AB}^2+2\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DC}^2$

$=(|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{DC}|)^2=2^2=4$.

答案:C

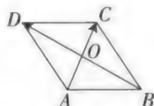
2. 解析:$\because\boldsymbol{a}=(1,-2)$,$\boldsymbol{b}=(-3,4)$,

$\therefore\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(-5,6)$.

$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(-5,6)\cdot(3,2)=3\times(-5)+2\times6=-3$.

答案:C

3. 解析:如图,设AC、BD相交于点O,



则$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

$=\left(\frac{1}{2},1\right)+\left(-\frac{3}{2},1\right)=(-1,2)$.

又$\overrightarrow{AC}=(1,2)$,

$\therefore\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=(-1,2)\cdot(1,2)=-1+4=3$.

答案:3

4. 解析:$\because\overrightarrow{BC}=(6,9)$,

$\therefore\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=(2,3)$,$\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=(4,6)$.

又$\overrightarrow{AB}=(2,-4)$,

$\therefore\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=(4,-1)$,$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=(6,2)$,

$\therefore\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=4\times6+(-1)\times2=22$.

答案:22

5. 解析:$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{BD}$

$=\overrightarrow{AB}+\sqrt{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})$

$=(1-\sqrt{3})\overrightarrow{AB}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{AD}$.

$\because AB\perp AD$,$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$,

$\because|\overrightarrow{AD}|=1$,$\therefore\overrightarrow{AD}^2=1$,

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=[(1-\sqrt{3})\overrightarrow{AB}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{AD}]\cdot\overrightarrow{AD}$

$=(1-\sqrt{3})\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{AD}^2$

$=\sqrt{3}$.

答案:$\sqrt{3}$

6. 解析:$\because\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,

$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$

$=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=\frac{2}{3}\times9+\frac{1}{3}\times3\times3\times\cos60°$

$=\frac{15}{2}$.

答案：$\frac{15}{2}$

模板 3　求向量的坐标

1. 解析：$\because a\cdot b=2-x=1,\therefore x=1$.

答案：D

2. 解析：与$\overrightarrow{OA}$同向的单位向量 $a=\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}$，

又$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}=2$，

故 $a=\frac{1}{2}(1,\sqrt{3})=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，故选 A.

答案：A

3. 解析：与a共线的单位向量为$b=\pm\frac{a}{|a|}$，

又$|a|=\sqrt{12^2+5^2}=13$，

故 $b=\pm\left(\frac{12}{13},\frac{5}{13}\right)$，故选 D.

答案：D

4. 解析：由题意知点 A 的坐标为$(2\cos30°,2\sin30°)$，点 B 的坐标为$(\cos120°,\sin120°)$，

所以点 $A(\sqrt{3},1)$，$B\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

因为点 C 为 AB 的中点，

所以$\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2},1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{4},\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)$.

答案：A

5. 解析：$\because a=(2,-1),b=(-1,m)$，

$\therefore a+b=(1,m-1)$.

$\because(a+b)/\!/c,c=(-1,2)$，

$\therefore 2-(-1)\cdot(m-1)=0.\therefore m=-1$.

答案：-1

6. 解析：$\because|a+b|=1$，$a+b$ 平行于 x 轴，故 $a+b=(1,0)$ 或$(-1,0)$，$\therefore a=(1,0)-(2,-1)=(-1,1)$或 $a=(-1,0)-(2,-1)=(-3,1)$.

答案：$(-1,1)$或$(-3,1)$

模板 4　求参数的值

1. 解析：$a+\lambda b=(1,2)+\lambda(1,0)=(1+\lambda,2)$，而 $c=(3,4)$，由$(a+\lambda b)/\!/c$，得 $4(1+\lambda)-2\times3=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$.

答案：B

2. 解析：$\lambda a+b=(\lambda+4,-3\lambda-2)$，

因为 $\lambda a+b$ 与 b 垂直，

则 $4\lambda+16+6\lambda+4=0$，所以 $\lambda=-2$，故选 C.

答案：C

3. 解析：$\overrightarrow{AB}=(-7,-2)$，又点 C 在直线 AB 上，

故$\overrightarrow{AC}$与$\overrightarrow{AB}$共线，则有$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}(\lambda\neq0)$，

即$(2m-1-8,m+2+1)=\lambda(-7,-2)$，

即$\frac{2m-9}{-7}=\frac{m+3}{-2}$，得 $m=-13$，故选 C.

答案：C

4. 解析：$\because a=(2,-1),b=(-1,m),\therefore a+b=(1,m-1)$.

$\because(a+b)/\!/c,c=(-1,2),\therefore 2-(-1)\times(m-1)=0$.

$\therefore m=-1$.

答案：-1

5. 解析：$\because a=(1,2),b=(2,3)$，

$\therefore\lambda a+b=(\lambda,2\lambda)+(2,3)=(\lambda+2,2\lambda+3)$.

$\because$ 向量 $\lambda a+b$ 与向量 $c=(-4,-7)$共线，

$\therefore-7(\lambda+2)+4(2\lambda+3)=0.\therefore\lambda=2$.

答案：2

6. 解：(1)由题意知$\overrightarrow{AB}=(3,5)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,1)$，

则$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(2,6)$，$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=(4,4)$，

所以$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{10}$，$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=4\sqrt{2}$，

故所求的两条对角线的长分别为 $2\sqrt{10}$，$4\sqrt{2}$.

(2)由题意知：$\overrightarrow{OC}=(-2,-1)$，

$\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{OC}=(3+2t,5+t)$.

由$(\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{OC})\perp\overrightarrow{OC}$得$(\overrightarrow{AB}-t\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OC}=0$，

即$-2(3+2t)-(5+t)=0$，解得 $t=-\frac{11}{5}$.

模板 5　求两向量的夹角

1. 解析：$a\cdot c=a\cdot\left[a-\left(\frac{a\cdot a}{a\cdot b}\right)b\right]=a\cdot a-a\cdot b\left(\frac{a\cdot a}{a\cdot b}\right)$

$=a\cdot a-a\cdot a=0$,则 a 与 c 的夹角为$\frac{\pi}{2}$.

答案:D

2. 解析:$\because a\cdot(b-a)=a\cdot b-a^2=2$,$\therefore a\cdot b=2+a^2=3$.

$\therefore\cos\langle a,b\rangle=\frac{a\cdot b}{|a||b|}=\frac{3}{1\times6}=\frac{1}{2}$,

$\therefore a$ 与 b 的夹角为$\frac{\pi}{3}$.

答案:C

3. 解析:$\because(a+2b)\cdot(a-b)=|a|^2-2|b|^2+3a\cdot b=-2$,且 $|a|=|b|=2$,

$\therefore a\cdot b=2$,$\therefore\cos\langle a,b\rangle=\frac{a\cdot b}{|a||b|}=\frac{1}{2}$.

而$\langle a,b\rangle\in[0,\pi]$,$\therefore\langle a,b\rangle=\frac{\pi}{3}$.

答案:$\frac{\pi}{3}$

4. 解析:$(a+2b)\cdot(a+b)=|a|^2+2|b|^2+3a\cdot b=9+3a\cdot b=6$,$\therefore a\cdot b=-1$,

$\therefore\cos\langle a,b\rangle=\frac{a\cdot b}{|a||b|}=-\frac{1}{2}$.

而$\langle a,b\rangle\in[0,\pi]$,$\therefore\langle a,b\rangle=\frac{2\pi}{3}$.

答案:$\frac{2\pi}{3}$

5. 解析:由 $c\perp a$,得 $c\cdot a=0$,得 $a\cdot(a+b)=0$,

得 $a^2+a\cdot b=0$,得 $1+1\cdot2\cos\langle a,b\rangle=0$,

得 $\cos\langle a,b\rangle=-\frac{1}{2}$,得$\langle a,b\rangle=\frac{2\pi}{3}$.

答案:$\frac{2\pi}{3}$

6. 解析:$a+\lambda b=(1+\lambda,2+\lambda)$,

因为 $a+\lambda b$ 与 a 所成的角为钝角,

所以 $a\cdot(a+\lambda b)<0$,解得 $\lambda<-\frac{5}{3}$.

又 a 与 $a+\lambda b$ 不共线,

所以 $1\times(2+\lambda)\neq2(1+\lambda)$,

解得 $\lambda\neq0$,综上,$\lambda<-\frac{5}{3}$.

答案:$\lambda<-\frac{5}{3}$

模板 6 求向量运算的最值或取值范围

1. 解析:$\because a\cdot b=0$,且 a,b,c 均为单位向量,

$\therefore|a+b|=\sqrt{2}$,$|c|=1$.

$\therefore(a-c)\cdot(b-c)=a\cdot b-(a+b)\cdot c+c^2$.

设$a+b$与 c 的夹角为 θ,

则$(a-c)\cdot(b-c)=1-|a+b|\cdot|c|\cdot\cos\theta=1-\sqrt{2}\cos\theta$.

故$(a-c)\cdot(b-c)$的最小值为 $1-\sqrt{2}$.

答案:D

2. 解析:由$(a-c)\cdot(b-c)\leqslant0$,$a\cdot b=0$,

得 $a\cdot c+b\cdot c\geqslant c^2=1$,

$\therefore(a+b-c)^2=1+1+1-2(a\cdot c+b\cdot c)\leqslant1$.

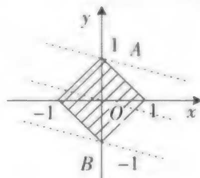
$\therefore|a+b-c|\leqslant1$.

答案:B

3. 解析:$\because a=(x+z,3)$,$b=(2,y-z)$,且 $a\perp b$.

$\therefore a\cdot b=2(x+z)+3(y-z)=0$,即 $2x+3y-z=0$.

又$|x|+|y|\leqslant1$ 表示的区域为图中阴影部分,



$\therefore$ 当 $z=2x+3y$ 过点 $B(0,-1)$时,$z_{min}=-3$;

当 $z=2x+3y$ 过点 $A(0,1)$时,$z_{max}=3$. $\therefore z\in[-3,3]$.

答案:D

4. 解析:当 $x=0$ 时,$\frac{|x|}{|b|}=0$,当 $x\neq0$ 时,

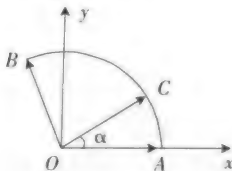
$$\left(\frac{|x|}{|b|}\right)^2=\frac{x^2}{x^2+y^2+\sqrt{3}xy}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2+\sqrt{3}\frac{y}{x}}=$$

$$\frac{1}{\left(\frac{y}{x}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\leqslant4,$$

所以$\frac{|x|}{|b|}$的最大值是 2,当且仅当$\frac{y}{x}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$时取到最大值.

答案:2

5. 解析:建立如图所示的坐标系,则 $A(1,0)$,$B(\cos120°$,$\sin120°)$,即 $B\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



设$\angle AOC=\alpha$,则$\overrightarrow{OC}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$.

$\because\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}=(x,0)+\left(-\frac{y}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)=(\cos\alpha,\sin\alpha)$.

$\therefore\begin{cases}x-\frac{y}{2}=\cos\alpha,\\ \frac{\sqrt{3}}{2}y=\sin\alpha.\end{cases}\therefore\begin{cases}x=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{3}}+\cos\alpha,\\ y=\frac{2\sin\alpha}{\sqrt{3}},\end{cases}$

$\therefore x+y=\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha=2\sin(\alpha+30°)$.

$\because 0°\leqslant\alpha\leqslant120°,\therefore 30°\leqslant\alpha+30°\leqslant150°$.

$\therefore x+y$有最大值2,当$\alpha=60°$时取得最大值2.

答案:2

6. 解:(1)设$\overrightarrow{OQ}=(x,y)$,$\because Q$在直线$OP$上,

$\therefore$向量$\overrightarrow{OQ}$与$\overrightarrow{OP}$共线.

又$\overrightarrow{OP}=(2,1)$,$\therefore x-2y=0$,$\therefore x=2y$,$\therefore\overrightarrow{OQ}=(2y,y)$.

又$\overrightarrow{QA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OQ}=(1-2y,7-y)$,

$\overrightarrow{QB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OQ}=(5-2y,1-y)$,

$\therefore\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=(1-2y)(5-2y)+(7-y)(1-y)$

$=5y^2-20y+12=5(y-2)^2-8$.

故当$y=2$时,$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}$有最小值$-8$,此时$\overrightarrow{OQ}=(4,2)$.

(2)由(1)知:$\overrightarrow{QA}=(-3,5)$,$\overrightarrow{QB}=(1,-1)$,

$\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}=-8$,$|\overrightarrow{QA}|=\sqrt{34}$,$|\overrightarrow{QB}|=\sqrt{2}$,

$\therefore\cos\angle AQB=\frac{\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QB}}{|\overrightarrow{QA}|\cdot|\overrightarrow{QB}|}=\frac{-8}{\sqrt{34}\times\sqrt{2}}$

$=-\frac{4\sqrt{17}}{17}$.

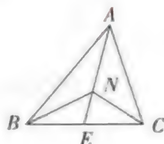
模板7　平面向量的实际应用

1. 解析:如图,$\because\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\mathbf{0}$.

$\therefore\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=-\overrightarrow{NA}$.

依向量加法的平行四边形法则,知$|\overrightarrow{NA}|=2|\overrightarrow{NE}|$,

故N为重心.



$\because\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$,

$\therefore(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC})\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$.

同理$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{PC}=0$,$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{PA}=0$,

$\therefore$点P为$\triangle ABC$的垂心.

由$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$,知$O$为$\triangle ABC$的外心.

答案:C

2. 解析:因为力$\boldsymbol{F}_3$是一个向量,由向量加法的平行四边形法则知$\boldsymbol{F}_3$的大小等于以$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$为邻边的平行四边形的对角线的长,

故$|\boldsymbol{F}_3|^2=|\boldsymbol{F}_1|^2+|\boldsymbol{F}_2|^2-2|\boldsymbol{F}_1|\cdot|\boldsymbol{F}_2|\cdot\cos120°=4+16+8=28$,

$\therefore|F_3|=2\sqrt{7}$.

答案:D

3. 解析:向量$\boldsymbol{a}$的坐标有以下6种情况:(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5),以原点为起点的向量中任取两个向量为邻边共可作平行四边形15个,即$n=15$. 以向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形的面积$S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\times2$

$=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sqrt{1-\cos^2\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle}$

$=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sqrt{1-\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}{(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|)^2}}$

$=\sqrt{(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|)^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2}$.

分别以$\boldsymbol{a}=(2,1),\boldsymbol{b}=(2,3)$;

$\boldsymbol{a}=(2,1),\boldsymbol{b}=(4,1)$;

$\boldsymbol{a}=(2,1),\boldsymbol{b}=(4,3)$;

$\boldsymbol{a}=(2,3),\boldsymbol{b}=(2,5)$;

$\boldsymbol{a}=(4,5),\boldsymbol{b}=(2,3)$为邻边的平行四边形的面积不超过4,故$m=5$,所以$\frac{m}{n}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

答案:B

4. 解析:设$M(x,y)$为所求轨迹上任意一点,设$A(a,0)$,$Q(0,b)(b>0)$,

则$\overrightarrow{PA}=(a,3)$,$\overrightarrow{AM}=(x-a,y)$,$\overrightarrow{MQ}=(-x,b-y)$.

由$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AM}=0$,得$a(x-a)+3y=0$.　①

由$\overrightarrow{AM}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{MQ}$,得

$(x-a,y)=-\frac{3}{2}(-x,b-y)=\left(\frac{3}{2}x,\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}b\right)$,

$\therefore\begin{cases}x-a=\frac{3}{2}x,\\ y=\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}b,\end{cases}\therefore\begin{cases}a=-\frac{x}{2},\\ b=\frac{y}{3}.\end{cases}$

$\because b>0$,$\therefore y>0$.

把$a=-\frac{x}{2}$代入①,得$-\frac{x}{2}\left(x+\frac{x}{2}\right)+3y=0$,整理得

$y=\frac{1}{4}x^2(x\neq 0)$.

答案：$y=\frac{1}{4}x^2(x\neq 0)$

第三章　三角恒等变换

模板1　三角函数的给值求值问题

1. 解析：$\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}(1-\sin 2\alpha)=\frac{1}{6}$.

答案：A

2. 解析：因为 $\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$,

所以 $2\theta\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, $\cos 2\theta<0$,

所以 $\cos 2\theta=-\sqrt{1-\sin^2 2\theta}=-\frac{1}{8}$,

又 $\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=-\frac{1}{8}$,

所以 $\sin^2\theta=\frac{9}{16}$, $\sin\theta=\frac{3}{4}$, 选 D.

答案：D

3. 解析：方法一：由题意得，$2k\pi+\pi<\alpha<2k\pi+\frac{3}{2}\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$. $\therefore 4k\pi+2\pi<2\alpha<4k\pi+3\pi$. $\therefore\sin 2\alpha>0$.

$\therefore\sin 2\alpha=\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=\frac{4}{5}$.

$\therefore\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=-\frac{4}{3}$.

$\therefore\tan\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan 2\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan 2\alpha}=\frac{1-\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{3}}$

$=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{7}{3}}=-\frac{1}{7}$.

方法二：由 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\frac{3}{5}$，得 $\cos^2\alpha=\frac{1}{5}$.

又 α 是第三象限角，$\therefore\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$,

$\therefore\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\therefore\sin^2\alpha=\frac{4}{5}$.

$\therefore\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$

$=\frac{2\times\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\times\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{\frac{1}{5}-\frac{4}{5}}=-\frac{4}{3}$.

$\therefore\tan\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)=\frac{1+\tan 2\alpha}{1-\tan 2\alpha}=\frac{1-\frac{4}{3}}{1+\frac{4}{3}}=-\frac{1}{7}$.

答案：$-\frac{1}{7}$

4. 解析：$\because\tan(\pi+2\alpha)=-\frac{4}{3}$,

$\therefore\tan 2\alpha=-\frac{4}{3}=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$,

$\therefore\tan\alpha=-\frac{1}{2}$ 或 $\tan\alpha=2$.

又 α 在第二象限，$\therefore\tan\alpha=-\frac{1}{2}$.

答案：$-\frac{1}{2}$

5. 解：(1) 由 $T=\frac{2\pi}{\omega}=10\pi$，得 $\omega=\frac{1}{5}$.

(2) 由 $\begin{cases}f\left(5\alpha+\frac{5}{3}\pi\right)=-\frac{6}{5},\\ f\left(5\beta-\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{16}{17},\end{cases}$

得 $\begin{cases}2\cos\left[\frac{1}{5}\left(5\alpha+\frac{5}{3}\pi\right)+\frac{\pi}{6}\right]=-\frac{6}{5},\\ 2\cos\left[\frac{1}{5}\left(5\beta-\frac{5}{6}\pi\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\frac{16}{17}.\end{cases}$

整理得 $\begin{cases}\sin\alpha=\frac{3}{5},\\ \cos\beta=\frac{8}{17}.\end{cases}$

$\because\alpha,\beta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

$\therefore\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\frac{4}{5}$, $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{15}{17}$.

$\therefore\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\times\frac{8}{17}-\frac{3}{5}\times\frac{15}{17}$

$=-\frac{13}{85}$.

模板2　由三角关系式求三角函数值

1. 解析：$\because\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\tan\alpha+1}{\tan\alpha-1}=\frac{1}{2}$,

$\therefore\tan\alpha=-3$, $\therefore\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{3}{4}$.

答案：B

2. 解析：$\because a\perp b$，$\therefore a\cdot b=0$，即 $-1+2\cos^2\theta=0$，

$\therefore \cos2\theta=2\cos^2\theta-1=0.$

答案：C

3. 解析：$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=(\sqrt{2})^2$，

即$1-\sin2\alpha=2$，$\therefore\sin2\alpha=-1$.

答案：A

4. 解析：$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，两边平方得

$\sin2\theta=-\frac{24}{25}$，$\pi\leqslant2\theta\leqslant\frac{3}{2}\pi$，

$\therefore\cos2\theta=-\sqrt{1-\left(-\frac{24}{25}\right)^2}=-\frac{7}{25}$.

答案：$-\frac{7}{25}$

5. 解：由题意，设△ABC 的角 B，C 的对边分别为 b，c，则$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=bc\cos A=3>0$，

$\therefore A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\cos A=3\sin A$.

又$\sin^2A+\cos^2A=1$，

$\therefore\sin A=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\cos A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

由$\cos B=\frac{3}{5}$，得$\sin B=\frac{4}{5}$，

$\therefore\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

故 $\cos C=\cos[\pi-(A+B)]=-\cos(A+B)=-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

6. 解：$\because\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，且 $2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha=0$，

$\therefore(2\sin\alpha-3\cos\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)=0$，

$\because\sin\alpha+\cos\alpha>0$，则 $2\sin\alpha=3\cos\alpha$.

又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，

$\therefore\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}$，$\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}$.

$$\therefore\frac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin2\alpha+\cos2\alpha+1}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}$$

$$=\frac{\sqrt{26}}{8}.$$

模板 3　三角函数式的化简求值

1. 解析：$4\cos50°-\tan40°=4\cos50°-\frac{\sin40°}{\cos40°}$

$$=\frac{4\sin40°\cdot\cos40°}{\cos40°}-\frac{\sin40°}{\cos40°}$$

$$=\frac{2\sin80°-\sin40°}{\cos40°}=\frac{2\cos10°-\sin40°}{\cos40°}$$

$$=\frac{2\cos10°-\sin(30°+10°)}{\cos40°}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}\cos10°-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin10°}{\cos40°}$$

$$=\frac{\sqrt{3}(\cos30°\cos10°-\sin30°\sin10°)}{\cos40°}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\cos40°}{\cos40°}=\sqrt{3}.$$

答案：C

2. 解析：$3\sin\alpha+\cos\alpha=0$，则 $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$，

$$\frac{1}{\cos^2\alpha+\sin2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$=\frac{\tan^2\alpha+1}{1+2\tan\alpha}=\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+1}{1+2\times\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{10}{3}.$$

答案：A

3. 解析：$\frac{\sin2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}=2\tan\alpha=2\times3=6.$

答案：D

4. 解析：由 $\sin\alpha=\frac{1}{2}+\cos\alpha$得 $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$，

$\therefore(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=1-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}$，

$\therefore2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{4}$.

$$\therefore\frac{\cos2\alpha}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)}$$

$=-\sqrt{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$，

而$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{7}{4}$，

又 $\because0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{2}$，

$\therefore$ 原式$=-\frac{\sqrt{14}}{2}$.

答案：$-\frac{\sqrt{14}}{2}$

5. 解析：由 $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2$，可得 $\tan x=\frac{1}{3}$，

$\frac{\tan x}{\tan 2x}=\frac{1-\tan^2 x}{2}=\frac{4}{9}$.

答案：$\frac{4}{9}$

6. 解：由题意，得

$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2},\\ \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{10},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\frac{3}{10},\\ \cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{5},\end{cases}$

$\therefore \frac{\tan\alpha}{\tan\beta}=\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta}=\frac{3}{10}\times 5=\frac{3}{2}$.

模板 4　含多个角的三角函数的相关问题

1. 解析：$f(x)=(1+\sqrt{3}\tan x)\cos x$

$=\cos x+\sqrt{3}\sin x$

$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$，

$\because 0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$，$\therefore f(x)_{max}=2$.

答案：B

2. 解析：$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x-\sqrt{2}(1-\cos 2x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x-\sqrt{2}$

$=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}$. $\therefore T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

答案：π

3. 解：(1)因为 $f(x)=4\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1$

$=4\cos x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)-1$

$=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x-1$

$=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x$

$=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，

所以 $f(x)$ 的最小正周期为 π.

(2)因为 $-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$，所以 $-\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{2\pi}{3}$.

于是，当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 2；当 $2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$，即 $x=-\frac{\pi}{6}$ 时，$f(x)$ 取得最小值 -1.

4. 解：(1) $f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)-\cos(\omega x+\varphi)$

$=2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\omega x+\varphi)-\frac{1}{2}\cos(\omega x+\varphi)\right]$

$=2\sin\left(\omega x+\varphi-\frac{\pi}{6}\right)$.

因为 $f(x)$ 为偶函数，

所以对 $x\in\mathbf{R}$，$f(-x)=f(x)$ 恒成立，

因此 $\sin\left(-\omega x+\varphi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\omega x+\varphi-\frac{\pi}{6}\right)$.

即 $-\sin\omega x\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\omega x\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)$

$=\sin\omega x\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\omega x\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)$，

整理得 $\sin\omega x\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)=0$.

因为 $\omega>0$，且 $x\in\mathbf{R}$，所以 $\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{6}\right)=0$.

又因为 $0<\varphi<\pi$，故 $\varphi-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$.

所以 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\omega x$.

由题意得 $\frac{2\pi}{\omega}=2\cdot\frac{\pi}{2}$，所以 $\omega=2$.

故 $f(x)=2\cos 2x$.

因此 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$.

(2)将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后，得到 $f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，再将所得图象上各点的横坐标伸长到原来的 4 倍，纵坐标不变，得到 $f\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象.

所以 $g(x)=f\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left[2\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$=2\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$.

当 $2k\pi\leqslant\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$，

即 $4k\pi+\frac{2}{3}\pi\leqslant x\leqslant 4k\pi+\frac{8\pi}{3}$ $(k\in\mathbf{Z})$时，$g(x)$单调递减.

因此 $g(x)$的单调递减区间为

$\left[4k\pi+\frac{2}{3}\pi,4k\pi+\frac{8}{3}\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

5. 解：(1)$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin^2x$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(\cos2x\cos\frac{\pi}{4}-\sin2x\sin\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1-\cos2x}{2}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin2x$,

$\therefore f(x)$的最小正周期为π.

(2)当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，$g(x)=\frac{1}{2}-f(x)=\frac{1}{2}\sin2x$,

当 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$时，$x+\frac{\pi}{2}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

$g(x)=g\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}\sin2x$,

当 $x\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$时，$x+\pi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$,

$g(x)=g(x+\pi)=\frac{1}{2}\sin2(x+\pi)=\frac{1}{2}\sin2x$,

综上所述，$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\sin2x,x\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right),\\-\frac{1}{2}\sin2x,x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right].\end{cases}$

6. 解：(1)因为$f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

$=\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)$

$=\frac{1}{4}\cos^2x-\frac{3}{4}\sin^2x$

$=\frac{1+\cos2x}{8}-\frac{3-3\cos2x}{8}$

$=\frac{1}{2}\cos2x-\frac{1}{4}$,

所以$f(x)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$.

(2)$h(x)=f(x)-g(x)$

$=\frac{1}{2}\cos2x-\frac{1}{2}\sin2x$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$,

当 $2x+\frac{\pi}{4}=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，$h(x)$取得最大值$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$h(x)$取得最大值时，对应的 x 的集合为

$\left\{x\,\middle|\,x=k\pi-\frac{\pi}{8},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

必修 5

第一章 解三角形

模板 1 运用正、余弦定理求边或角

1. 解析：由正弦定理得$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}\Rightarrow AC=\frac{BC\cdot\sin B}{\sin A}$

$=\frac{3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$.

答案：B

2. 解析：由 $6\sin A=4\sin B=3\sin C$,

知$\frac{\sin A}{2}=\frac{\sin B}{3}=\frac{\sin C}{4}$,

$\therefore$ 由正弦定理不妨设 $a=2k,b=3k,c=4k(k>0)$,

$\therefore\cos B=\frac{4k^2+16k^2-9k^2}{2\times2k\times4k}=\frac{11}{16}$.

答案：D

3. 解析：由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=1+4-2\times2\times\frac{1}{4}=4$，所以 $c=2$. 所以 $b=c,B=C$，即 $\sin B=\sin C=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

答案：$\frac{\sqrt{15}}{4}$

4. 解析：由已知得 $a^2+b^2-c^2=-ab$，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$，$\therefore C=\frac{2\pi}{3}$.

答案：$\frac{2\pi}{3}$

5. 解析：由正弦定理知$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}\Rightarrow\sin B=\frac{b\sin A}{a}$,

由已知 $a=3,b=\sqrt{3}$，$\angle A=\frac{\pi}{3}$，知 $\sin B=\frac{1}{2}$，又 $\because a>b$，$\therefore\angle A>\angle B$，$\therefore\angle B=\frac{\pi}{6}$，$\therefore\angle C=\frac{\pi}{2}$.

答案：$\frac{\pi}{2}$

6. 解析：由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=4+12-2\times2\times2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4$，$\therefore b=2$.

答案：2

模板 2 已知边角关系解三角形

1. 解析：由正弦定理得：$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，

$\therefore 2R\sin A\cos A=2R\sin B\sin B$，即 $\sin A\cos A=\sin^2B$，则 $\sin A\cos A+\cos^2B=\sin^2B+\cos^2B=1$，故选 D.

答案：D

2. 解析：$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=6\cos C\Rightarrow 6ab\cos C=a^2+b^2$，

$6ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=a^2+b^2$，$a^2+b^2=\frac{3c^2}{2}$，

$\frac{\tan C}{\tan A}+\frac{\tan C}{\tan B}=\frac{\sin C}{\cos C}\cdot\frac{\cos B\sin A+\sin B\cos A}{\sin A\sin B}$

$=\frac{\sin C}{\cos C}\cdot\frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B}=\frac{1}{\cos C}\cdot\frac{\sin^2C}{\sin A\sin B}$.

由正弦定理，得上式 $=\frac{1}{\cos C}\cdot\frac{c^2}{ab}=\frac{c^2}{\frac{1}{6}(a^2+b^2)}=$

$\frac{c^2}{\frac{1}{6}\cdot\frac{3c^2}{2}}=4$.

答案：4

3. 解：(1)在△ABC 中，由 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，可得 $b\sin A=a\sin B$，

又由 $b\sin A=3c\sin B$，可得 $a=3c$，又 $a=3$，故 $c=1$.

由 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，$\cos B=\frac{2}{3}$，可得 $b=\sqrt{6}$.

(2)由 $\cos B=\frac{2}{3}$，得 $\sin B=\frac{\sqrt{5}}{3}$，进而得 $\cos 2B=2\cos^2B-1=-\frac{1}{9}$，$\sin 2B=2\sin B\cos B=\frac{4\sqrt{5}}{9}$.

所以 $\sin\left(2B-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2B\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2B\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{4\sqrt{5}+\sqrt{3}}{18}$.

模板 3 判断三角形的形状

1. 解析：△ABC 中，$\sin A:\sin B:\sin C=5:11:13$，

$\therefore a:b:c=5:11:13$，

故令 $a=5k$，$b=11k$，$c=13k(k>0)$，

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{25k^2+121k^2-169k^2}{2\times5\times11k^2}$

$=-\frac{23}{110}<0$，

又 $\because C\in(0,\pi)$，$\therefore C\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，

$\therefore$△ABC 为钝角三角形，故选 C.

答案：C

2. 解析：因为 $2\cos B\sin A=\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，所以 $\sin A\cos B-\cos A\sin B=0$，即 $\sin(A-B)=0$. 故 $A=B$. 所以△ABC 是等腰三角形.

答案：C

3. 解析：因为 $a=2b\cos C$，所以由余弦定理，得 $a=2b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，整理得 $b^2=c^2$，则此三角形一定是等腰三角形.

答案：C

4. 解析：由 $0<\tan A\cdot\tan B<1$，可知 $\tan A>0$，$\tan B>0$，即 A，B 为锐角，$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}>0$，即 $\tan(\pi-C)=-\tan C>0$，所以 $\tan C<0$，所以 C 为钝角，所以△ABC 为钝角三角形. 故选 B.

答案：B

5. 解：方法一：将已知等式变形为 $b^2(1-\cos^2C)+c^2(1-\cos^2B)=2bc\cos B\cdot\cos C$，

$\therefore b^2+c^2-b^2\cdot\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2-c^2\cdot\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)^2$

$=2bc\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

$\therefore b^2+c^2=\frac{[(a^2+b^2-c^2)+(a^2+c^2-b^2)]^2}{4a^2}=\frac{4a^4}{4a^2}=a^2$，

$\therefore A=90°$，$\therefore$△ABC 为直角三角形.

方法二：由已知得 $4R^2\cdot\sin^2B\cdot\sin^2C+4R^2\cdot\sin^2C\cdot\sin^2B=8R^2\cdot\sin B\cdot\sin C\cdot\cos B\cdot\cos C$，

又 $\sin B\cdot\sin C\neq0$，$\therefore\sin B\cdot\sin C=\cos B\cdot\cos C$，

即 $\cos(B+C)=0$.

又 $0°<B+C<180°$，

$\therefore B+C=90°$，$\therefore A=90°$，

故△ABC 为直角三角形.

6. 解：方法一：(利用边的关系来判断)

由正弦定理，得 $\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{c}{b}$，

$\because 2\cos A\sin B=\sin C$，$\therefore\cos A=\frac{\sin C}{2\sin B}=\frac{c}{2b}$.

又 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，

$\therefore\frac{c}{2b}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，即 $c^2=b^2+c^2-a^2$，$\therefore b^2=a^2$，$\therefore a=b$.

$\because(a+b+c)(a+b-c)=3ab$，

$\therefore(a+b)^2-c^2=3ab$.

由 $a=b$ 得 $4b^2-c^2=3b^2$，$\therefore b^2=c^2$，$\therefore b=c$.

$\therefore a=b=c$，$\therefore\triangle ABC$ 为等边三角形.

方法二:(利用角的关系来判断)

$\because A+B+C=180°$，$\therefore\sin C=\sin(A+B)$.

又 $\because 2\cos A\sin B=\sin C$，

$\therefore 2\cos A\sin B=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

$\therefore\sin(A-B)=0$.

又 A 与 B 均为$\triangle ABC$ 的内角，

$\therefore A=B$.

由 $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$，

得 $(a+b)^2-c^2=3ab$，$a^2+b^2+2ab-c^2=3ab$.

由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$，

得 $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$，

$\therefore 2ab\cos C+2ab=3ab$，解得 $\cos C=\frac{1}{2}$，$\therefore C=60°$，

$\therefore\triangle ABC$ 为等边三角形.

模板 4　三角形中的最值问题

1. 解析:$\because\triangle ABC$ 为锐角三角形，且 $A=2B$，

$\therefore\begin{cases}0<2B<\frac{\pi}{2},\\0<\pi-3B<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ $\therefore\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{4}$.

$\because A=2B$，$\therefore\sin A=\sin 2B=2\sin B\cos B$，

$\therefore\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}=2\cos B\in(\sqrt{2},\sqrt{3})$. 故选 D.

答案:D

2. 解:(1)在$\triangle ABC$ 中，由 $b^2+c^2-a^2=bc$ 及余弦定理，

得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，而 $0<A<\pi$，则 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2)由 $a=\sqrt{3}$，$A=\frac{\pi}{3}$ 及正弦定理，得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$

$=\frac{a}{\sin A}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$，而 $B=x$，$C=\frac{2\pi}{3}-x$，

则 $b=2\sin x$，$c=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\left(0<x<\frac{2\pi}{3}\right)$，

于是 $y=a+b+c=\sqrt{3}+2\sin x+2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$

$=2\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}$，

由 $0<x<\frac{2\pi}{3}$ 得 $\frac{\pi}{6}<x+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，

故当 $x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{3}$ 时，$y_{\max}=3\sqrt{3}$.

3. 解:(1)$\because\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，$\therefore c(c-a)=(b-a)(a+b)$，

$c^2-ac=b^2-a^2$，$\therefore\frac{a^2+c^2-b^2}{ac}=1$，

由余弦定理，得 $\cos B=\frac{1}{2}$，$\because B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$.

(2)$\because A+B+C=\pi$，$\therefore A+C=\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore\sin A+\sin C=\sin A+\sin\left(\frac{2\pi}{3}-A\right)$

$=\sin A+\sin\frac{2\pi}{3}\cos A-\cos\frac{2\pi}{3}\sin A$

$=\frac{3}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A=\sqrt{3}\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$.

$\because 0<A<\frac{2\pi}{3}$，$\therefore\frac{\pi}{6}<A+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，

$\therefore\frac{1}{2}<\sin\left(A+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，

$\therefore\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin A+\sin C\leqslant\sqrt{3}$.

4. 解:(1)由正弦定理得 $a=\frac{c\sin A}{\sin C}$，$b=\frac{c\sin B}{\sin C}$，

$a\cos B-b\cos A=\left(\frac{\sin A}{\sin C}\cdot\cos B-\frac{\sin B}{\sin C}\cdot\cos A\right)c$

$=\frac{\sin A\cos B-\sin B\cos A}{\sin(A+B)}\cdot c$

$=\frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}\cdot c$

$=\frac{(\tan A\cot B-1)c}{\tan A\cot B+1}$，

依题设得 $\frac{(\tan A\cot B-1)c}{\tan A\cot B+1}=\frac{3}{5}c$. 解得 $\tan A\cot B=4$.

(2)由(1)得 $\tan A=4\tan B$，故 A，B 都是锐角，

于是 $\tan B>0$.

$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}=\frac{3\tan B}{1+4\tan^2 B}$

$=\frac{3}{\frac{1}{\tan B}+4\tan B}\leqslant\frac{3}{4}$，

且当 $\frac{1}{\tan B}=4\tan B$，即 $\tan B=\frac{1}{2}$ 时，上式取等号.

因此 $\tan(A-B)$的最大值为 $\frac{3}{4}$.

模板 5　与三角形面积有关的计算

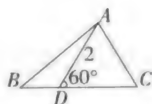
1. 解析:由于$\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$，$BC=2$，$C=60°$，

所以$\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times2\times AC\times\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$AC=2$，所以$\triangle ABC$为正三角形，所以$AB=2$.

答案：2

2. 解析：如图，由$S_{\triangle ADC}=3-\sqrt{3}$和

$S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AD\cdot DC\sin60°$，得



$3-\sqrt{3}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot DC\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore DC=2(\sqrt{3}-1)$.

$\therefore BD=\frac{1}{2}DC=\sqrt{3}-1, BC=3(\sqrt{3}-1)$.

在$\triangle ABD$中，$AB^2=BD^2+AD^2-2BD\cdot AD\cos120°=(\sqrt{3}-1)^2+4-2(\sqrt{3}-1)\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=6$，

$\therefore AB=\sqrt{6}$.

在$\triangle ADC$中，$AC^2=AD^2+DC^2-2AD\cdot DC\cos60°$

$=2^2+[2(\sqrt{3}-1)]^2-2\times2\times2(\sqrt{3}-1)\times\frac{1}{2}$

$=24-12\sqrt{3}$，

$\therefore AC=\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)$.

在$\triangle ABC$中，$\cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$

$=\frac{6+24-12\sqrt{3}-9(\sqrt{3}-1)^2}{2\times\sqrt{6}\times\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}=\frac{1}{2}$，

$\therefore\angle BAC=\frac{\pi}{3}$.

答案：$\frac{\pi}{3}$

3. 解：(1)因为$a\cos C+\sqrt{3}a\sin C-b-c=0$，由正弦定理得$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin B+\sin C$，

即$\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C=\sin(A+C)+\sin C$，

所以$\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，$\sin(A-30°)=\frac{1}{2}$，

即$A-30°=30°$，解得$A=60°$.

(2)由$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\sqrt{3}$，得$bc=4$.

由$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$得$b^2+c^2=8$.

联立解得$b=c=2$.

4. 解：(1)由正弦定理，设$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$，

则$\frac{2c-a}{b}=\frac{2k\sin C-k\sin A}{k\sin B}=\frac{2\sin C-\sin A}{\sin B}$，

所以$\frac{\cos A-2\cos C}{\cos B}=\frac{2\sin C-\sin A}{\sin B}$.

即$(\cos A-2\cos C)\sin B=(2\sin C-\sin A)\cos B$，

化简可得$\sin(A+B)=2\sin(B+C)$.

又$A+B+C=\pi$，所以$\sin C=2\sin A$.因此$\frac{\sin C}{\sin A}=2$.

(2)由$\frac{\sin C}{\sin A}=2$得$c=2a$.

由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$及$\cos B=\frac{1}{4}$，$b=2$，

得$4=a^2+4a^2-4a^2\times\frac{1}{4}$. 解得$a=1$. 从而$c=2$.

又因为$\cos B=\frac{1}{4}$，且$0<B<\pi$，所以$\sin B=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

因此$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times1\times2\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

模板6　解三角形的实际应用

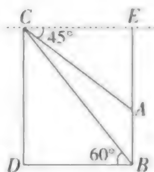
1. 解：由$AB=\frac{H}{\tan\alpha}$，$BD=\frac{h}{\tan\beta}$，$AD=\frac{H}{\tan\beta}$及$AB+BD=AD$，得$\frac{H}{\tan\alpha}+\frac{h}{\tan\beta}=\frac{H}{\tan\beta}$，

解得$H=\frac{h\tan\alpha}{\tan\alpha-\tan\beta}=\frac{4\times1.24}{1.24-1.20}=124$.

因此，算出的电视塔的高度H是124m.

2. 解：如图，设$CD=x$m，

则$AE=(x-20)$m，



$\tan60°=\frac{CD}{BD}$，

$\therefore BD=\frac{CD}{\tan60°}=\frac{x}{\sqrt{3}}$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}x$(m).

在$\triangle AEC$中，$x-20=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

解得$x=10(3+\sqrt{3})$ m.

故山高CD为$10(3+\sqrt{3})$ m.

3. 解：由已知，$CD=a$，$\angle ACD=60°$，$\angle ADC=60°$，

$\therefore AC=a$.

$\because\angle BCD=30°$，$\angle BDC=105°$，$\therefore\angle CBD=45°$.

在$\triangle BCD$中，由正弦定理可得$BC=\frac{a\sin105°}{\sin45°}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}a$.

在$\triangle ABC$中，易知$\angle ACB=30°$，由余弦定理，得

$AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos30^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

4. 解：在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=180^\circ-75^\circ+32^\circ=137^\circ$，根据余弦定理，

$AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\angle ABC}$

$=\sqrt{67.5^2+54.0^2-2\times67.5\times54.0\times\cos137^\circ}$

≈113.15(n mile)，

根据正弦定理，$\frac{BC}{\sin\angle CAB}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}$，

$\sin\angle CAB=\frac{BC\sin\angle ABC}{AC}=\frac{54.0\sin137^\circ}{113.15}\approx0.325\,5$，

所以$\angle CAB\approx19.0^\circ$，$75^\circ-\angle CAB=56.0^\circ$.

答：此船应该沿北偏东56.0°的方向航行，需要航行113.15n mile.

第二章 数 列

模板1 观察归纳法求数列的通项公式

1. 解析：观察给出的几项易知：分母是奇数1，3，5，7，…，分子是项的平方，且整个分数，奇数项是负的，偶数项是正的，故所求的一个通项公式为$a_n=(-1)^n\frac{n^2}{2n-1}$.

答案：A

2. 解析：观察给出的几项易知选项C正确．也可将$n=1,2,3,4$代入各选项一一验证.

答案：C

3. 解析：各图中的“短线”条数依次为6，6+5，6+5+5，…，若视6为5+1，则上述数列为1+5，1+5+5，1+5+5+5，…，于是第n个图有化学键$a_n=5n+1$个.

答案：D

4. 解析：观察图中5个图形点的个数分别为：1；1×2+1；2×3+1；3×4+1；4×5+1，故第n个图中点的个数为$(n-1)n+1=n^2-n+1$.

答案：n^2-n+1

5. 解析：第1个有白色地面砖6块，第2个有10块，第3个有14块，……，后一个总比前一个多4块，第n个有$4n+2$块.

答案：$4n+2$

模板2 数列的单调性的应用

1. 解析：$a_n=\frac{n}{n^2+90}=\frac{1}{n+\frac{90}{n}}$，

构造函数$f(n)=n+\frac{90}{n}$，$n\in\mathbf{N}^*$，易知当$n=9$或10时，$f(n)$最小，$\frac{1}{f(n)}$最大，即a_n最大，$(a_n)_{\max}=a_9=a_{10}=\frac{1}{19}$.

答案：C

2. 解析：由$a_{n+1}<a_n$，得$a_{n+1}-a_n=\frac{4}{9-2n}-\frac{4}{11-2n}=\frac{8}{(9-2n)(11-2n)}<0$，解得$\frac{9}{2}<n<\frac{11}{2}$，又$n\in\mathbf{N}^*$，

$\therefore n=5$.

答案：C

3. 解析：由$a_n=-2\left(n-\frac{29}{4}\right)^2+\frac{865}{8}$，结合二次函数的单调性知$n=7$时，$a_n$最大，此时$a_7=108$.

答案：108

4. 解析：方法一：因为$\{a_n\}$是递增数列，所以对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，都有$a_{n+1}>a_n$，即$(n+1)^2+\lambda(n+1)>n^2+\lambda n$，整理，得$2n+1+\lambda>0$，即$\lambda>-(2n+1)$.(*)

因为$n\geqslant1$，所以$-(2n+1)\leqslant-3$，要使不等式(*)恒成立，只需$\lambda>-3$.

方法二：设$f(n)=a_n=n^2+\lambda n$，其图象的对称轴为直线$n=-\frac{\lambda}{2}$，要使数列$\{a_n\}$为递增数列，只需使定义在正整数上的函数$f(n)$为增函数，故只需满足$f(1)<f(2)$，即$\lambda>-3$.

答案：$(-3,+\infty)$

5. 解析：$\because$数列$\{a_n\}$是递增数列，又$a_n=f(n)(n\in\mathbf{N}^*)$，

$\therefore\begin{cases}3-a>0,\\a>1,\\f(8)>f(7)\end{cases}\Rightarrow2<a<3$.

答案：$(2,3)$

模板3 由递推公式求通项公式

1. 解析：由$a_{n+1}-a_n=n$，得$a_n-a_{n-1}=n-1$，$a_{n-1}-a_{n-2}=n-2$，…，$a_2-a_1=1$.

以上等式累加，得$a_n-a_1=n-1+n-2+\cdots+1$，

即$a_n=1+1+2+\cdots+n-1=1+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-n+2}{2}$.

答案：$\frac{n^2-n+2}{2}$

2. 解：由$a_{n+1}=a_n+2^{n-1}$，得$a_{n+1}-a_n=2^{n-1}$，所以$a_2-a_1=1$，$a_3-a_2=2$，$a_4-a_3=2^2$，$a_5-a_4=2^3$，…，$a_n-a_{n-1}=2^{n-2}(n\geqslant2)$，

将以上各式左右两端分别相加，得 $a_n-a_1=1+2+2^2+\cdots+2^{n-2}=2^{n-1}-1$，所以 $a_n=2^{n-1}(n\geqslant 2)$. 又 $a_1=1$ 适合上式，故 $a_n=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

3. 解：$\because a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}a_n$，$\therefore \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n+1}{n}$.

$\therefore n\geqslant 2$ 时，$a_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\dfrac{n}{n-1}\cdot\dfrac{n-1}{n-2}\cdot\dfrac{n-2}{n-3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{1}\cdot 2=2n$.

$\therefore n\geqslant 2$ 时，$a_n=2n$. 又 $a_1=2$ 也满足 $a_n=2n$，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n$.

4. 解：$\because \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2^n$，$\therefore \dfrac{a_2}{a_1}=2$，$\dfrac{a_3}{a_2}=2^2$，$\dfrac{a_4}{a_3}=2^3$，$\cdots$，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=2^{n-1}$，将上述各式相乘，可得 $\dfrac{a_2}{a_1}\cdot\dfrac{a_3}{a_2}\cdot\dfrac{a_4}{a_3}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=2\times2^2\times2^3\times\cdots\times2^{n-1}$.

又 $\because a_1=1$，$\therefore a_n=2^{1+2+3+\cdots+(n-1)}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

5. 解：由 $a_{n+1}-a_n=3^n-n$ 得 $a_n-a_{n-1}=3^{n-1}-(n-1)$，

$a_{n-1}-a_{n-2}=3^{n-2}-(n-2)$，

$\cdots$

$a_3-a_2=3^2-2$，

$a_2-a_1=3-1$.

当 $n\geqslant 2$ 时，以上 $(n-1)$ 个等式两端分别相加，得 $(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)=3^{n-1}+3^{n-2}+\cdots+3-[(n-1)+(n-2)+\cdots+1]$，

即 $a_n-a_1=\dfrac{3(1-3^{n-1})}{1-3}-\dfrac{n(n-1)}{2}$.

又 $\because a_1=1$，$\therefore a_n=\dfrac{1}{2}\times3^n-\dfrac{n(n-1)}{2}-\dfrac{1}{2}$.

显然 $a_1=1$ 也适合上式，

$\therefore \{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\dfrac{1}{2}\times3^n-\dfrac{n(n-1)}{2}-\dfrac{1}{2}$.

模板 4　由前 n 项和求通项公式

1. 解：(1) 由 $S_n=kn^2+n$，得 $a_1=S_1=k+1$，

$a_n=S_n-S_{n-1}=2kn-k+1(n\geqslant 2)$.

$a_1=k+1$ 也满足上式，所以 $a_n=2kn-k+1$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(2) 由 a_m,a_{2m},a_{4m} 成等比数列，得 $(4mk-k+1)^2=(2km-k+1)(8km-k+1)$，将上式化简，得 $2km(k-1)=0$，因为 $m\in\mathbf{N}^*$，所以 $m\neq0$，故 $k=0$ 或 $k=1$.

2. 解：当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=3+1=4$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^n+1)-(3^{n-1}+1)=2\cdot3^{n-1}$.

当 $n=1$ 时，$2\times3^{1-1}=2\neq a_1$，

所以 $a_n=\begin{cases}4, n=1,\\ 2\cdot3^{n-1}, n\geqslant 2.\end{cases}$

3. 解：(1) 当 $n\geqslant 2$ 时，

$a_n=S_n-S_{n-1}=(-1)^{n+1}n-(-1)^n(n-1)=(-1)^n(1-2n)$，

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=(-1)^2\times1=1=(-1)^1\times(1-2)$，即满足上述通项公式.

$\therefore a_n=(-1)^n(1-2n)$.

(2) 当 $n\geqslant 2$ 时，

$a_n=S_n-S_{n-1}=3+2^n-(3+2^{n-1})=2^{n-1}$，

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=3+2^1=5$，当 $n=1$ 时，$2^{1-1}=1\neq a_1$，

$\therefore a_n=\begin{cases}5, & n=1,\\ 2^{n-1}, & n\geqslant 2.\end{cases}$

4. 解：将 $a_n+\dfrac{1}{a_n}=2S_n$ 变形为 $a_n^2+1=2S_na_n$.

将 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$ 代入并化简，得 $S_n^2-S_{n-1}^2=1$.

由已知可求得 $S_1=a_1=1$.

$\therefore \{S_n^2\}$ 是等差数列，公差为 1，首项为 1.

$\therefore S_n^2=1+(n-1)\cdot1=n$.

$\because a_n>0$，$\therefore S_n>0$，从而 $S_n=\sqrt{n}$.

$\therefore n\geqslant 2$ 时，$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.

而 $n=1$ 时，$a_1=1$ 也适合上式.

$\therefore \{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.

5. 解：因为 $S_n=-\dfrac{1}{2}n^2+kn=-\dfrac{1}{2}(n-k)^2+\dfrac{1}{2}k^2$，其中 k 是常数，且 $k\in\mathbf{N}^*$，所以当 $n=k$ 时，S_n 取最大值 $\dfrac{1}{2}k^2$，故 $\dfrac{1}{2}k^2=8$，$k^2=16$，因此 $k=4$，

从而 $S_n=-\dfrac{1}{2}n^2+4n$.

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=-\dfrac{1}{2}+4=\dfrac{7}{2}$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(-\dfrac{1}{2}n^2+4n\right)-\left[-\dfrac{1}{2}(n-1)^2+4(n-1)\right]=\dfrac{9}{2}-n$.

当 $n=1$ 时，$\dfrac{9}{2}-1=\dfrac{7}{2}=a_1$. 所以 $a_n=\dfrac{9}{2}-n$.

模板 5　等差或等比数列的给值求值问题

1. 解析：$d=a_3-a_2=4-2=2$.

$a_{10}=a_2+(10-2)d=2+8\times2=18$.

答案：D

2. 解析：由 $x,3x+3,6x+6$ 成等比数列，知 $(3x+3)^2=$

$x\cdot(6x+6)$，解得 $x=-3$ 或 $x=-1$（舍去）. 所以此等比数列的前三项为 $-3,-6,-12$. 故第四项为 -24，选 A.

答案：A

3. 解析：$\because\{a_n\}$ 是等比数列，$\therefore a_{2\,010}=a_{2\,007}\cdot q^3=8a_{2\,007}$，

$\therefore q^3=8$，$\therefore q=2$，故选 A.

答案：A

4. 解析：设公差为 d，$\because 2,a,b,c,9$ 成等差数列，

$\therefore 9-2=4d$，$\therefore d=\frac{7}{4}$.

又 $\because c-a=2d$，$\therefore c-a=2\times\frac{7}{4}=\frac{7}{2}$.

答案：$\frac{7}{2}$

模板 6　等差或等比数列的判定

1. 证明：当 $n=1$ 时，$a_1=S_1$.

由 $a_n+S_n=n$，　①

得 $a_1+S_1=1$，即 $2a_1=1$，解得 $a_1=\frac{1}{2}$.

又 $a_{n+1}+S_{n+1}=n+1$，　②

②-①得 $a_{n+1}-a_n+(S_{n+1}-S_n)=1$，即 $2a_{n+1}-a_n=1$，　③

因为 $c_n=a_n-1$，所以 $a_n=c_n+1$，$a_{n+1}=c_{n+1}+1$，代入③式，得 $2(c_{n+1}+1)-(c_n+1)=1$，整理得 $2c_{n+1}=c_n$，故 $\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{1}{2}$（常数）. 所以数列 $\{c_n\}$ 是一个首项 $c_1=a_1-1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列.

2. 证明：因为 $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ 成等差数列，

所以 $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$，即 $2ac=b(a+c)$.

又 $\frac{b+c-a}{a}+\frac{a+b-c}{c}=\frac{c(b+c-a)+a(a+b-c)}{ac}$

$=\frac{(a^2+c^2)+b(a+c)}{ac}-2=\frac{(a^2+c^2)+2ac}{ac}-2=\frac{(a+c)^2}{ac}-2$

$=\frac{(a+c)^2}{\frac{b(a+c)}{2}}-2=\frac{2(a+c-b)}{b}$，

所以 $\frac{b+c-a}{a},\frac{a+c-b}{b},\frac{a+b-c}{c}$ 也成等差数列.

3. 解：$\because a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$，$a_n+2S_nS_{n-1}=0$，

$\therefore S_n-S_{n-1}+2S_nS_{n-1}=0(n\geqslant 2)$，

$\therefore \frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=2(n\geqslant 2)$，又 $S_1=a_1=\frac{1}{2}$，

$\therefore\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是以 2 为首项，2 为公差的等差数列.

$\therefore \frac{1}{S_n}=2+(n-1)\times 2=2n$，故 $S_n=\frac{1}{2n}$.

$\therefore$ 当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2(n-1)}=\frac{-1}{2n(n-1)}$，

$\therefore a_{n+1}=\frac{-1}{2n(n+1)}$，而 $a_{n+1}-a_n=\frac{-1}{2n(n+1)}-\frac{-1}{2n(n-1)}$

$=\frac{-1}{2n}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right)=\frac{1}{n(n-1)(n+1)}$.

$\therefore$ 当 $n\geqslant 2$ 时，$a_{n+1}-a_n$ 的值不是一个与 n 无关的常数，故数列 $\{a_n\}$ 不是一个等差数列.

综上可知，$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ 是等差数列，$\{a_n\}$ 不是等差数列.

4. 解：(1) 证明：假设存在一个实数 λ，使 $\{a_n\}$ 是等比数列，则有 $a_2^2=a_1a_3$，即 $\left(\frac{2}{3}\lambda-3\right)^2=\lambda\left(\frac{4}{9}\lambda-4\right)$，故 $\frac{4}{9}\lambda^2-4\lambda+9=\frac{4}{9}\lambda^2-4\lambda$，即 $9=0$，这与事实相矛盾.

$\therefore$ 对任意实数 λ，数列 $\{a_n\}$ 都不是等比数列.

(2) $\because b_{n+1}=(-1)^{n+1}[a_{n+1}-3(n+1)+21]$

$=(-1)^{n+1}\left(\frac{2}{3}a_n-2n+14\right)$

$=-\frac{2}{3}(-1)^n(a_n-3n+21)=-\frac{2}{3}b_n$，

又 $b_1=-(\lambda+18)$，$\therefore$ 当 $\lambda=-18$ 时，$b_1=0(n\in\mathbf{N}^*)$，此时 $\{b_n\}$ 不是等比数列；当 $\lambda\neq-18$ 时，$b_1=-(\lambda+18)\neq 0$，$b_n\neq 0$，$\therefore \frac{b_{n+1}}{b_n}=-\frac{2}{3}(n\in\mathbf{N}^*)$. 故当 $\lambda\neq-18$ 时，数列 $\{b_n\}$ 是以 $-(\lambda+18)$ 为首项，$-\frac{2}{3}$ 为公比的等比数列.

模板 7　由等差或等比数列性质求值

1. 解析：由等差数列的性质知 $a_1+a_5=2a_3$，即 $a_3=\frac{a_1+a_5}{2}=5$. 又 $\because a_4=7$，$\therefore d=a_4-a_3=2$. 故选 B.

答案：B

2. 解析：由 $a_3a_{11}=16$ 得 $a_7^2=16$，解得 $a_7=4$.

$\therefore a_{16}=a_7\times q^9=32$，$\therefore \log_2 a_{16}=5$.

答案:B

3. 解析:由等差数列的性质知 $a_1+a_9=2a_5$,

即 $a_5=\frac{a_1+a_9}{2}=5$.

答案:A

4. 解析:$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7$

$=(a_1+a_7)+(a_2+a_6)+(a_3+a_5)+a_4$

$=2a_4+2a_4+2a_4+a_4=7a_4$,

而 $a_3+a_4+a_5=2a_4+a_4=3a_4=12$,$\therefore a_4=4$.

故原式$=7\times4=28$,故选 C.

答案:C

5. 解析:$a_m=a_1a_2a_3a_4a_5$

$=(a_3)^5=(a_1q^2)^5$

$=a_1^5\cdot q^{10}=a_1q^{11-1}$.即 $m=11$.

答案:C

6. 解析:依题意得 $a_2+a_4+a_6+a_8=(a_2+a_8)+(a_4+a_6)$

$=2(a_3+a_7)=74$.

答案:74

模板 8　求成等差或等比数列的几个数

1. 解:可设所求的三个数为 $\frac{a}{q},a,aq$,

则 $\begin{cases}\frac{a}{q}\cdot aq=4,\\ \frac{a}{q}+a+aq=3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-2,\\ q=-\frac{1}{2},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2,\\ q=-2.\end{cases}$

所以所求的三个数为 4,−2,1 或 1,−2,4.

2. 解:设所求的数为 a,aq,aq^2,aq^3,

则 $a-1,aq-1,aq^2-4,aq^3-13$ 成等差数列,

所以 $\begin{cases}(a-1)+(aq^2-4)=2(aq-1),\\ (aq-1)+(aq^3-13)=2(aq^2-4),\end{cases}$

所以 $\begin{cases}a(q-1)^2=3,\\ aq(q-1)^2=6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}q=2,\\ a=3.\end{cases}$

因此这四个数为 3,6,12,24.

3. 解:设前三个数分别为 $a-d,a,a+d$,

则有 $(a-d)+a+(a+d)=48$,即 $a=16$.

再设后三个数分别为 $\frac{b}{q},b,bq$,

则有 $\frac{b}{q}\cdot b\cdot bq=b^3=8\ 000$,即 $b=20$.

$\therefore$ 四个数分别为 $m,16,20,n$.

$\therefore m=2\times16-20=12,n=\frac{20^2}{16}=25$.

即四个数分别为 12,16,20,25.

4. 解:设所求之数为 $a-d,a,a+d$,则由题意得

$\begin{cases}a-d+a+a+d=15,\\ (a+3)^2=(a-d+1)(a+d+9),\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=5,\\ d=-10\end{cases}$(舍)或 $\begin{cases}a=5,\\ d=2.\end{cases}$

$\therefore$ 所求三数为 3,5,7.

5. 解:设成等差数列的四个数依次为

$a-3d,a-d,a+d,a+3d$.

由已知得,

$(a-3d)\cdot(a+3d)-(a-d)\cdot(a+d)=-18$,解得 $d=\pm\frac{3}{2}$,

由已知,得 $(a-3d)^2+(a-d)^2+(a+d)^2+(a+3d)^2=94$,

整理得 $4a^2+20d^2=94$,解得 $a=\pm\frac{7}{2}$.

(1)当 $a=\frac{7}{2},d=\frac{3}{2}$ 时,这四个数为−1,2,5,8.

(2)当 $a=-\frac{7}{2},d=\frac{3}{2}$ 时,这四个数为−8,−5,−2,1.

(3)当 $a=\frac{7}{2},d=-\frac{3}{2}$ 时,这四个数为 8,5,2,−1.

(4)当 $a=-\frac{7}{2},d=-\frac{3}{2}$ 时,这四个数为 1,−2,−5,−8.

模板 9　求等差或等比数列的前 *n* 项和

1. 解析:在等差数列中,$\because a_1+a_{11}=a_4+a_8=16$,

$\therefore S_{11}=\frac{11\times(a_1+a_{11})}{2}=88$.

答案:B

2. 解析:$a_n>0,a_2a_4=a_1^2q^4=1$,　①

$S_3=a_1+a_1q+a_1q^2=7$.　②

由①②解得 $a_1=4,q=\frac{1}{2}$,

$S_5=\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\frac{4\times\left(1-\frac{1}{32}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{31}{4}$,故选 B.

答案:B

3. 解析:设等比数列的首项为 a_1,公比为 q.

$\because 8a_2+a_5=0$,$\therefore 8a_1q+a_1q^4=0$,

$\therefore q^3+8=0$,$\therefore q=-2$,

$\therefore \frac{S_5}{S_2}=\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}\cdot\frac{1-q}{a_1(1-q^2)}=\frac{1-q^5}{1-q^2}$

$=\frac{1-(-2)^5}{1-(-2)^2}=-11$.

答案:A

4. 解析:由等比数列前 n 项和公式可得

$S_4=\frac{1\times(1-2^4)}{1-2}=2^4-1=15.$

答案:15

5. 解析:设$\{a_n\}$的公差为 d,则 $a_1+2d=16$ 且 $20a_1+\frac{20\times19}{2}d=20$,解得 $d=-2,a_1=20$,所以 $S_{10}=10\times20+\frac{10\times9}{2}\times(-2)=110.$

答案:110

6. 解析:因为 $S_2=a_3\Rightarrow a_1+a_2=a_3\Rightarrow a_1+a_1+d=a_1+2d\Rightarrow d=a_1=\frac{1}{2}$,所以 $a_2=a_1+d=1,S_n=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d=\frac{1}{4}n^2+\frac{1}{4}n.$

答案:1 $\frac{1}{4}n^2+\frac{1}{4}n$

7. 解析:由题意得$\begin{cases}a_1+a_1q=3a_1q+2,\\a_1+a_1q+a_1q^2+a_1q^3=3a_1q^3+2,\end{cases}$两式作差,得 $a_1q^2+a_1q^3=3a_1q(q^2-1)$,即 $2q^2-q-3=0$,

解得 $q=\frac{3}{2}$ 或 $q=-1$(舍去).

答案:$\frac{3}{2}$

模板 10 有关等差或等比数列前 n 项和性质的问题

1. 解析:设等比数列的前 n 项和为 S_n.
则 $S_5,S_{10}-S_5,S_{15}-S_{10},\cdots$也成等比数列,公比为 2^5.
所以 $S_{10}-S_5=S_5\cdot2^5$,
即 $S_{10}=2^5+1=33.$
答案:B

2. 解析:由等差数列前 n 项和的性质易知 $S_4,S_8-S_4,S_{12}-S_8,S_{16}-S_{12},S_{20}-S_{16},\cdots$成等差数列,公差为 $S_8-S_4-S_4=2.$
即 $S_{20}-S_{16}=S_4+(5-1)\times2$,
$a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20}=1+8=9.$
答案:9

3. 解:设数列$\{a_n\}$的首项为 a_1,公比为 q,全部奇数项、偶数项之和分别记为$S_奇$、$S_偶$,由题意知
$S_奇+S_偶=4S_偶$,即$S_奇=3S_偶$.
$\because$数列$\{a_n\}$的项数为偶数,
$\therefore q=\frac{S_偶}{S_奇}=\frac{1}{3}.$
又 $\because a_1\cdot a_1q\cdot a_1q^2=64$,
$\therefore a_1^3\cdot q^3=64$,即 $a_1=12.$
故所求通项公式为 $a_n=12\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$

4. 解:方法一:可证明 $S_{10},S_{20}-S_{10},S_{30}-S_{20},\cdots,S_{100}-S_{90},S_{110}-S_{100},\cdots$成等差数列,设公差为 d,该新数列前 10 项和为 $10\times100+\frac{10\times9}{2}d=10,\therefore d=-22.$

$\therefore$ 前 11 项和 $S_{110}=11\times100+\frac{11\times10}{2}d=11\times100+\frac{10\times11}{2}\times(-22)=-110.$

方法二:设数列$\{a_n\}$的公差为 d.由于 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$,则$\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{d}{2}(n-1)$,

$\therefore$ 数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是等差数列,公差为$\frac{d}{2}$.

$\therefore\frac{S_{100}}{100}-\frac{S_{10}}{10}=(100-10)\frac{d}{2}$,

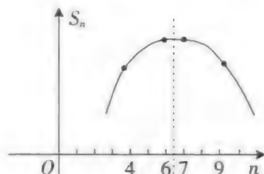
且$\frac{S_{110}}{110}-\frac{S_{100}}{100}=(110-100)\frac{d}{2}$,将已知数值代入上式,消去 d,可得 $S_{110}=-110.$

模板 11 等差数列前 n 项和的最值问题

1. 解析:选项 C 显然是错的. 举出反例:$-1,0,1,2,3,\cdots$,满足数列$\{S_n\}$是递增数列,但是 $S_n>0$ 不成立,故选 C.
答案:C

2. 解析:由已知 $a_{11}+a_{10}>0$,
$\therefore S_{20}=10(a_{10}+a_{11})>0.$
又 $S_{19}=19a_{10}<0$,
$\therefore$ 满足 $S_n<0$ 的 n 的最大值为 19.
答案:C

3. 解:方法一:$\because S_n$ 有最大值,$\therefore S_n$ 是开口向下的抛物线.由于 $S_4=S_9$,故对称轴为 $n=\frac{4+9}{2}=6.5$.从而 $n=6$ 或 7 时,S_n 最大. 如图.



方法二：$\because S_4=S_9$，

$\therefore 4a_1+\frac{4\times3}{2}d=9a_1+\frac{9\times8}{2}d$，得 $a_1=-6d$.

$\because a_1>0$，$\therefore d<0$.

$\therefore S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=n\cdot(-6d)+\frac{n(n-1)}{2}d$

$=\frac{d}{2}n^2-\frac{13d}{2}n$.

$\because d<0$，$\therefore$ 开口向下，且对称轴 $n=\frac{13}{2}=6.5$，$n\in\mathbf{N}^*$.

$\therefore n=6$ 或 7 时，S_n 最大.

方法三：由方法二易求 $a_n=a_1+(n-1)d=-6d+(n-1)d=(n-7)d$.

由 $\begin{cases}a_n\geqslant0,\\a_{n+1}\leqslant0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}(n-7)d\geqslant0,\\(n-6)d\leqslant0.\end{cases}$

$\because d<0$，$\therefore \begin{cases}n-7\leqslant0,\\n-6\geqslant0.\end{cases}$

解得 $6\leqslant n\leqslant7$，

又 $n\in\mathbf{N}^*$，故 $n=6$ 或 7.

答案：6 或 7

4. 解：(1)由 $a_n=a_1+(n-1)d$ 及 $a_3=5$，$a_{10}=-9$ 得

$\begin{cases}a_1+2d=5,\\a_1+9d=-9.\end{cases}$ 可解得 $\begin{cases}a_1=9,\\d=-2.\end{cases}$

数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=11-2n$.

(2)由(1)知，$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=10n-n^2$.

因为 $S_n=-(n-5)^2+25$，所以当 $n=5$ 时，S_n 取得最大值.

5. 解：(1)$\because S_{12}>0$，$S_{13}<0$，

$\therefore \begin{cases}12a_1+\frac{12\times11}{2}d>0,\\13a_1+\frac{13\times12}{2}d<0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2a_1+11d>0,\\a_1+6d<0.\end{cases}$

又 $a_3=a_1+2d=12$，

$\therefore$ 解得 $-\frac{24}{7}<d<-3$.

(2)由题意及等差数列的性质可得

$\begin{cases}S_{12}=\frac{12(a_1+a_{12})}{2}=6(a_6+a_7)>0,\\S_{13}=\frac{13(a_1+a_{13})}{2}=13a_7<0.\end{cases}$ $\therefore a_7<0$，$a_6>0$.

$\therefore$ 在数列 $\{a_n\}$ 中，前 6 项为正，从第 7 项起，以后各项为负，故 S_6 最大.

模板 12 等差、等比数列的综合性问题

1. 解：(1)设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q\neq0,q\neq1)$.

由 a_5,a_3,a_4 成等差数列，得 $2a_3=a_5+a_4$，即 $2a_1q^2=a_1q^4+a_1q^3$，由 $a_1\neq0,q\neq0$ 得 $q^2+q-2=0$，解得 $q_1=-2$，$q_2=1$(舍去)，$\therefore q=-2$.

(2)证明：对任意 $k\in\mathbf{N}^*$，

$S_{k+2}+S_{k+1}-2S_k=(S_{k+2}-S_k)+(S_{k+1}-S_k)=a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+1}=2a_{k+1}+a_{k+1}\cdot(-2)=0$，

$\therefore$ 对任意 $k\in\mathbf{N}^*$，S_{k+2},S_k,S_{k+1} 成等差数列.

2. 解：(1)$\frac{1}{a_2^2}=\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_4}\Rightarrow a_2^2=a_1a_4\Rightarrow(a_1+d)^2=a_1(a_1+3d)$

$\Rightarrow d=a_1=a$，$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d=a+(n-1)a=na$.

(2)记 $T_n=\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2^2}+\cdots+\frac{1}{a_2^n}$，

$\because a_{2^n}=2^na$，由公差不为 0，易知 $a\neq0$.

$\therefore T_n=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$

$=\frac{1}{a}\cdot\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{a}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$.

从而当 $a>0$ 时，$T_n<\frac{1}{a_1}$；当 $a<0$ 时，$T_n>\frac{1}{a_1}$.

3. 解：(1)设 $\{a_n\}$ 的公差为 d. 由题意，$a_{11}^2=a_1a_{13}$，

即 $(a_1+10d)^2=a_1(a_1+12d)$.

于是 $d(2a_1+25d)=0$.

又 $a_1=25$，所以 $d=0$(舍去)，或 $d=-2$.

故 $a_n=-2n+27$.

(2)令 $S_n=a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{3n-2}$.

由(1)知 $a_{3n-2}=-6n+31$，故 $\{a_{3n-2}\}$ 是首项为 25，公差为 -6 的等差数列. 从而

$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_{3n-2})$

$=\frac{n}{2}(-6n+56)=-3n^2+28n$.

4. 解：(1)设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，因为 $-2S_2$，S_3，$4S_4$ 成等差数列，所以 $S_3+2S_2=4S_4-S_3$，即 $S_4-S_3=S_2-S_4$，可得 $2a_4=-a_3$，于是 $q=\frac{a_4}{a_3}=-\frac{1}{2}$. 又 $a_1=\frac{3}{2}$，所以等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{3}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=(-1)^{n-1}\cdot\frac{3}{2^n}$.

(2)证明：$S_n=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n$，

$S_n+\frac{1}{S_n}=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$

$=\begin{cases}2+\frac{1}{2^n(2^n+1)}, & n\text{ 为奇数},\\ 2+\frac{1}{2^n(2^n-1)}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

当 n 为奇数时，$S_n+\frac{1}{S_n}$ 随 n 的增大而减小，

所以 $S_n+\frac{1}{S_n}\leqslant S_1+\frac{1}{S_1}=\frac{13}{6}$.

当 n 为偶数时，$S_n+\frac{1}{S_n}$ 随 n 的增大而减小，

所以 $S_n+\frac{1}{S_n}\leqslant S_2+\frac{1}{S_2}=\frac{25}{12}$.

故对于 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $S_n+\frac{1}{S_n}\leqslant\frac{13}{6}$.

5. 解：(1)由 $(3-m)S_n+2ma_n=m+3$，得 $(3-m)S_{n+1}+2ma_{n+1}=m+3$，两式相减，得 $(3+m)a_{n+1}=2ma_n(m\neq-3)$，所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2m}{m+3}$. 因为 m 是常数，且 $m\neq-3$，$m\neq0$，故 $\frac{2m}{m+3}$ 是不为 0 的常数，所以 $\{a_n\}$ 是等比数列.

(2)令 $n=1$，得 $(3-m)S_1+2ma_1=m+3$，
又 $m\neq0$，所以 $a_1=1$.

由 $b_1=a_1=1$，$q=f(m)=\frac{2m}{m+3}$，

$b_n=\frac{3}{2}f(b_{n-1})=\frac{3}{2}\cdot\frac{2b_{n-1}}{b_{n-1}+3}$，$n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant2$，由 $b_1=1\neq0$，知 $b_n\neq0$，得

$b_nb_{n-1}+3b_n=3b_{n-1}\Rightarrow\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n-1}}=\frac{1}{3}$.

所以 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 是以 1 为首项，$\frac{1}{3}$ 为公差的等差数列.

所以 $\frac{1}{b_n}=1+\frac{n-1}{3}=\frac{n+2}{3}$.

所以 $b_n=\frac{3}{n+2}$.

6. 解：(1)由 $S_{n+1}=4a_n+2$，$S_{n+2}=4a_{n+1}+2$，
两式相减，得 $S_{n+2}-S_{n+1}=4(a_{n+1}-a_n)$，
即 $a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$，
所以 $a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$.

又 $b_n=a_{n+1}-2a_n$，所以 $b_{n+1}=2b_n$. ①
已知 $S_2=4a_1+2$，$a_1=1$，$a_1+a_2=4a_1+2$，
解得 $a_2=5$，$b_1=a_2-2a_1=3$， ②
由①和②，得数列 $\{b_n\}$ 是首项为 3，公比为 2 的等比数列，故 $b_n=3\cdot2^{n-1}$.

(2)因为 $c_n=\frac{a_n}{2^n}(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以 $c_{n+1}-c_n=\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_{n+1}-2a_n}{2^{n+1}}=\frac{b_n}{2^{n+1}}=\frac{3\cdot2^{n-1}}{2^{n+1}}=\frac{3}{4}$. 又 $c_1=\frac{a_1}{2}=\frac{1}{2}$，

故数列 $\{c_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{2}$，公差是 $\frac{3}{4}$ 的等差数列.

所以 $c_n=\frac{3}{4}n-\frac{1}{4}$.

(3)因为 $c_n=\frac{a_n}{2^n}$，又 $c_n=\frac{3}{4}n-\frac{1}{4}$，

所以 $\frac{a_n}{2^n}=\frac{3n}{4}-\frac{1}{4}$，$a_n=(3n-1)\cdot2^{n-2}$.

当 $n\geqslant2$ 时，$S_n=4a_{n-1}+2=2^{n-1}(3n-4)+2$；当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=1$ 也适合上式.
综上，可知 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=2^{n-1}(3n-4)+2$.

模板 13　用倒序相加法求前 n 项和

解：(1)$\because f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$，

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$，

$f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$.

(2)数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

证明：$a_n=f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)$，

倒序得 $a_n=f(1)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f\left(\frac{n-2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{n}\right)+f(0)$，

两式相加得 $2a_n=[f(0)+f(1)]+\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f\left(\frac{1}{n}\right)\right]+[f(1)+f(0)]$

$=\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}_{(n+1)\text{个}}=\frac{n+1}{2}$，

$\therefore a_n=\frac{n+1}{4}$. $\therefore a_{n+1}-a_n=\frac{n+2}{4}-\frac{n+1}{4}=\frac{1}{4}$，

$\therefore\{a_n\}$是等差数列.

模板 14　错位相减法求前 n 项和

1. 解:(1)由已知,当 $n\geqslant1$ 时,

$a_{n+1}=[(a_{n+1}-a_n)+(a_n-a_{n-1})+\cdots+(a_2-a_1)]+a_1$

$=3(2^{2n-1}+2^{2n-3}+\cdots+2)+2=2^{2(n+1)-1}$.

而 $a_1=2$,符合上式,所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2^{2n-1}$.

(2)由 $b_n=na_n=n\cdot2^{2n-1}$ 知

$S_n=1\cdot2+2\cdot2^3+3\cdot2^5+\cdots+n\cdot2^{2n-1}$,①

从而 $2^2\cdot S_n=1\cdot2^3+2\cdot2^5+3\cdot2^7+\cdots+n\cdot2^{2n+1}$,②

①-②得 $(1-2^2)S_n=2+2^3+2^5+\cdots+2^{2n-1}-n\cdot2^{2n+1}$,

即 $S_n=\frac{1}{9}[(3n-1)2^{2n+1}+2]$.

2. 解:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,由已知可得

$\begin{cases}a_1+d=0,\\2a_1+12d=-10,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=1,\\d=-1.\end{cases}$

故数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2-n$.

(2)设数列$\left\{\frac{a_n}{2^{n-1}}\right\}$的前 n 项和为 S_n,

则 $S_n=a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}$,$\frac{S_n}{2}=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{4}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}$.

两式相减得

$\frac{S_n}{2}=a_1+\frac{a_2-a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n-a_{n-1}}{2^{n-1}}-\frac{a_n}{2^n}$

$=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2-n}{2^n}$

$=1-\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2-n}{2^n}=\frac{n}{2^n}$,

所以 $S_n=\frac{n}{2^{n-1}}$.

综上,数列$\left\{\frac{a_n}{2^{n-1}}\right\}$的前 n 项和 $S_n=\frac{n}{2^{n-1}}$.

3. (1)由题意知,当 $n=k\in\mathbf{N}^*$ 时,$S_n=-\frac{1}{2}n^2+kn$ 取最大值,即 $8=S_k=-\frac{1}{2}k^2+k^2=\frac{1}{2}k^2$,故 $k^2=16$,因此 $k=4$,

从而 $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{9}{2}-n(n\geqslant2)$.

又 $a_1=S_1=\frac{7}{2}$,所以 $a_n=\frac{9}{2}-n$.

(2)因为 $b_n=\frac{9-2a_n}{2^n}=\frac{n}{2^{n-1}}$,

$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-2}}+\frac{n}{2^{n-1}}$,

$2T_n=2+2+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-3}}+\frac{n}{2^{n-2}}$,

所以 $T_n=2T_n-T_n=2+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{n}{2^{n-1}}=4-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{n}{2^{n-1}}=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$.

4. 解:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,等比数列$\{b_n\}$的公比为 q.

由 $a_1=b_1=2$,得 $a_4=2+3d$,$b_4=2q^3$,$S_4=8+6d$.

由已知,得方程组 $\begin{cases}2+3d+2q^3=27,\\8+6d-2q^3=10,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}d=3,\\q=2.\end{cases}$

所以 $a_n=3n-1$,$b_n=2^n$,$n\in\mathbf{N}^*$.

(2)由(1)得 $T_n=2a_n+2^2a_{n-1}+2^3a_{n-2}+\cdots+2^na_1$,　①

$2T_n=2^2a_n+2^3a_{n-1}+\cdots+2^na_2+2^{n+1}a_1$.　②

由②-①,得 $T_n=-2(3n-1)+3\times2^2+3\times2^3+\cdots+3\times2^n+2^{n+2}=\frac{12(1-2^{n-1})}{1-2}+2^{n+2}-6n+2=10\times2^n-6n-10$.

而 $-2a_n+10b_n-12=-2(3n-1)+10\times2^n-12=10\times2^n-6n-10$,故 $T_n+12=-2a_n+10b_n$,$n\in\mathbf{N}^*$.

模板 15　裂项相消法求前 n 项和

1. 解:因为通项 $a_n=\frac{1}{n^2+2n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$,

所以此数列的前 n 项和 $S_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$.

2. 解:$\because a_n=\frac{(n+1)^2+1}{(n+1)^2-1}=\frac{n^2+2n+2}{n^2+2n}=1+\frac{2}{n(n+2)}=1+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$,

$\therefore S_n=\left[1+\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]+\left[1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\right]+\left[1+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right]+\left[1+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\right]+\cdots+\left[1+\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-1}\right)\right]+\left[1+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)\right]+\left[1+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right]+\left[1+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right]=n+\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$.

3. 解:(1)设等差数列$\{a_n\}$的首项为 a_1,公差为 d,因为 $a_3=7$,$a_5+a_7=26$,所以 $a_1+2d=7$,$2a_1+10d=26$.

解得 $a_1=3,d=2$.

所以 $a_n=2n+1,S_n=n(n+2)$.

(2)因为 $a_n=2n+1$,所以 $a_n^2-1=4n(n+1)$,

因此 $b_n=\frac{1}{4n(n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$.

故 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$

$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{4(n+1)}$.

所以数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 $T_n=\frac{n}{4(n+1)}$.

4. 解:(1)设$\{a_n\}$的公差为 d,则 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$.

由已知可得$\begin{cases}3a_1+3d=0,\\5a_1+10d=-5.\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=-1.\end{cases}$

故$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2-n$.

(2)由(1)知$\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}=\frac{1}{(3-2n)(1-2n)}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)$,

从而数列$\left\{\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}\right\}$的前 n 项和为

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{-1}-\frac{1}{1}+\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)=\frac{n}{1-2n}$.

模板 16　分组求和法求前 n 项和

1. 解:$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$

$=(2^1+3\times1-1)+(2^2+3\times2-1)+\cdots+(2^n+3n-1)$

$=(2^1+2^2+\cdots+2^n)+(3\times1+3\times2+\cdots+3n)-(1+1+\cdots+1)$

$=\frac{2(1-2^n)}{1-2}+3(1+2+\cdots+n)-n$

$=2(2^n-1)+3\times\frac{n(n+1)}{2}-n$

$=2^{n+1}+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-2$.

2. 解:(1)由 $x_1=3$,得 $2p+q=3$.

因为 $x_4=2^4p+4q,x_5=2^5p+5q$,

且 $x_1+x_5=2x_4$,得 $3+2^5p+5q=2^5p+8q$,

联立解得 $p=1,q=1$.

(2)由(1)知 $x_n=2^n+n$,

由于 $2+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-2,1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$,

所以 $S_n=(2+2^2+\cdots+2^n)+(1+2+\cdots+n)=2^{n+1}-2+\frac{n(n+1)}{2}$.

3. 解:(1)由 $a_3+a_4+a_5=84,a_9=73$ 可得 $3a_4=84,a_4=28$,而 $a_9=73$,则 $5d=a_9-a_4=45,d=9,a_1=a_4-3d=28-27=1$,于是 $a_n=1+(n-1)\times9=9n-8$,即 $a_n=9n-8$.

(2)对任意 $m\in\mathbf{N}^*,9^m<9n-8<9^{2m}$,

则 $9^m+8<9n<9^{2m}+8$,即 $9^{m-1}+\frac{8}{9}<n<9^{2m-1}+\frac{8}{9}$,

而 $n\in\mathbf{N}^*$,由题意可知 $b_m=9^{2m-1}-9^{m-1}$,

于是 $S_m=b_1+b_2+\cdots+b_m=9^1+9^3+\cdots+9^{2m-1}-(9^0+9^1+\cdots+9^{m-1})=\frac{9-9^{2m+1}}{1-9^2}-\frac{1-9^m}{1-9}=\frac{9^{2m+1}-9}{80}-\frac{9^m-1}{8}$

$=\frac{9^{2m+1}-10\cdot9^m+1}{80}=\frac{9^{2m+1}+1}{80}-\frac{9^m}{8}$,

即 $S_m=\frac{9^{2m+1}+1}{80}-\frac{9^m}{8}$.

4. 解:(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,

由题意,得$\begin{cases}a_1+2d=5,\\10a_1+\frac{10\times9}{2}d=100,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=2,\end{cases}$

所以 $a_n=2n-1$.

(2)因为 $b_n=2^{a_n}+2n=\frac{1}{2}\times4^n+2n$,

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{2}(4+4^2+\cdots+4^n)+2(1+2+\cdots+n)=\frac{4^{n+1}-4}{6}+n^2+n=\frac{2}{3}\times4^n+n^2+n-\frac{2}{3}$.

第三章　不等式

模板 1　利用不等式的性质求代数式的取值范围

1. 解析:设 $\alpha+3\beta=x(\alpha+\beta)+y(\alpha+2\beta)=(x+y)\alpha+(x+2y)\beta$.

由$\begin{cases}x+y=1,\\x+2y=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-1,\\y=2.\end{cases}$

$\because -1\leqslant-(\alpha+\beta)\leqslant1,2\leqslant2(\alpha+2\beta)\leqslant6$,

$\therefore$ 两式相加,得 $1\leqslant\alpha+3\beta\leqslant7$.

答案:[1,7]

2. 解析:由$\begin{cases}1\leqslant\lg\frac{x}{y}\leqslant2,\\2\leqslant\lg\frac{x^3}{\sqrt{y}}\leqslant3,\end{cases}$得$\begin{cases}1\leqslant\lg x-\lg y\leqslant2,\\2\leqslant3\lg x-\frac{1}{2}\lg y\leqslant3.\end{cases}$

令$\begin{cases}\lg x-\lg y=a,\\3\lg x-\frac{1}{2}\lg y=b,\end{cases}$解得$\begin{cases}\lg x=\frac{2b-a}{5},\\\lg y=\frac{2b-6a}{5}.\end{cases}$

所以$\lg\frac{x^3}{\sqrt[3]{y}}=3\lg x-\frac{1}{3}\lg y$

$=3\cdot\frac{2b-a}{5}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2b-6a}{5}=\frac{16}{15}b-\frac{1}{5}a.$

由$\begin{cases}1\leqslant a\leqslant 2,\\2\leqslant b\leqslant 3,\end{cases}$得$\begin{cases}-\frac{2}{5}\leqslant-\frac{1}{5}a\leqslant-\frac{1}{5},\\\frac{32}{15}\leqslant\frac{16}{15}b\leqslant\frac{16}{5}.\end{cases}$

所以$\frac{26}{15}\leqslant\frac{16}{15}b-\frac{1}{5}a\leqslant 3$，即$\frac{26}{15}\leqslant\lg\frac{x^3}{\sqrt[3]{y}}\leqslant 3.$

答案：$\left[\frac{26}{15},3\right]$

3. 解析：由题意，得$\begin{cases}a-c=f(1),\\4a-c=f(2),\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=\frac{1}{3}[f(2)-f(1)],\\c=-\frac{4}{3}f(1)+\frac{1}{3}f(2).\end{cases}$

$f(3)=9a-c=-\frac{5}{3}f(1)+\frac{8}{3}f(2).$

因为$-4\leqslant f(1)\leqslant-1$，

所以$\frac{5}{3}\leqslant-\frac{5}{3}f(1)\leqslant\frac{20}{3}.$ ①

因为$-1\leqslant f(2)\leqslant 5$，

所以$-\frac{8}{3}\leqslant\frac{8}{3}f(2)\leqslant\frac{40}{3}.$ ②

①+②，得$-1\leqslant f(3)\leqslant 20$，故$f(3)$的取值范围是$[-1,20]$

答案：$[-1,20]$

4. 解：令$a+b=\mu,a-b=v$，则$2\leqslant\mu\leqslant 4,1\leqslant v\leqslant 2$.

由$\begin{cases}a+b=\mu,\\a-b=v,\end{cases}$得$\begin{cases}a=\frac{\mu+v}{2},\\b=\frac{\mu-v}{2}.\end{cases}$

$\therefore 4a-2b=4\cdot\frac{\mu+v}{2}-2\cdot\frac{\mu-v}{2}=2\mu+2v-\mu+v=\mu+3v.$

而$2\leqslant\mu\leqslant 4,3\leqslant 3v\leqslant 6$，则$5\leqslant\mu+3v\leqslant 10$.

$\therefore 5\leqslant 4a-2b\leqslant 10.$

模板 2 一元二次不等式的解法

1. 解析：$\because 2x^2-x-1>0,\therefore(2x+1)(x-1)>0,\therefore x>1$或$x<-\frac{1}{2}$，故选 D.

答案：D

2. 解析：不等式$\frac{x-3}{x+2}<0$可转化为$(x+2)(x-3)<0$，

解得$-2<x<3$.

答案：A

3. 解析：$\frac{x+1}{x}\leqslant 3$，即$\frac{x+1-3x}{x}\leqslant 0$，

$\frac{1-2x}{x}\leqslant 0\Leftrightarrow\begin{cases}x(1-2x)\leqslant 0,\\x\neq 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(2x-1)\geqslant 0,\\x\neq 0,\end{cases}$

解得$x\geqslant\frac{1}{2}$或$x<0$.

故原不等式的解集为$\left\{x\middle|x<0\text{或}x\geqslant\frac{1}{2}\right\}$.

答案：$\left\{x\middle|x<0\text{或}x\geqslant\frac{1}{2}\right\}$

4. 解析：$x^2-5x+6\leqslant 0,(x-2)(x-3)\leqslant 0$，解得$2\leqslant x\leqslant 3$，即其解集为$\{x|2\leqslant x\leqslant 3\}$.

答案：$\{x|2\leqslant x\leqslant 3\}$

5. 解析：$\frac{1}{x}<1\Leftrightarrow\frac{1}{x}-1<0\Leftrightarrow\frac{1-x}{x}<0\Leftrightarrow x(x-1)>0$，

$\therefore$原不等式的解集为$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

答案：$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

6. 解析：由$\frac{2-x}{x+4}>0$，得$\frac{x-2}{x+4}<0$，解得$-4<x<2$，

$\therefore\frac{2-x}{x+4}>0$的解集是$(-4,2)$.

答案：$(-4,2)$

模板 3 求一元二次不等式中参数的值或取值范围

1. 解析：$(x-b)^2>(ax)^2,(a^2-1)x^2+2bx-b^2<0$，要使$x$的解集中恰有 3 个整数，必须有$a^2-1>0$. 又$a+1>0$，$\therefore a>1$. 不等式变形为$[(a-1)x+b][(a+1)x-b]<0$.

$\because a>1,b>0,b<1+a,\therefore\frac{b}{1-a}<0,0<\frac{b}{a+1}<1$，

$\therefore\frac{b}{1-a}<x<\frac{b}{a+1}.$

$\because$不等式的解集中的整数恰好有 3 个，

$\therefore -3\leqslant\frac{b}{1-a}<-2.$

$\therefore\begin{cases}3a-3\geqslant b>0,\\2a-2<b<a+1,\end{cases}\therefore\begin{cases}a>1,\\a<3,\end{cases}\therefore 1<a<3.$

答案：C

2. 解析：当 $x\in(1,2)$ 时，不等式 $x^2+mx+4<0$ 恒成立，

则 $m<-\left(x+\frac{4}{x}\right)$. 设 $f(x)=x+\frac{4}{x}$，

由于 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上是减函数，

$\therefore f(x)_{max}=f(1)=5$，$\therefore m\leqslant-5$.

答案：$m\leqslant-5$

3. 解析：由于不等式 $\frac{ax-1}{x+1}<0$ 的解集是 $(-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$，故 $-\frac{1}{2}$ 应是 $ax-1=0$ 的根. $\therefore a=-2$.

答案：-2

4. 解析：原不等式可化为 $(4-a)x^2-4x+1<0$，要 x 恰有三个整数解，必须 $4-a>0$，即 $a<4$，$\Delta=16-4(4-a)>0$，所以 $0<a<4$.

不等式对应方程的根为 $x=\frac{2\pm\sqrt{a}}{4-a}$.

而 $\frac{2-\sqrt{a}}{4-a}=\frac{1}{2+\sqrt{a}}\in\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$，

所以若满足题意必须有 $3<\frac{2+\sqrt{a}}{4-a}\leqslant4$，

即 $3<\frac{1}{2-\sqrt{a}}\leqslant4$，$\frac{1}{4}\leqslant2-\sqrt{a}<\frac{1}{3}$.

$-\frac{1}{3}<\sqrt{a}-2\leqslant-\frac{1}{4}$，$\frac{5}{3}<\sqrt{a}\leqslant\frac{7}{4}$，$\frac{25}{9}<a\leqslant\frac{49}{16}$.

答案：$\left(\frac{25}{9},\frac{49}{16}\right]$

5. 解：$\because ax^2+bx+2>0$ 的解集为 $\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{3}\right.\right\}$，

$\therefore -\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$ 是方程 $ax^2+bx+2=0$ 的两实根.

由根与系数的关系得 $\begin{cases}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{b}{a},\\ -\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{a},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-12,\\ b=-2.\end{cases}$

$\therefore 2x^2+bx+a<0$ 可化为 $2x^2-2x-12<0$，

即 $x^2-x-6<0$，$\therefore (x-3)(x+2)<0$，解得 $-2<x<3$.

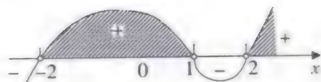
$\therefore 2x^2+bx+a<0$ 的解集为 $\{x|-2<x<3\}$.

模板 4　求解一元高次不等式

1. 解析：原不等式可等价化为 $(x-1)(x^2-4)>0$，

即 $(x-1)(x+2)(x-2)>0$.

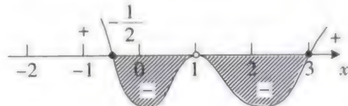
在数轴上利用穿根法表示如图.



所以原不等式的解集为 $(-2,1)\cup(2,+\infty)$.

答案：C

2. 解析：移项通分可得 $\frac{(2x+1)(x-3)}{(x-1)^2}\leqslant0$，等价转化为 $\begin{cases}(2x+1)(x-3)(x-1)^2\leqslant0,\\ (x-1)^2\neq0,\end{cases}$



解得 $-\frac{1}{2}\leqslant x<1$ 或 $1<x\leqslant3$，故选 D.

答案：D

3. 解：原不等式为 $(x-1)(x+1)(x+2)(x-5)<0$ 或 $x^2-3x-10=0$.



由图可知原不等式解集为 $\{x|-2\leqslant x<-1$ 或 $1<x\leqslant5\}$.

4. 解：由穿根法可知 $-3,1,4$ 是方程 $(ax^2+bx+c)(x+d)=0$ 的实根，且 $a<0$.

而 $ax^3-(b+ad)x^2+(c+bd)x-cd=ax^3-bx^2+cx-d(ax^2-bx+c)=(ax^2-bx+c)\cdot(x-d)$，



$\therefore$ 原不等式化为 $(-ax^2+bx-c)(x-d)\geqslant0$.

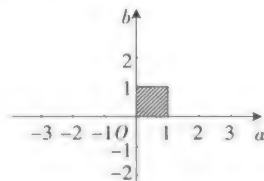
而 $(-ax^2+bx-c)(x-d)=[a(-x)^2+b(-x)+c][(-x)+d]$，

$\therefore (-ax^2+bx-c)(x-d)=0$ 的实根是 $(ax^2+bx+c)(x+d)=0$ 的实根的相反数 $3,-1,-4$.

由图可知，所求不等式的解集为 $\{x|-4\leqslant x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant3\}$.

模板 5　求平面区域的面积

1. 解析：由 $ax+by\leqslant1$ 恒成立，知当 $x=0$ 时，$by\leqslant1$ 恒成立，所以 $0\leqslant b\leqslant1$；同理，可得 $0\leqslant a\leqslant1$. 不等式组 $\begin{cases}0\leqslant a\leqslant1,\\ 0\leqslant b\leqslant1\end{cases}$ 表示的平面区域如图.

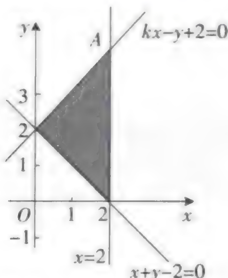


所以点 $P(a,b)$ 确定的平面区域是一个边长为 1 的正方形，面积为 1.

答案：C

2. 解析：其中 $kx-y+2\geqslant0$ 所表示的平面区域是含有坐标原点的半平面. 直线 $kx-y+2=0$ 过定点 $(0,2)$，这样就可以根据平面区域的面积为 4，确定一个封闭的区域，作出平面区域即可求解.

平面区域如图所示(阴影部分)，

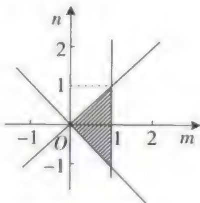


根据区域面积为 4，得 $A(2,4)$ 代入直线方程，得 $k=1$.

答案：A

3. 解析：对于集合 B，令 $m=x+y,n=x-y$，则 $x=\frac{m+n}{2}$，$y=\frac{m-n}{2}$，由于 $(x,y)\in A$，所以有 $\frac{m+n}{2}+\frac{m-n}{2}\leqslant1$ 且 $\frac{m+n}{2}\geqslant0$，$\frac{m-n}{2}\geqslant0$，

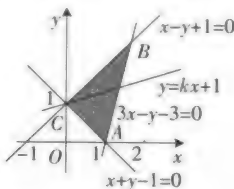
即 $\begin{cases}m\leqslant1,\\m+n\geqslant0,\\m-n\geqslant0.\end{cases}$ 因此平面区域 B 的面积即不等式组 $\begin{cases}m\leqslant1,\\m+n\geqslant0,\\m-n\geqslant0\end{cases}$ 对应的平面区域的面积，如图.



面积是 $\frac{1}{2}\times1\times2=1$.

答案：B

4. 解析：区域 D 如图中的阴影部分所示，



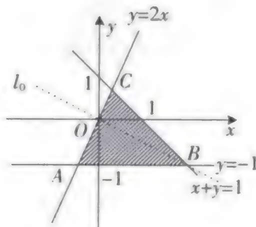
直线 $y=kx+1$ 经过定点 $C(0,1)$，如果其把区域 D 划分为面积相等的两个部分，则直线 $y=kx+1$ 只要经过 AB 的中点即可. 由方程组 $\begin{cases}x+y-1=0,\\3x-y-3=0,\end{cases}$ 解得 $A(1,0)$；由方程组 $\begin{cases}x-y+1=0,\\3x-y-3=0,\end{cases}$ 解得 $B(2,3)$.

所以 AB 的中点坐标为 $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$，代入直线方程 $y=kx+1$，得 $\frac{3}{2}=\frac{3}{2}k+1$，解得 $k=\frac{1}{3}$.

答案：$\frac{1}{3}$

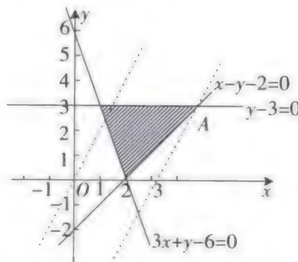
模板 6　求线性目标函数的取值范围(或最值)

1. 解析：由线性约束条件可画出其表示的平面区域为三角形 ABC，作出目标函数 $z=x+2y$ 的基本直线 l_0：$x+2y=0$，经平移可知 $z=x+2y$ 在点 $C\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ 处取得最大值，最大值为 $\frac{5}{3}$，故选 C.



答案：C

2. 解析：画出可行域如图所示.

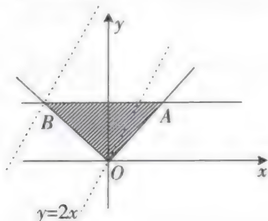


由数形结合可知目标函数 $z=y-2x$ 在点 $A(5,3)$ 处取最小值，即 $z_{\min}=3-2\times5=-7$. 故选 A.

答案：A

3. 解析：曲线 $y=|x|$ 与 $y=2$ 围成的封闭区域为直角三角形 AOB(如图). 设 $2x-y=z$，则 $y=2x-z$，要使 z

最小,则$-z$最大,此时$z=2\times(-2)-2=-6$. 故选 A.

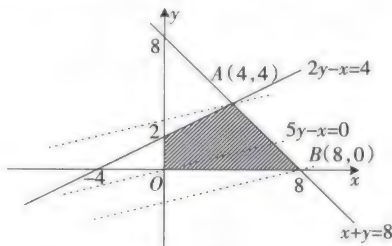


答案:A

4. 解析:画出可行域,如图所示. 由图可知,当目标函数过 A 点时有最大值;过 B 点时有最小值.

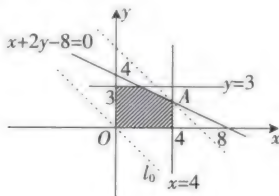
联立得$\begin{cases}x+y=8,\\2y-x=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4,\\y=4,\end{cases}$

故$A(4,4)$;对$x+y=8$,令$y=0$,则$x=8$,故$B(8,0)$,所以$a=5\times4-4=16$,$b=5\times0-8=-8$,则$a-b=16-(-8)=24$,故选 C.



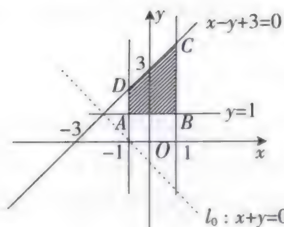
答案:C

5. 解析:由线性约束条件画出其表示的平面区域如图所示,作出直线 $l_0:x+y=0$,令 $z=x+y$,经过平移可知目标函数 $z=x+y$ 在点 $A(4,2)$处取得最大值,其最大值为 6.



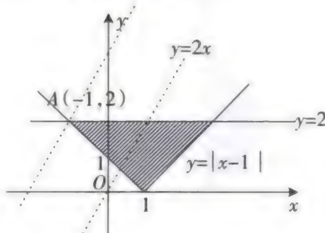
答案:6

6. 解析:如图所示,画出约束条件表示的平面区域(四边形 $ABCD$),作出目标函数 $z=x+y$ 的基本直线 $l_0:x+y=0$,通过平移可知 $z=x+y$ 在点 C 处取最大值,而点 C 的坐标为$(1,4)$,故 $z_{max}=5$.



答案:5

7. 解析:作出可行域如图所示.

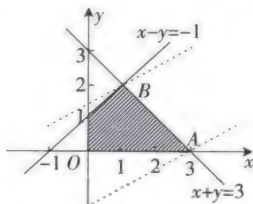


记 $z=2x-y$,则 $y=2x-z$.

将 $y=2x$ 沿 y 轴向上平移,过 $A(-1,2)$时,$-z$ 最大,即 z 最小,最小值为-4.

答案:-4

8. 解析:由不等式组画出可行域(如图所示).



当直线 $x-2y-z=0$ 过点 $B(1,2)$时,$z_{min}=-3$;

过点 $A(3,0)$时,$z_{max}=3$.

$\therefore z=x-2y$ 的取值范围是$[-3,3]$.

答案:$[-3,3]$

模板 7　利用基本不等式求最值

1. 解析:依题意得$(x+1)(2y+1)=9$,$(x+1)+(2y+1)\geqslant2\sqrt{(x+1)(2y+1)}=6$,$x+2y\geqslant4$,即 $x+2y$ 的最小值是 4,故选 B.

答案:B

2. 解析:方法一:$\because0<a<b$,$\therefore\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$.

因为 $a^2-(\sqrt{ab})^2=a(a-b)<0$,所以 $a<\sqrt{ab}$,同理,由 $b^2-(\sqrt{ab})^2=b(b-a)>0$ 得$\sqrt{ab}<b$.

令 $b-\frac{a+b}{2}=\frac{b-a}{2}>0$,得 $\frac{a+b}{2}<b$.

综上可得 $a<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<b$. 故选 B.

方法二:取 $a=2,b=8$,则 $\sqrt{ab}=4$, $\frac{a+b}{2}=5$,

$\therefore a<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<b$.

答案:B

3. 解析:$\because \frac{1}{b}+\frac{1}{a-b}\geqslant\frac{4}{b+a-b}=\frac{4}{a}$(当且仅当 $a=2b$ 时取等号),$\therefore 2a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}-10ac+25c^2\geqslant 2a^2+\frac{4}{a^2}-10ac+25c^2=a^2+\frac{4}{a^2}+25\left(c-\frac{a}{5}\right)^2\geqslant a^2+\frac{4}{a^2}$(当且仅当 $a=5c$ 时取等号)$\geqslant 2\sqrt{a^2\times\frac{4}{a^2}}=4$(当且仅当 $a=\sqrt{2}$ 时取等号),综上可得当 $a=\sqrt{2}$, $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $c=\frac{\sqrt{2}}{5}$ 时,$2a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}-10ac+25c^2$ 取得最小值 4,故选 B.

答案:B

4. 解析:$\because 4x^2+y^2+xy=1$,$\therefore (2x+y)^2-3xy=1$,

即 $(2x+y)^2-\frac{3}{2}\cdot 2xy=1$,

$\therefore (2x+y)^2-\frac{3}{2}\left(\frac{2x+y}{2}\right)^2\leqslant 1$,

解得 $(2x+y)^2\leqslant\frac{8}{5}$,

即 $-\frac{2\sqrt{10}}{5}\leqslant 2x+y\leqslant\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

答案:$\frac{2\sqrt{10}}{5}$

5. 解析:$\left(x^2+\frac{1}{y^2}\right)\left(\frac{1}{x^2}+4y^2\right)=1+4+4x^2y^2+\frac{1}{x^2y^2}\geqslant 5+2\sqrt{4x^2y^2\cdot\frac{1}{x^2y^2}}=9$.

答案:9

6. 解析:$\because x^2+y^2+xy=1$,$\therefore (x+y)^2-xy=1$,

即 $(x+y)^2-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\leqslant 1$,

$\therefore (x+y)^2\leqslant\frac{4}{3}$,$\therefore x+y\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

答案:$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

选修 2-1

第一章 常用逻辑用语

模板 1 求一个命题的逆命题或否命题或逆否命题

1. 解析:原命题的逆命题是交换原命题的条件和结论. 故选 A.

答案:A

2. 解析:将一个命题的“条件”和“结论”先否定后交换位置,即得其逆命题,故选 C.

答案:C

3. 解析:原命题的逆命题是:若一个数的平方是正数,则它是负数.

答案:B

4. 解析:由 $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$ 得 $x=y$,A 正确,B,C,D 错误.

答案:A

模板 2 充分条件与必要条件的判断

1. 解析:设命题 $p:(2x-1)x=0$,命题 $q:x=0$,则命题 $p:x=0$ 或 $x=\frac{1}{2}$,故 p 是 q 的必要不充分条件. 故选 B.

答案:B

2. 解析:不等式 $2x^2+x-1>0$ 的解为 $x>\frac{1}{2}$ 或 $x<-1$,所以“$x>\frac{1}{2}$”是“$2x^2+x-1>0$”成立的充分而不必要条件.

答案:A

3. 解析:$\because abc=1$,$\therefore \sqrt{abc}=1$,

$\therefore \frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}$

$=\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)\cdot\sqrt{abc}$

$=\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\leqslant a+b+c$.

反之,当 $a=2,b=3,c=1$ 时,不等式显然成立,但 $abc\neq 1$.

答案:A

4. 解析:若 $\alpha\perp\beta$,又 $\alpha\cap\beta=m$, $b\subset\beta$, $b\perp m$,根据两个

平面垂直的性质定理可得 $b\perp\alpha$，又因为$a\subset\alpha$，所以$a\perp b$；反过来，当$a/\!/m$时，因为$b\perp m$，一定有$b\perp a$，但不能保证$b\perp\alpha$，即不能推出$\alpha\perp\beta$.

答案：A

5. 解析：当 $a=3$ 时，$A=\{1,3\}$，$A\subseteq B$；反之，当 $A\subseteq B$ 时，$a=2$ 或 3，所以"$a=3$"是"$A\subseteq B$"的充分而不必要条件，选 A.

答案：A

6. 解析：$\because \neg p$是q的必要而不充分条件，$\therefore q\Rightarrow\neg p$，但$\neg p\nRightarrow q$，其逆否命题为$p\Rightarrow\neg q$，但$\neg q\nRightarrow p$，由于原命题与其逆否命题是等价命题，故选 A.

答案：A

模板 3　复合命题真假的判断

1. 解析：$\neg p$ 表示甲没有降落在指定范围，$\neg q$ 表示乙没有降落在指定范围，命题"至少有一位学员没有降落在指定范围"，也就是"甲没有降落在指定范围"或"乙没有降落在指定范围". 故选 A.

答案：A

2. 解析：由题意可知，命题p是真命题，q是假命题，则$\neg p$是假命题，$\neg q$是真命题，所以$(\neg p)\vee(\neg q)$是真命题.故选C.

答案：C

3. 解析：由"$\neg q$"为假命题得q为真命题，又"p且q"是假命题，所以p为假命题，$\neg p$为真命题. 所以命题"$\neg p$或q"是真命题，A 错；命题"p或q"是真命题，B 错；命题"p且$\neg q$"是假命题，D 错；命题"$\neg p$且q"是真命题，故选C.

答案：C

4. 解析：因为对任意实数 x，$|\sin x|\leqslant 1$，而 $\sin x=\dfrac{\sqrt{5}}{2}>1$，所以 p 为假；因为 $x^2+x+1=0$ 的判别式 $\Delta<0$，所以 q 为真. 因而②③正确.

答案：B

5. 解析：因为 $x^2+1<2x$，即 $x^2-2x+1<0$，也即$(x-1)^2<0$，所以命题 p 为假；若 $mx^2-mx-1<0$ 恒成立，则必须 $m=0$ 或$\begin{cases}m<0,\\ \Delta=m^2+4m<0,\end{cases}$则$-4<m\leqslant 0$，所以命题 q 为假，所以"p 或 q"为假命题. 故选 C.

答案：C

6. 解析：当 $a=1.1$，$x=2$ 时，

$a^x=1.1^2=1.21$，$\log_a x=\log_{1.1}2>\log_{1.1}1.21=2$，

此时，$a^x<\log_a x$，故 p 为假命题.

命题 q，由等差数列的性质，当 $m+n=p+q$ 时，$a_n+a_m=a_p+a_q$ 成立，

当公差 $d=0$ 时，由 $a_m+a_n=a_p+a_q$ 不能推出 $m+n=p+q$ 成立，故 q 是真命题.

故$\neg p$ 是真命题，$\neg q$ 是假命题，

所以 $p\wedge q$ 为假命题，$p\vee(\neg q)$为假命题，$(\neg p)\wedge(\neg q)$为假命题，$(\neg p)\vee(\neg q)$为真命题.

答案：B

模板 4　求含有一个量词的命题的否定

1. 解析：特称命题的否定是全称命题，其否定为 $\forall x\in\complement_{\mathbf{R}}\mathbf{Q}$，$x^3\notin\mathbf{Q}$.

答案：D

2. 解析:命题 p 为全称命题，所以其否定$\neg p$ 应是特称命题，又$[f(x_2)-f(x_1)](x_2-x_1)\geqslant 0$ 的否定为$[f(x_2)-f(x_1)](x_2-x_1)<0$，故选 C.

答案：C

3. 解析:特称命题的否定是全称命题. 故其否定为"任意一个无理数，它的平方不是有理数". 故选 B.

答案：B

4. 解析:全称命题的否定是特称命题，"都是"的否定是"不(都)是". 故其否定为"存在一个能被2整除的整数不是偶数".

答案：D

5. 解析:特称命题的否定是全称命题. "$2^n>1\ 000$"的否定即为"$2^n\leqslant 1\ 000$"，同时将存在量词"$\exists$"改为全称量词"$\forall$"，故选A.

答案：A

第二章　圆锥曲线与方程

模板 1　求轨迹方程

1. 解：设 $B(t,t^2)$，$P(x,y)$，$Q(x,y_0)$，$M(x,x^2)$，由$\overrightarrow{BQ}$

$=\lambda\overrightarrow{QA}$，得$(x-t,y_0-t^2)=\lambda(1-x,1-y_0)$，于是有

$$\begin{cases}x-t=\lambda(1-x), & ①\\ y_0-t^2=\lambda(1-y_0). & ②\end{cases}$$

由$\overrightarrow{QM}=\lambda\overrightarrow{MP}$，得$(0,x^2-y_0)=\lambda(0,y-x^2)$，

即$x^2-y_0=\lambda(y-x^2)$. ③

由②得$y_0=\dfrac{t^2+\lambda}{1+\lambda}$，代入③得

$x^2-\dfrac{t^2+\lambda}{1+\lambda}=\lambda(y-x^2)$，即$(1+\lambda)x^2-\dfrac{t^2+\lambda}{1+\lambda}=\lambda y$，

变形为$(1+\lambda)^2x^2-(t^2+\lambda)=\lambda(1+\lambda)y$. ④

由①得$t=(1+\lambda)x-\lambda$，代入④得

$(1+\lambda)^2x^2-[(1+\lambda)x-\lambda]^2-\lambda=\lambda(1+\lambda)y$，

即$2\lambda(1+\lambda)x-\lambda^2-\lambda=\lambda(1+\lambda)y$.

由$\lambda>0$，得$\lambda(1+\lambda)\neq0$，约去$\lambda(1+\lambda)$得$2x-1=y$.

故点P的轨迹方程为$y=2x-1$.

2. 解：(1)因为点B与点$A(-1,1)$关于原点O对称，所以点B的坐标为$(1,-1)$.

设点P的坐标为(x,y).由题意得$\dfrac{y-1}{x+1}\cdot\dfrac{y+1}{x-1}=-\dfrac{1}{3}$.

化简得$x^2+3y^2=4(x\neq\pm1)$.

故动点P的轨迹方程为$x^2+3y^2=4(x\neq\pm1)$.

(2)若存在点P使得$\triangle PAB$与$\triangle PMN$的面积相等，设点P的坐标为(x_0,y_0)，

则$\dfrac{1}{2}|PA||PB|\sin\angle APB=\dfrac{1}{2}|PM||PN|\sin\angle MPN$.

因为$\sin\angle APB=\sin\angle MPN$，所以$\dfrac{|PA|}{|PM|}=\dfrac{|PN|}{|PB|}$.

所以$\dfrac{|x_0+1|}{|3-x_0|}=\dfrac{|3-x_0|}{|x_0-1|}$，

即$(3-x_0)^2=|x_0^2-1|$，解得$x_0=\dfrac{5}{3}$.

因为$x_0^2+3y_0^2=4$，所以$y_0=\pm\dfrac{\sqrt{33}}{9}$.

故存在点P使得$\triangle PAB$与$\triangle PMN$的面积相等，此时点P的坐标为$\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{\sqrt{33}}{9}\right)$或$\left(\dfrac{5}{3},-\dfrac{\sqrt{33}}{9}\right)$.

模板2 求椭圆的标准方程

1. 解析：由题意设椭圆方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，根据椭圆定义有$2a=12$，即$a=6$. 又$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，得$c=3\sqrt{3}$，故$b^2=a^2-c^2=36-27=9$，故所求椭圆方程为$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

答案：$\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$

2. 解析：由题可设斜率存在的切线的方程为$y-\dfrac{1}{2}=k(x-1)$(k为切线的斜率)，即$2kx-2y-2k+1=0$，由$\dfrac{|-2k+1|}{\sqrt{4k^2+4}}=1$，解得$k=-\dfrac{3}{4}$，所以圆$x^2+y^2=1$的一条切线方程为$3x+4y-5=0$，求得切点$A\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$，易知另一切点$B(1,0)$，则直线$AB$的方程为$y=-2x+2$. 令$y=0$得右焦点为$(1,0)$，令$x=0$，得上顶点为$(0,2)$. 所以$a^2=b^2+c^2=5$. 故所求椭圆方程为$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

答案：$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$

3. 解：由$x^2+y^2-4x+2=0$得$(x-2)^2+y^2=2$，故圆C的圆心为点$(2,0)$.

从而可设椭圆E的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，其焦距为$2c$. 由题设知$c=2$，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$.

所以$a=2c=4$，$b^2=a^2-c^2=12$.

故椭圆E的方程为$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$.

4. 解：依题意，可设椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，且可知左焦点为$F'(-2,0)$.

从而有$\begin{cases}c=2,\\2a=|AF|+|AF'|=3+5=8,\end{cases}$解得$\begin{cases}c=2,\\a=4.\end{cases}$

又$a^2=b^2+c^2$，所以$b^2=12$，

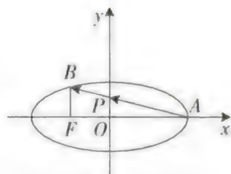
故椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$.

模板3 求椭圆的离心率

1. 解析：$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

答案：D

2. 解析：如图，由题意知$F(-c,0)$，$A(a,0)$.



$\because BF\perp x$轴$\therefore\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{OA}{OF}$

$=\frac{a}{c}$. 又 $\because \overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$,

$\therefore \frac{a}{c}=2$,即 $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$. 故选 D.

答案:D

3. 解析:设直线 $x=\frac{3a}{2}$ 与 x 轴的交点为 M.

$\because \triangle F_2PF_1$ 是底角为 30°的等腰三角形,

$\therefore \angle PF_2M=60°$, $|PF_2|=|F_1F_2|=2c$,

易知 $|F_2M|=\frac{1}{2}|PF_2|$,即 $\frac{3a}{2}-c=\frac{1}{2}\times 2c$,

$\therefore 2c=\frac{3}{2}a$, $\therefore e=\frac{3}{4}$.

答案:C

4. 解析:依题意得 $|F_1F_2|^2=|AF_1|\cdot|F_1B|$,即 $4c^2=(a-c)\cdot(a+c)=a^2-c^2$,整理得 $5c^2=a^2$,得 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

答案:$\frac{\sqrt{5}}{5}$

模板 4 求双曲线的标准方程

1. 解析:圆心的坐标是(3,0),圆的半径是 2,双曲线的渐近线方程是 $bx\pm ay=0$,

根据已知得 $\frac{3b}{\sqrt{a^2+b^2}}=2$,即 $\frac{3b}{3}=2$,解得 $b=2$,则 $a^2=3^2-2^2=5$,故所求的双曲线方程是 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$.

答案:A

2. 解析:由已知 $k_{AB}=k_{FN}=\frac{-15-0}{-12-3}=1$.

设 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,

$\therefore \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$, $\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1$,

则 $\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}-\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}=0$,

而 $\begin{cases}x_1+x_2=-24,\\ y_1+y_2=-30,\end{cases}$ $\therefore \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{4b^2}{5a^2}=1$,

$\therefore b^2=\frac{5}{4}a^2$. ①

又 $c^2=a^2+b^2=9$, ②

联立①②解得 $a^2=4$, $b^2=5$, $\therefore E$的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

答案:B

3. 解析:易得椭圆焦点为$(\pm\sqrt{7},0)$,离心率为 $\frac{\sqrt{7}}{4}$,

$\therefore$ 在双曲线中有 $a^2+b^2=7$ 且 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{2}$,

$\therefore a^2=4$, $b^2=3$. $\therefore$ 双曲线方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$.

答案:$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$

4. 解:设 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,由题意,得 $c=\sqrt{5}$,又 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$,因此 $a=2$, $b=\sqrt{c^2-a^2}=1$,

C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$.

C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$,

即 $x-2y=0$ 和 $x+2y=0$.

模板 5 求双曲线的离心率或渐近线方程

1. 解析:由双曲线的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ 可知, $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$,而双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{1}{2}x$,故选 C.

答案:C

2. 解析:依题意,设 $|PF_1|=4t$, $|F_1F_2|=3t$, $|PF_2|=2t$ $(t>0)$. 若曲线是椭圆,则$2a=|PF_1|+|PF_2|=6t$,此时离心率 $e=\frac{3t}{6t}=\frac{1}{2}$.

若曲线是双曲线,则$2a=|PF_1|-|PF_2|=2t$,此时离心率 $e=\frac{3t}{2t}=\frac{3}{2}$. 故选 A.

答案:A

3. 解析:由题意知直线 F_1B 的方程为 $y=\frac{b}{c}x+b$,联立方程组 $\begin{cases}y=\frac{b}{c}x+b,\\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0,\end{cases}$ 得点 $Q\left(\frac{ac}{c-a},\frac{bc}{c-a}\right)$,联立方程组 $\begin{cases}y=\frac{b}{c}x+b,\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0,\end{cases}$ 得点 $P\left(-\frac{ac}{c+a},\frac{bc}{c+a}\right)$, 所以

PQ的中点坐标为$\left(\frac{a^2c}{b^2},\frac{c^2}{b}\right)$，所以$PQ$的垂直平分线方程为$y-\frac{c^2}{b}=-\frac{c}{b}\left(x-\frac{a^2c}{b^2}\right)$，令$y=0$，得$x=c\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)$，又因为$|MF_2|=|F_1F_2|=2c$，所以$c\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)=3c$，所以$a^2=2b^2=2c^2-2a^2$，即$3a^2=2c^2$，所以$e=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

答案:B

4. 解析:焦点$F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$，

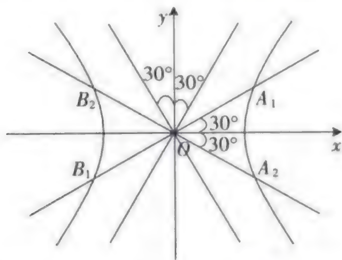
在Rt$\triangle AF_1F_2$中，$|AF_1|+|AF_2|=4$，①

$|AF_1|^2+|AF_2|^2=12$.②

联立①②可解得$|AF_2|-|AF_1|=2\sqrt{2}$，即$2a=2\sqrt{2}$，$2c=2\sqrt{3}$，故双曲线的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，故选D.

答案:D

5. 解析:如图，由双曲线的对称性知$|OA_1|=|OB_1|$，$|OA_2|=|OB_2|$，$\because |A_1B_1|=|A_2B_2|$，$\therefore |OA_1|=|OB_1|=|OA_2|=|OB_2|$，不妨设双曲线的焦点在$x$轴上，



$\because$ 有且只有一对相交于O，所成角为60°的直线A_1B_1和A_2B_2，$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{b}{a}\leqslant\sqrt{3}$.

$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$. $\therefore \frac{2\sqrt{3}}{3}<e\leqslant 2$，故选A.

答案:A

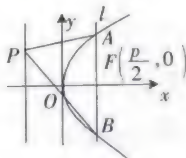
模板6 求抛物线的标准方程及定义的应用问题

1. 解析:设抛物线方程为$y^2=2px(p>0)$.

$\because$当$x=\frac{p}{2}$时，$|y|=p$，$\therefore p=\frac{|AB|}{2}=\frac{12}{2}=6$.

又P到AB的距离始终为p，

$\therefore S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\times 12\times 6=36$.



答案:C

2. 解析:设A，B两点的坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，则$x_1+x_2+p=8$. 设直线AB的方程为$y=x-\frac{p}{2}$，联立$y^2=2px$，消y得$x^2-3px+\frac{p^2}{4}=0$，$\therefore x_1+x_2=3p$.

$\therefore 3p+p=8$，$\therefore p=2$.

答案:2

3. 解析:由题意设抛物线的方程为$y^2=2px(p>0)$.

因为点$M(1,2)$在抛物线上，所以$2^2=2p\times 1$，

解得$p=2$. 所求抛物线方程为$y^2=4x$.

答案:$y^2=4x$

4. 解析:$\frac{p}{2}=1$，即$p=2$；准线方程:$x=-\frac{p}{2}=-1$.

答案:2　$x=-1$

模板7 利用抛物线的性质求面积或长度

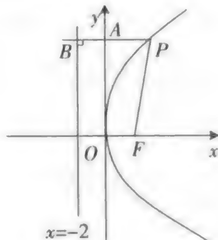
1. 解析:由题意知，抛物线$y^2=4x$的焦点为$F(1,0)$，准线方程为$l:x=-1$，可得A点的横坐标为2，不妨设$A(2,2\sqrt{2})$，则直线AB的方程为$y=2\sqrt{2}(x-1)$，与$y^2=4x$联立得$2x^2-5x+2=0$，可得$B\left(\frac{1}{2},-\sqrt{2}\right)$，所以$S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOF}+S_{\triangle BOF}=\frac{1}{2}\times 1\times|y_A-y_B|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

答案:C

2. 解析:抛物线$y^2=8x$的焦点是$F(2,0)$，准线$x=-2$，

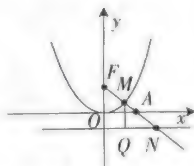
如图，$|PA|=4$，$|AB|=2$，

$\therefore |PB|=|PF|=6$. 故选B.



答案:B

3. 解析:直线 MF 的方程为 $\frac{x}{2}+\frac{y}{1}=1$,即 $x+2y-2=0$. 设直线 MF 的倾斜角为 α,则 $\tan\alpha=-\frac{1}{2}$. 由抛物线的定义得 $|MF|=|MQ|$. 所以 $\frac{|MF|}{|MN|}=\frac{|MQ|}{|MN|}=\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$. 故选 C.



答案:C

4. 解析:设直线 AB 的倾斜角为 θ,

则 $\begin{cases}|AF|=p+|AF|\cos\theta,\\|BF|=p-|BF|\cos\theta,\end{cases}$ 由 $|AF|=3,p=2$,得 $\cos\theta=\frac{1}{3}$, $\therefore|BF|=\frac{3}{2}$.

答案:$\frac{3}{2}$

模板 8 求直线与圆锥曲线相交时的弦长

1. 解:由已知得圆 M 的圆心为 $M(-1,0)$,半径 $r_1=1$;圆 N 的圆心为 $N(1,0)$,半径 $r_2=3$. 设圆 P 的圆心为 $P(x,y)$,半径为 R.

(1)因为圆 P 与圆 M 外切并且与圆 N 内切,所以 $|PM|+|PN|=(R+r_1)+(r_2-R)=r_1+r_2=4$.

由椭圆的定义可知,曲线 C 是以 M,N 为左、右焦点,长半轴长为 2,短半轴长为 $\sqrt{3}$ 的椭圆(左顶点除外),其方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(x\neq-2)$.

(2)对于曲线 C 上任意一点 $P(x,y)$,由于 $|PM|-|PN|=2R-2\leqslant2$,所以 $R\leqslant2$,当且仅当圆 P 的圆心为 $(2,0)$ 时,$R=2$.

所以当圆 P 的半径最长时,其方程为 $(x-2)^2+y^2=4$.

若 l 的倾斜角为 $90°$,则 l 与 y 轴重合,可得 $|AB|=2\sqrt{3}$.

若 l 的倾斜角不为 $90°$,由 $r_1\neq R$ 知 l 不平行于 x 轴,设 l 与 x 轴的交点为 Q,则 $\frac{|QP|}{|QM|}=\frac{R}{r_1}$,可求得 $Q(-4,0)$,所以可设 $l:y=k(x+4)$. 由 l 与圆 M 相切得 $\frac{|3k|}{\sqrt{1+k^2}}=1$,解得 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$.

当 $k=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时,将 $y=\frac{\sqrt{2}}{4}x+\sqrt{2}$ 代入 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,并整理得 $7x^2+8x-8=0$,解得 $x_{1,2}=\frac{-4\pm6\sqrt{2}}{7}$.

所以 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_2-x_1|=\frac{18}{7}$.

当 $k=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时,由图形的对称性可知 $|AB|=\frac{18}{7}$.

综上,$|AB|=2\sqrt{3}$ 或 $|AB|=\frac{18}{7}$.

2. 解:(1)由题设知,F_1,F_2 的坐标分别为 $(-2,0)$,$(2,0)$,圆 C 的半径为 2,圆心为原点 O 关于直线 $x+y-2=0$ 的对称点.

设圆心的坐标为 (x_0,y_0),

由 $\begin{cases}\frac{y_0}{x_0}=1,\\\frac{x_0}{2}+\frac{y_0}{2}-2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=2,\\y_0=2.\end{cases}$

所以圆 C 的方程为 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$.

(2)由题意,可设直线 l 的方程为 $x=my+2$,则圆心到直线 l 的距离 $d=\frac{|2m|}{\sqrt{1+m^2}}$.

所以 $b=2\sqrt{2^2-d^2}=\frac{4}{\sqrt{1+m^2}}$.

由 $\begin{cases}x=my+2,\\\frac{x^2}{5}+y^2=1\end{cases}$ 得 $(m^2+5)y^2+4my-1=0$.

设 l 与 E 的两个交点坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$,

则 $y_1+y_2=-\frac{4m}{m^2+5}$,$y_1y_2=-\frac{1}{m^2+5}$.

于是 $a=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$=\sqrt{(1+m^2)(y_1-y_2)^2}$

$=\sqrt{(1+m^2)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}$

$=\sqrt{(1+m^2)\left[\frac{16m^2}{(m^2+5)^2}+\frac{4}{m^2+5}\right]}=\frac{2\sqrt{5}(m^2+1)}{m^2+5}$.

从而 $ab=\frac{8\sqrt{5}\cdot\sqrt{m^2+1}}{m^2+5}=\frac{8\sqrt{5}\cdot\sqrt{m^2+1}}{(m^2+1)+4}=\frac{8\sqrt{5}}{\sqrt{m^2+1}+\frac{4}{\sqrt{m^2+1}}}\leqslant\frac{8\sqrt{5}}{2\sqrt{\sqrt{m^2+1}\cdot\frac{4}{\sqrt{m^2+1}}}}$

$=2\sqrt{5}$.

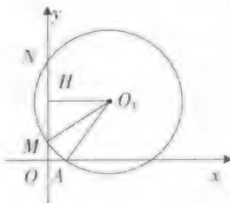
当且仅当 $\sqrt{m^2+1}=\frac{4}{\sqrt{m^2+1}}$,即 $m=\pm\sqrt{3}$ 时等

号成立.

故当 $m=\pm\sqrt{3}$ 时，ab 最大，此时，直线 l 的方程为 $x=\sqrt{3}y+2$ 或 $x=-\sqrt{3}y+2$，即 $x-\sqrt{3}y-2=0$，或 $x+\sqrt{3}y-2=0$.

模板 9　求直线与圆锥曲线的位置关系问题

1. 解：(1)如图，设动圆圆心 $O_1(x,y)$，由题意，$|O_1A|=|O_1M|$，当 O_1 不在 y 轴上时，过 O_1 作 $O_1H\perp MN$ 交 MN 于 H，则 H 是 MN 的中点，



$\therefore |O_1M|=\sqrt{x^2+4^2}$，又 $|O_1A|=\sqrt{(x-4)^2+y^2}$，

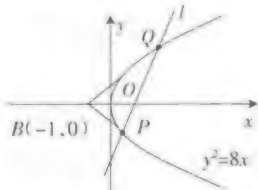
$\therefore \sqrt{(x-4)^2+y^2}=\sqrt{x^2+4^2}$，

化简得 $y^2=8x(x\neq0)$.

又当 O_1 在 y 轴上时，O_1 与 O 重合，点 O_1 的坐标 $(0,0)$ 也满足方程 $y^2=8x$，

$\therefore$ 动圆圆心的轨迹 C 的方程为 $y^2=8x$.

(2)由题意，设直线 l 的方程为 $y=kx+b(k\neq0)$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，



将 $y=kx+b$ 代入 $y^2=8x$ 中，得 $k^2x^2+(2bk-8)x+b^2=0$，其中 $\Delta=-32kb+64>0$.

由根与系数的关系得 $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{8-2bk}{k^2}, & ① \\ x_1x_2=\dfrac{b^2}{k^2}, & ② \end{cases}$

因为 x 轴是 $\angle PBQ$ 的角平分线，

所以 $\dfrac{y_1}{x_1+1}=-\dfrac{y_2}{x_2+1}$，即 $y_1(x_2+1)+y_2(x_1+1)=0$，

$(kx_1+b)(x_2+1)+(kx_2+b)(x_1+1)=0$，

$2kx_1x_2+(b+k)(x_1+x_2)+2b=0$，　③

将①②代入③，得 $2kb^2+(k+b)(8-2bk)+2k^2b=0$，

$\therefore k=-b$，此时 $\Delta>0$，

$\therefore$ 直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$，

$\therefore$ 直线 l 过定点 $(1,0)$.

2. 解：(1)由 $P\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ 在椭圆上，得 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1$.　①

依题设知 $a=2c$，则 $b^2=3c^2$.　②

②代入①解得 $c^2=1$，$a^2=4$，$b^2=3$.

故椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2)方法一：由题意可设直线 AB 的斜率为 k，则直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$.　③

代入椭圆方程 $3x^2+4y^2=12$ 并整理，得

$(4k^2+3)x^2-8k^2x+4(k^2-3)=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则有

$x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\dfrac{4(k^2-3)}{4k^2+3}$.　④

在方程③中令 $x=4$ 得，M 的坐标为 $(4,3k)$.

从而 $k_1=\dfrac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}$，$k_2=\dfrac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}$，$k_3=\dfrac{3k-\frac{3}{2}}{4-1}=k-\dfrac{1}{2}$.

由于 A，F，B 三点共线，

则有 $k=k_{AF}=k_{BF}$，即有 $\dfrac{y_1}{x_1-1}=\dfrac{y_2}{x_2-1}=k$.

所以 $k_1+k_2=\dfrac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1-1}+\dfrac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2-1}=\dfrac{y_1}{x_1-1}+\dfrac{y_2}{x_2-1}-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{x_1-1}+\dfrac{1}{x_2-1}\right)=2k-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{x_1+x_2-2}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}$.　⑤

④代入⑤得

$$k_1+k_2=2k-\frac{3}{2}\cdot\frac{\frac{8k^2}{4k^2+3}-2}{\frac{4(k^2-3)}{4k^2+3}-\frac{8k^2}{4k^2+3}+1}=2k-1,$$

又 $k_3=k-\dfrac{1}{2}$，所以 $k_1+k_2=2k_3$.

故存在常数 $\lambda=2$ 符合题意.

方法二：设 $B(x_0,y_0)(x_0\neq1)$，

则直线 FB 的方程为 $y=\dfrac{y_0}{x_0-1}(x-1)$，

令 $x=4$，求得 $M\left(4,\dfrac{3y_0}{x_0-1}\right)$，

从而直线 PM 的斜率为 $k_3=\dfrac{2y_0-x_0+1}{2(x_0-1)}$，

联立 $\begin{cases} y=\dfrac{y_0}{x_0-1}(x-1), \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 得 $A\left(\dfrac{5x_0-8}{2x_0-5},\dfrac{3y_0}{2x_0-5}\right)$.

则直线 PA 的斜率为 $k_1=\frac{2y_0-2x_0+5}{2(x_0-1)}$,

直线 PB 的斜率为 $k_2=\frac{2y_0-3}{2(x_0-1)}$,

所以 $k_1+k_2=\frac{2y_0-2x_0+5}{2(x_0-1)}+\frac{2y_0-3}{2(x_0-1)}=\frac{2y_0-x_0+1}{x_0-1}=$

$2k_3$,故存在常数 $\lambda=2$ 符合题意.

3. 解:(1)因为焦距为 4,所以 $a^2-b^2=4$. 又因为椭圆 C 过点 $P(\sqrt{2},\sqrt{3})$,所以 $\frac{2}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1$,故 $a^2=8$,

$b^2=4$,从而椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)由题意,E 点坐标为 $(x_0,0)$,设 $D(x_D,0)$,则 $\overrightarrow{AE}=(x_0,-2\sqrt{2})$,$\overrightarrow{AD}=(x_D,-2\sqrt{2})$,

再由 $AD\perp AE$ 知,$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}=0$,

即 $x_0x_D+8=0$. 由于 $x_0y_0\neq0$,故 $x_D=-\frac{8}{x_0}$.

因为点 G 是点 D 关于 y 轴的对称点,

所以点 $G\left(\frac{8}{x_0},0\right)$.

故直线 QG 的斜率 $k_{QG}=\frac{y_0}{x_0-\frac{8}{x_0}}=\frac{x_0y_0}{x_0^2-8}$.

又因 $Q(x_0,y_0)$ 在椭圆 C 上,

所以 $x_0^2+2y_0^2=8$. ①

从而 $k_{QG}=-\frac{x_0}{2y_0}$.

故直线 QG 的方程为 $y=-\frac{x_0}{2y_0}\left(x-\frac{8}{x_0}\right)$. ②

将②代入椭圆 C 的方程,得

$(x_0^2+2y_0^2)x^2-16x_0x+64-16y_0^2=0$. ③

再将①代入③,化简得

$x^2-2x_0x+x_0^2=0$.解得 $x=x_0$,$y=y_0$,

即直线 QG 与椭圆 C 一定有唯一的公共点.

4. 解:(1)由于 $c^2=a^2-b^2$,将 $x=-c$ 代入椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,得 $y=\pm\frac{b^2}{a}$,由题意知 $\frac{2b^2}{a}=1$,即 $a=2b^2$.

又 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $a=2$,$b=1$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)设 $P(x_0,y_0)(y_0\neq0)$,则 $-2<x_0<2$.

又 $F_1(-\sqrt{3},0)$,$F_2(\sqrt{3},0)$,

所以直线 PF_1,PF_2 的方程分别为

$l_{PF_1}: y_0x-(x_0+\sqrt{3})y+\sqrt{3}y_0=0$,

$l_{PF_2}: y_0x-(x_0-\sqrt{3})y-\sqrt{3}y_0=0$.

由题意知 $\frac{|my_0+\sqrt{3}y_0|}{\sqrt{y_0^2+(x_0+\sqrt{3})^2}}=\frac{|my_0-\sqrt{3}y_0|}{\sqrt{y_0^2+(x_0-\sqrt{3})^2}}$.

由于点 P 在椭圆上,所以 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$.

所以 $\frac{|m+\sqrt{3}|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_0+2\right)^2}}=\frac{|m-\sqrt{3}|}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x_0-2\right)^2}}$.

因为 $-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$,$-2<x_0<2$,

所以 $\frac{m+\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}x_0+2}=\frac{\sqrt{3}-m}{2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_0}$,所以 $m=\frac{3}{4}x_0$.

因此 $-\frac{3}{2}<m<\frac{3}{2}$.

(3)设 $P(x_0,y_0)(y_0\neq0)$,

则直线 l 的方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$.

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y-y_0=k(x-x_0),\end{cases}$ 整理得 $(1+4k^2)x^2+8(ky_0-k^2x_0)x+4(y_0^2-2kx_0y_0+k^2x_0^2-1)=0$.

由题意得 $\Delta=0$,即 $(4-x_0^2)k^2+2x_0y_0k+1-y_0^2=0$.

又 $\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$,所以 $16y_0^2k^2+8x_0y_0k+x_0^2=0$,故 $k=-\frac{x_0}{4y_0}$.

由(2)知 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{x_0+\sqrt{3}}{y_0}+\frac{x_0-\sqrt{3}}{y_0}=\frac{2x_0}{y_0}$,

所以 $\frac{1}{kk_1}+\frac{1}{kk_2}=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)=\left(-\frac{4y_0}{x_0}\right)\cdot\frac{2x_0}{y_0}=-8$,

因此 $\frac{1}{kk_1}+\frac{1}{kk_2}$ 为定值,这个定值为 -8.

第三章 空间向量与立体几何

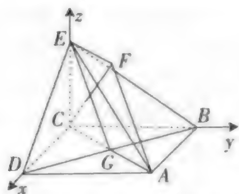
模板 1 用向量法证明平行或垂直

1. 证明:(1)设 AC 与 BD 交于点 G. 因为 $EF/\!/AG$,且 $EF=1$,$AG=\frac{1}{2}AC=1$,所以四边形 $AGEF$ 为平行四边形,所以 $AF/\!/EG$.

因为 $EG\subset$平面 BDE,$AF\not\subset$平面 BDE,

所以 $AF/\!/$平面 BDE.

(2)因为正方形 $ABCD$ 和四边形 $ACEF$ 所在的平面相互垂直,且 $CE\perp AC$,所以 $CE\perp$平面$ABCD$.



如图,以 C 为原点,建立空间直角坐标系 $C\text{-}xyz$.

则 $C(0,0,0)$,$A(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$,$B(0,\sqrt{2},0)$,

$D(\sqrt{2},0,0)$,$E(0,0,1)$,$F\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$.

所以$\overrightarrow{CF}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1\right)$,$\overrightarrow{BE}=(0,-\sqrt{2},1)$,

$\overrightarrow{DE}=(-\sqrt{2},0,1)$.

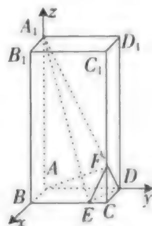
所以$\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{BE}=0-1+1=0$,$\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{DE}=-1+0+1=0$,

所以 $CF\perp BE$,$CF\perp DE$.

又$BE\cap DE=E$,且$BE\subset$平面BDE,$DE\subset$平面BDE,

所以 $CF\perp$平面 BDE.

2. 解:如图,建立空间直角坐标系,点 A 为坐标原点. 设 $AB=1$,依题意得 $D(0,2,0)$,$F(1,2,1)$,$A_1(0,0,4)$,$E\left(1,\frac{3}{2},0\right)$.



(1)易得$\overrightarrow{EF}=\left(0,\frac{1}{2},1\right)$,$\overrightarrow{A_1D}=(0,2,-4)$.

于是 $\cos\langle\overrightarrow{EF},\overrightarrow{A_1D}\rangle=\frac{\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{A_1D}}{|\overrightarrow{EF}||\overrightarrow{A_1D}|}=-\frac{3}{5}$.

所以异面直线 EF 与 A_1D 所成角的余弦值为$\frac{3}{5}$.

(2)证明:易知$\overrightarrow{AF}=(1,2,1)$,

$\overrightarrow{EA_1}=\left(-1,-\frac{3}{2},4\right)$,$\overrightarrow{ED}=\left(-1,\frac{1}{2},0\right)$,

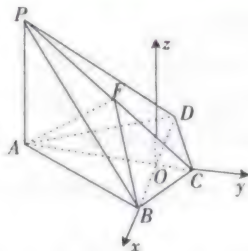
因为$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EA_1}=0$,$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{ED}=0$,

所以 $AF\perp EA_1$,$AF\perp ED$.

又 $EA_1\cap ED=E$,所以 $AF\perp$平面 A_1ED.

模板 2　用向量法求空间距离

1. 解:

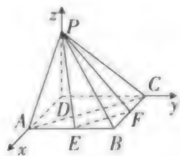


如图,连接 BD 交 AC 于 O,因为 $BC=CD$,即$\triangle BCD$为等腰三角形,又 AC 平分$\angle BCD$,故 $AC\perp BD$. 以 O 为坐标原点,OB,OC,AP 的方向分别为 x 轴,y 轴,z 轴的正方向,建立空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$,则 $OC=CD\cos\frac{\pi}{3}=1$,而 $AC=4$,得 $AO=AC-OC=3$,又 $OD=CD\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$,故 $A(0,-3,0)$,$B(\sqrt{3},0,0)$,$C(0,1,0)$,$D(-\sqrt{3},0,0)$. 因为 $PA\perp$底面 $ABCD$,可设 $P(0,-3,z)$,由 F 为 PC 边中点,$F\left(0,-1,\frac{z}{2}\right)$. 又$\overrightarrow{AF}=\left(0,2,\frac{z}{2}\right)$,$\overrightarrow{PB}=(\sqrt{3},3,-z)$,因为 $AF\perp PB$,故$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{PB}=0$,即 $6-\frac{z^2}{2}=0$,$z=2\sqrt{3}$(舍去$-2\sqrt{3}$),所以$\overrightarrow{PA}=(0,0,-2\sqrt{3})$,所以$\left|\overrightarrow{PA}\right|=2\sqrt{3}$.

2. 解:(1)建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $P(0,0,1)$,$A(1,0,0)$,$C(0,1,0)$,$E\left(1,\frac{1}{2},0\right)$,

$F\left(\frac{1}{2},1,0\right)$.



$\overrightarrow{PE}=\left(1,\frac{1}{2},-1\right)$,$\overrightarrow{PF}=\left(\frac{1}{2},1,-1\right)$,

设平面 PEF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+\frac{1}{2}y-z=0,\\ \frac{1}{2}x+y-z=0,\end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(2,2,3)$.

又$\overrightarrow{DE}=\left(1,\frac{1}{2},0\right)$,

则点 D 到平面 PEF 的距离为

$\frac{|\overrightarrow{DE}\cdot n|}{|n|}=\frac{3}{\sqrt{17}}=\frac{3\sqrt{17}}{17}$.

(2)由题意知 $EF/\!/AC$.

又 $EF\subset$ 平面 PEF, $AC\not\subset$ 平面 PEF, $\therefore AC/\!/$ 平面 PEF. 即可把直线 AC 到平面 PEF 的距离转化为点 A 到平面 PEF 的距离.

又 $\overrightarrow{AE}=\left(0,\frac{1}{2},0\right)$, 则点 A 到平面 PEF 的距离为

$d=\frac{|\overrightarrow{AE}\cdot n|}{|n|}=\frac{1}{\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{17}}{17}$.

模板 3　用向量法求空间角

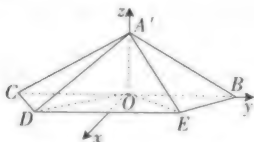
1. 解:(1)由题意,易得 $OC=3$, $AC=3\sqrt{2}$, $AD=2\sqrt{2}$.

连接 OD, OE. 在 $\triangle OCD$ 中,由余弦定理可得 $OD=\sqrt{OC^2+CD^2-2OC\cdot CD\cos45^\circ}=\sqrt{5}$.

由翻折不变性可知 $A'D=2\sqrt{2}$,

所以 $A'O^2+OD^2=A'D^2$, 所以 $A'O\perp OD$.

同理可证 $A'O\perp OE$, 又 $OD\cap OE=O$, 所以 $A'O\perp$ 平面 $BCDE$.



(2)以 O 点为原点,建立空间直角坐标系 $O-xyz$ 如图所示,则 $A'(0,0,\sqrt{3})$, $C(0,-3,0)$, $D(1,-2,0)$, 所以 $\overrightarrow{CA'}=(0,3,\sqrt{3})$, $\overrightarrow{DA'}=(-1,2,\sqrt{3})$. 设 $n=(x,y,z)$ 为平面 $A'CD$ 的法向量,则

$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{CA'}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{DA'}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}3y+\sqrt{3}z=0,\\ -x+2y+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}y=-x,\\ z=\sqrt{3}x.\end{cases}$

令 $x=1$, 得 $n=(1,-1,\sqrt{3})$, 即 $n=(1,-1,\sqrt{3})$ 为平面 $A'CD$ 的一个法向量.

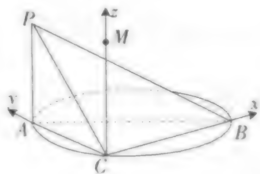
由(1)知, $\overrightarrow{OA'}=(0,0,\sqrt{3})$ 为平面 CDB 的一个法向量.

所以 $\cos\langle n,\overrightarrow{OA'}\rangle=\frac{n\cdot\overrightarrow{OA'}}{|n||\overrightarrow{OA'}|}=\frac{3}{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$, 即二面角 $A'-CD-B$ 的平面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

2. 解:(1)由 AB 是圆的直径,得 $AC\perp BC$, 由 $PA\perp$ 平面 ABC, $BC\subset$ 平面 ABC, 得 $PA\perp BC$. 又 $PA\cap AC=A$, $PA\subset$ 平面 PAC, $AC\subset$ 平面 PAC, 所以 $BC\perp$ 平面 PAC. 因为 $BC\subset$ 平面 PBC, 所以平面 $PBC\perp$ 平面 PAC.

(2)过 C 作 $CM/\!/AP$, 则 $CM\perp$ 平面 ABC.

如果,以点 C 为坐标原点,分别以直线 CB, CA, CM 为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系.



因为 $AB=2$, $AC=1$, 所以 $BC=\sqrt{3}$. 因为 $PA=1$,

所以 $A(0,1,0)$, $B(\sqrt{3},0,0)$, $P(0,1,1)$.

故 $\overrightarrow{CB}=(\sqrt{3},0,0)$, $\overrightarrow{CP}=(0,1,1)$. $\overrightarrow{AP}=(0,0,1)$, $\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},-1,0)$.

设平面 BCP 的法向量为 $n_1=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{CB}\cdot n_1=0,\\ \overrightarrow{CP}\cdot n_1=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}\sqrt{3}x_1=0,\\ y_1+z_1=0,\end{cases}$

不妨令 $y_1=1$, 则 $n_1=(0,1,-1)$.

设平面 ABP 的法向量为 $n_2=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AP}\cdot n_2=0,\\ \overrightarrow{AB}\cdot n_2=0,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}z_2=0,\\ \sqrt{3}x_2-y_2=0,\end{cases}$

不妨令 $x_2=1$, 则 $n_2=(1,\sqrt{3},0)$.

于是 $\cos\langle n_1,n_2\rangle=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$,

结合图形可得二面角 $C-PB-A$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

3. 解:(1)在 $\triangle ABD$ 中,因为 E 是 BD 中点,所以 $EA=EB=ED=AB=1$. 故 $\angle BAD=\frac{\pi}{2}$, $\angle ABE=\angle AEB=\frac{\pi}{3}$, 因为 $\triangle DAB\cong\triangle DCB$, 所以 $\triangle EAB\cong ECB$, 从而有 $\angle FED=\angle BEC=\angle AEB=\frac{\pi}{3}$,

所以 $\angle FED=\angle FEA$, 故 $EF\perp AD$, $AF=FD$. 因为 $PG=GD$, 所以 $FG/\!/PA$.

又 $PA\perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $GF\perp AD$, 故 $AD\perp$ 平面 CFG.

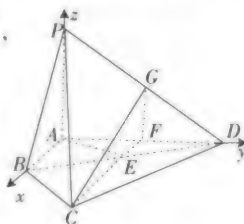
(2)以点 A 为坐标原点建立如图所示的空间直

角坐标系,则 $A(0,0,0)$,$B(1,0,0)$,$C\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,

$D(0,\sqrt{3},0)$,$P\left(0,0,\frac{3}{2}\right)$,故$\overrightarrow{BC}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$,

$\overrightarrow{CP}=\left(-\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$,

$\overrightarrow{CD}=\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$.



设平面 BCP 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_1=(1,y_1,z_1)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y_1=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CP}=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}y_1+\frac{3}{2}z_1=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}y_1=-\frac{\sqrt{3}}{3},\\ z_1=\frac{2}{3},\end{cases}$即 $\boldsymbol{n}_1=\left(1,-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2}{3}\right)$.

设平面 DCP 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_2=(1,y_2,z_2)$,

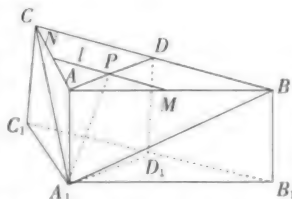
则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{CD}=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}y_2=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{CP}=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}y_2+\frac{3}{2}z_2=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}y_2=\sqrt{3},\\ z_2=2,\end{cases}$即 $\boldsymbol{n}_2=(1,\sqrt{3},2)$.

从而平面 BCP 与平面 DCP 的夹角的余弦值为

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{\frac{4}{3}}{\sqrt{\frac{16}{9}}\times\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

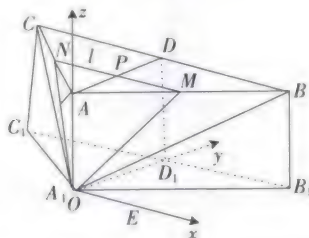
4. 解:(1)如图,在平面 ABC 内,过点 P 作直线 $l/\!/BC$,因为 l 在平面 A_1BC 外,BC 在平面 A_1BC 内,由直线与平面平行的判定定理可知,$l/\!/$平面 A_1BC.



由已知,$AB=AC$,D 是 BC 的中点,所以 $BC\perp AD$,则直线 $l\perp AD$. 因为 $AA_1\perp$平面 ABC,所以 $AA_1\perp$直线 l.

又 AD,AA_1 在平面 ADD_1A_1 内,且 AD 与 AA_1 相交,所以直线 $l\perp$平面 ADD_1A_1.

(2)设 $A_1A=1$. 如图,过 A_1 作 A_1E 平行于 B_1C_1,以 A_1 为坐标原点,分别以$\overrightarrow{A_1E}$,$\overrightarrow{A_1D_1}$,$\overrightarrow{A_1A}$的方向为 x 轴,y 轴,z 轴的正方向,建立空间直角坐标系 O-xyz(点 O 与点 A_1 重合).



则 $A_1(0,0,0)$,$A(0,0,1)$.

因为 P 为 AD 的中点,所以 M,N 分别为 AB,AC 的中点,故 $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right)$,$N\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right)$,

所以$\overrightarrow{A_1M}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right)$,$\overrightarrow{A_1A}=(0,0,1)$,$\overrightarrow{NM}=(\sqrt{3},0,0)$.

设平面 AA_1M 的法向量所为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{A_1M},\\ \boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{A_1A},\end{cases}$即$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{A_1M}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{A_1A}=0,\end{cases}$

从而$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x_1+\frac{1}{2}y_1+z_1=0,\\ z_1=0.\end{cases}$

取 $x_1=1$,则 $\boldsymbol{n}_1=(1,-\sqrt{3},0)$.

设平面 A_1MN 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{A_1M},\\ \boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{NM},\end{cases}$即$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{A_1M}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{NM}=0,\end{cases}$

从而$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x_2+\frac{1}{2}y_2+z_2=0,\\ \sqrt{3}x_2=0.\end{cases}$取 $y_2=2$,则 $\boldsymbol{n}_2=(0,2,-1)$.

设二面角 A-A_1M-N 的平面角为 θ,又 θ 为锐角,

则$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|(-\sqrt{3})\times2|}{2\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

故二面角 A-A_1M-N 的余弦值为$\frac{\sqrt{15}}{5}$.

选修2-2

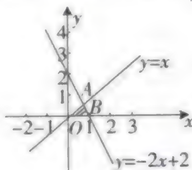
第一章　导数及其应用

模板 1　求函数在某点的导数

1. 解析:$y'=-2e^{-2x}$,曲线在点$(0,2)$处的切线斜率

$k=-2$,

$\therefore$ 切线方程为 $y=-2x+2$,该直线与直线 $y=0$ 和 $y=x$ 围成的三角形如图所示,



其中直线 $y=-2x+2$ 与 $y=x$ 的交点 $A\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$,所以三角形面积 $S=\frac{1}{2}\times1\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$,故选 A.

答案:A

2. 解析:由 $y=\frac{x}{x+2}$ 得 $y'=\frac{(x+2)-x}{(x+2)^2}=\frac{2}{(x+2)^2}$,所以在点$(-1,-1)$处切线的斜率 $k=y'|_{x=-1}=2$,由点斜式方程,得切线方程为 $y+1=2(x+1)$,即 $y=2x+1$.

答案:A

3. 解析:令 $x=1$ 得 $f(1)=1$,由 $f(2-x)=2x^2-7x+6$,两边求导可得 $f'(2-x)\cdot(2-x)'=4x-7$,令 $x=1$ 可得 $-f'(1)=-3$,即 $f'(1)=3$.

$\therefore$ 所求切线方程为 $y-1=3(x-1)$,即 $y=3x-2$.

答案:C

4. 解析:$\because f(x)=2f(2-x)-x^2+8x-8$, ①

$\therefore f(2-x)=2f(x)-(2-x)^2+8(2-x)-8$

$=2f(x)-x^2-4x+4$. ②

将②代入①,得

$f(x)=4f(x)-2x^2-8x+8-x^2+8x-8$. $\therefore f(x)=x^2$, $y'=2x$.

$\therefore y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线斜率为 $y'|_{x=1}=2$.

$\therefore$ 函数 $y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程为 $y-1=2(x-1)$,即 $y=2x-1$.

答案:A

5. 解析:因为 $f(e^x)=x+e^x$,所以 $f(x)=x+\ln x(x>0)$.

所以 $f'(x)=1+\frac{1}{x}$,所以 $f'(1)=2$.

答案:2

6. 解析:$y=\frac{x^2}{2}$, $y'=x$, $\therefore y'|_{x=4}=4$, $y'|_{x=-2}=-2$,点 P 的坐标为$(4,8)$,点 Q 的坐标为$(-2,2)$,$\therefore$ 在点 P 处的切线方程为 $y-8=4(x-4)$,即 $y=4x-8$.

在点 Q 处的切线方程为 $y-2=-2(x+2)$,即 $y=-2x-2$,解 $\begin{cases}y=4x-8,\\y=-2x-2,\end{cases}$ 得 $A(1,-4)$,则点 A 的纵坐标为-4.

答案:-4

模板 2 已知切线方程求参数的值

1. 解析:$\because$ 点$(0,b)$在直线 $x-y+1=0$ 上,$\therefore b=1$.

又 $y'=2x+a$,

$\therefore$ 过点$(0,b)$的切线的斜率为 $y'|_{x=0}=a=1$.

答案:A

2. 解析:由题意得,函数在 $x=1$ 处的切线斜率为1,且切点为$(1,1)$,$y'=3ax^2+b$,故 $\begin{cases}a+b-1=1,\\3a+b=1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\b=\frac{5}{2},\end{cases}$ 即 $b-a=3$,故选 C.

答案:C

3. 解析:由题意得 $y=kx+1$ 过点 $A(1,2)$,

$\therefore 2=k+1$,即 $k=1$.$\because$ 曲线 $y'=3x^2+a$,又 $\because y'|_{x=1}=3+a=k=1$,$\therefore a=-2$,将点$(1,2)$代入曲线方程 $y=x^3+ax+b$,解得 $b=3$. $\therefore a^b=(-2)^3=-8$. 故选 A.

答案:A

4. 解:$f'(x)=1+2ax+\frac{b}{x}$.

由已知条件得 $\begin{cases}f(1)=0,\\f'(1)=2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}1+a=0,\\1+2a+b=2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=3.\end{cases}$

5. 解:$\because f(x)=ax^2+1$, $\therefore f'(x)=2ax$, $\therefore f'(1)=2a$.

又 $f(1)=c=a+1$,$\therefore f(x)$在点$(1,c)$处的切线方程为 $y-c=2a(x-1)$,即 $y-2ax+a-1=0$.

$\because g(x)=x^3+bx$, $\therefore g'(x)=3x^2+b$, $\therefore g'(1)=3+b$.

又 $g(1)=1+b=c$,$\therefore g(x)$在点$(1,c)$处的切线方程为 $y-(1+b)=(3+b)(x-1)$,即 $y-(3+b)x+2=0$.

依题意知 $3+b=2a$,且 $a-1=2$,解得 $a=3$, $b=3$.

模板 3 求函数的单调区间

1. 解析:$\because f(x)=(x-3)e^x$, $\therefore f'(x)=e^x(x-2)>0$, $\therefore x>2$.

$\therefore f(x)$的单调递增区间为$(2,+\infty)$,故选 D.

答案:D

2. 解析:由 $f(x)>2x+4$ 得 $f(x)-2x>4$,令 $g(x)=f(x)-2x$,则 $g'(x)=f'(x)-2>0$,

$\therefore g(x)$在 $\mathbf{R}$ 上为增函数,又 $g(-1)=f(-1)+2=4$,即 $g(x)>g(-1)$,$\therefore x>-1$,故选 B.

答案:B

3. 解:由题意知 $x>0$.

当 $a=1$ 时,$f(x)=\ln x$,其在 $(0,+\infty)$ 上为增函数.

当 $a\neq 1$ 时,$f'(x)=\frac{1}{x}+2a(1-a)x-2(1-a)$

$=\frac{2a(1-a)x^2-2(1-a)x+1}{x}$,

令 $f'(x)=0$ 得 $2a(1-a)x^2-2(1-a)x+1=0$.

由 $\Delta=4(1-a)^2-8a(1-a)=0$,得 $a=\frac{1}{3}$(另一根舍去).

(1)当 $0<a<\frac{1}{3}$ 时,

$2a(1-a)x^2-2(1-a)x+1=0$ 的判别式 $\Delta>0$,两根分别为 $x_1=\frac{1-a-\sqrt{(1-a)(1-3a)}}{2a(1-a)}$,

$x_2=\frac{1-a+\sqrt{(1-a)(1-3a)}}{2a(1-a)}$.

又 $[\sqrt{(1-a)(1-3a)}]^2-(1-a)^2=2a(a-1)<0$,

所以 $x_1>0$ 且 $x_2>x_1$.所以当 $0<x<x_1$ 或 $x>x_2$ 时,$f'(x)>0$;当 $x_1<x<x_2$ 时,$f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1-a-\sqrt{(1-a)(1-3a)}}{2a(1-a)}\right)$,

$\left(\frac{1-a+\sqrt{(1-a)(1-3a)}}{2a(1-a)},+\infty\right)$ 上为增函数,

在 $\left(\frac{1-a-\sqrt{(1-a)(1-3a)}}{2a(1-a)},\frac{1-a+\sqrt{(1-a)(1-3a)}}{2a(1-a)}\right)$ 上为减函数.

(2)当 $a=\frac{1}{3}$ 时,$f'(x)\geq 0$,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数.

(3)当 $\frac{1}{3}<a<1$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数.

(4)当 $a>1$ 时,$x_1>0$,

$x_2=\frac{1-a+\sqrt{(1-a)(1-3a)}}{2a(1-a)}=\frac{a-1-\sqrt{(1-a)(1-3a)}}{2a(a-1)}<0$. 故当 $0<x<x_1$ 时,$f'(x)>0$;当 $x>x_1$ 时,$f'(x)<0$.

$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1-a-\sqrt{(1-a)(1-3a)}}{2a(1-a)}\right)$ 上为增函数,

在 $\left(\frac{1-a-\sqrt{(1-a)(1-3a)}}{2a(1-a)},+\infty\right)$ 上为减函数.

综上可知:

(1)当 $0<a<\frac{1}{3}$ 时,

$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1-a-\sqrt{(1-a)(1-3a)}}{2a(1-a)}\right)$,

$\left(\frac{1-a+\sqrt{(1-a)(1-3a)}}{2a(1-a)},+\infty\right)$ 上为增函数,

在 $\left(\frac{1-a-\sqrt{(1-a)(1-3a)}}{2a(1-a)},\frac{1-a+\sqrt{(1-a)(1-3a)}}{2a(1-a)}\right)$ 上为减函数;

(2)当 $\frac{1}{3}\leq a\leq 1$ 时,$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数;

(3)当 $a>1$ 时,

$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1-a-\sqrt{(1-a)(1-3a)}}{2a(1-a)}\right)$ 上为增函数,

在 $\left(\frac{1-a-\sqrt{(1-a)(1-3a)}}{2a(1-a)},+\infty\right)$ 上为减函数.

4. 证明:(1)设函数 $f_1(x)=x^3-(a+5)x(x\leq 0)$,$f_2(x)=x^3-\frac{a+3}{2}x^2+ax(x>0)$,

①$f_1'(x)=3x^2-(a+5)$,由 $a\in[-2,0]$,从而当 $-1<x\leq 0$ 时,$f_1'(x)=3x^2-(a+5)<3-a-5\leq 0$,所以函数 $f_1(x)$ 在区间 $(-1,0]$ 内单调递减.

②$f_2'(x)=3x^2-(a+3)x+a=(3x-a)(x-1)$,由于 $a\in[-2,0]$,所以当 $0\leq x<1$ 时,$f_2'(x)<0$;当 $x>1$ 时,$f_2'(x)>0$.

即函数 $f_2(x)$ 在区间 $[0,1)$ 内单调递减,在区间 $(1,+\infty)$ 内单调递增.

综合①②及 $f_1(0)=f_2(0)$,可知函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内单调递减,在区间 $(1,+\infty)$ 内单调递增.

(2)由(1)知 $f'(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内单调递减,在区间 $\left(0,\frac{a+3}{6}\right)$ 内单调递减,在区间 $\left(\frac{a+3}{6},+\infty\right)$ 内单调递增.

因为曲线 $y=f(x)$ 在点 $P_i(x_i,f(x_i))(i=1,2,3)$ 处的切线相互平行,从而 x_1,x_2,x_3 互不相等,且 $f'(x_1)=f'(x_2)=f'(x_3)$.不妨设 $x_1<0<x_2<\frac{a+3}{6}<x_3$,由 $3x_1^2-(a+5)=3x_2^2-(a+3)x_2+a=3x_3^2-(a+3)x_3+a$,

可得 $3x_2^2-3x_3^2-(a+3)(x_2-x_3)=0$,解得 $x_2+x_3=\frac{a+3}{3}$.

设 $g(x)=3x^2-(a+3)x+a$,则 $g\left(\frac{a+3}{6}\right)<g(x_2)<g(0)=a$.

由 $3x_1^2-(a+5)=g(x_2)<a$,解得 $-\sqrt{\frac{2a+5}{3}}<x_1<0$,

所以 $x_1+x_2+x_3>-\sqrt{\frac{2a+5}{3}}+\frac{a+3}{3}$,

设 $t=\sqrt{\frac{2a+5}{3}}$，则 $a=\frac{3t^2-5}{2}$，因为 $a\in[-2,0]$，

所以 $t\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{15}}{3}\right]$，故 $x_1+x_2+x_3>-t+\frac{3t^2+1}{6}=\frac{1}{2}(t-1)^2-\frac{1}{3}\geqslant-\frac{1}{3}$，即 $x_1+x_2+x_3>-\frac{1}{3}$.

模板 4　求函数的极值

1. 解析：当 $k=1$ 时，$f(x)=(e^x-1)(x-1)$，则 $f(1)=0$，当 $0<x<1$ 时，$f(x)<0$，当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，故 $x=1$ 不会是极值点.
当 $k=2$ 时，$f(x)=(e^x-1)(x-1)^2$，$f'(x)=(x-1)(e^xx+e^x-2)$，$f'(1)=0$. 当 $\ln2<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$.故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取到极小值.
答案：C

2. 解析：①当 $x<-2$ 时，$1-x>0$.
$\because(1-x)f'(x)>0$，
$\therefore f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上是增函数.
②当 $-2<x<1$ 时，$1-x>0$.
$\because(1-x)f'(x)<0$，
$\therefore f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $(-2,1)$ 上是减函数.
③当 $1<x<2$ 时，$1-x<0$.
$\because(1-x)f'(x)>0$，$\therefore f'(x)<0$
即 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上是减函数.
④当 $x>2$ 时，$1-x<0$.
$\because(1-x)f'(x)<0$，
$\therefore f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上是增函数.
综上，$f(-2)$ 为极大值，$f(2)$ 为极小值.
答案：D

3. 解析：$y'=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$，令 $y'=0$ 得 $x=e$，且当 $1<x<e$ 时，$y'<0$；当 $x>e$ 时，$y'>0$，所以函数在 $x=e$ 处取得极小值，即函数在区间 $(1,+\infty)$ 上有极小值，故选 C.
答案：C

4. 解析：从图象上可以看到，当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(1,2)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 有两个极值点 1 和 2，且当 $x=2$ 时函数取得极小值，当 $x=1$ 时函数取得极大值.故只有①不正确.
答案：①

5. 解：(1)由 $f(x)=x-1+\frac{a}{e^x}$，得 $f'(x)=1-\frac{a}{e^x}$.
又曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线平行于 x 轴，则 $f'(1)=0$，即 $1-\frac{a}{e}=0$，解得 $a=e$.
(2) $f'(x)=1-\frac{a}{e^x}$.
①当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的增函数，所以函数 $f(x)$ 无极值.
②当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $e^x=a$，$x=\ln a$.
$x\in(-\infty,\ln a)$，$f'(x)<0$；$x\in(\ln a,+\infty)$，$f'(x)>0$，
所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增，
故 $f(x)$ 在 $x=\ln a$ 处取得极小值，且极小值为 $f(\ln a)=\ln a$，无极大值.
综上，当 $a\leqslant0$ 时，函数 $f(x)$ 无极值；
当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $x=\ln a$ 处取得极小值 $\ln a$，无极大值.

6. 解：(1)由题设知 $f'(x)=3x^2+2ax+b$，且 $f'(-1)=3-2a+b=0$，$f'(1)=3+2a+b=0$，解得 $a=0$，$b=-3$.
(2)由(1)知 $f(x)=x^3-3x$.
因为 $f(x)+2=(x-1)^2(x+2)$，所以 $g'(x)=0$ 的根为 $x_1=x_2=1$，$x_3=-2$，
当 $x<-2$ 时，$g'(x)<0$；当 $-2<x<1$ 时，$g'(x)>0$，故 -2 是 $g(x)$ 的极值点.
当 $-2<x<1$ 或 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，故 1 不是 $g(x)$ 的极值点.
所以 $g(x)$ 的极值点为 -2.

模板 5　求函数的最值

1. 解析：$f'(x)=x^3+x^2+x=x(x^2+x+1)$.令 $f'(x)=0$，解得 $x=0$. $\because f(-1)=\frac{5}{12}$，$f(0)=0$，$f(1)=\frac{13}{12}$，
$\therefore f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上最小值为 0. 故选 A.
答案：A

2. 解析：令 $y'=1-2\sin x=0$，得 $x=\frac{\pi}{6}$.
$\because$ 当 $x=0$ 时，$y=2$；当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$y=\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$；
当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$y=\frac{\pi}{2}$. $\therefore y_{max}=\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$.
答案：$\sqrt{3}+\frac{\pi}{6}$

3. 解：$f'(x)=\ln x+1(x>0)$，

令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{e}$.

$\therefore$ 当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$时，$f'(x)<0$；

当 $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$时 $f'(x)>0$，

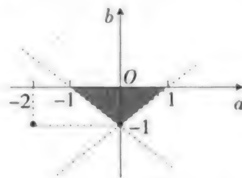
$\therefore$ 当 $x=\frac{1}{e}$时，$f(x)_{min}=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}$.

4. 解：(1)因为 $f(x)=ax^3+bx+c$，故 $f'(x)=3ax^2+b$.
由于 $f(x)$在点 $x=2$ 处取得极值 $c-16$，
故有 $\begin{cases}f'(2)=0,\\ f(2)=c-16,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}12a+b=0,\\ 8a+2b+c=c-16,\end{cases}$
化简得 $\begin{cases}12a+b=0,\\ 4a+b=-8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=-12.\end{cases}$
(2)由(1)知 $f(x)=x^3-12x+c$，$f'(x)=3x^2-12=3(x-2)(x+2)$. 令 $f'(x)=0$，得 $x_1=-2$，$x_2=2$.
当 $x\in(-\infty,-2)$时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$在$(-\infty,-2)$上为增函数；
当 $x\in(-2,2)$时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$在$(-2,2)$上为减函数；
当 $x\in(2,+\infty)$时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$在$(2,+\infty)$上为增函数.
由此可知 $f(x)$在 $x=-2$ 处取得极大值 $f(-2)=16+c$，$f(x)$在 $x=2$ 处取得极小值 $f(2)=c-16$.
由题设条件知 $16+c=28$，解得 $c=12$.
此时 $f(-3)=9+c=21$，$f(3)=-9+c=3$，$f(2)=-16+c=-4$，
因此 $f(x)$在$[-3,3]$上的最小值为 $f(2)=-4$.

5. 解：(1)由 $f(0)=1$，$f(1)=0$，得 $c=1$，$a+b=-1$，则 $f(x)=[ax^2-(a+1)x+1]e^x$，$f'(x)=[ax^2+(a-1)x-a]e^x$.
依题意需对任意 $x\in(0,1)$，有 $f'(x)<0$.
当 $a>0$ 时，因为二次函数 $y=ax^2+(a-1)x-a$ 的图象开口向上. 而 $f'(0)=-a<0$，所以需 $f'(1)=(a-1)e\leqslant0$，即 $0<a\leqslant1$.
当 $a=0$ 时，对任意 $x\in(0,1)$有 $f'(x)=-xe^x<0$，$f(x)$符合条件；
当 $a<0$ 时，因为 $f'(0)=-a>0$，$f(x)$不符合条件.
故 a 的取值范围为 $0\leqslant a\leqslant1$.
(2)因为 $g(x)=(-2ax+1+a)e^x$，
所以 $g'(x)=(-2ax+1-a)e^x$.
(ⅰ)当 $a=0$ 时，$g'(x)=e^x>0$，$g(x)$在 $x=0$ 处取最小值 $g(0)=1$，在 $x=1$ 处取得最大值 $g(1)=e$.
(ⅱ)当 $a=1$ 时，对于任意 $x\in(0,1)$有 $g'(x)=-2xe^x<0$，$g(x)$在 $x=0$ 处取得最大值 $g(0)=2$，在 $x=1$ 处取得最小值 $g(1)=0$.
(ⅲ)当 $0<a<1$ 时，由 $g'(x)=0$ 得 $x=\frac{1-a}{2a}>0$.
①若 $\frac{1-a}{2a}\geqslant1$，即 $0<a\leqslant\frac{1}{3}$时，$g(x)$在$[0,1]$上单调递增，$g(x)$在 $x=0$ 处取得最小值 $g(0)=1+a$，在 $x=1$ 处取得最大值 $g(1)=(1-a)e$.
②若 $\frac{1-a}{2a}<1$，即 $\frac{1}{3}<a<1$ 时，$g(x)$在 $x=\frac{1-a}{2a}$处取得最大值 $g\left(\frac{1-a}{2a}\right)=2ae^{\frac{1-a}{2a}}$，在 $x=0$ 或 $x=1$ 处取得最小值.而 $g(0)=1+a$，$g(1)=(1-a)e$.
则当 $\frac{1}{3}<a\leqslant\frac{e-1}{e+1}$时，$g(x)$在 $x=0$ 处取得最小值 $g(0)=1+a$；当 $\frac{e-1}{e+1}<a<1$ 时，$g(x)$在 $x=1$ 处取得最小值 $g(1)=(1-a)e$.

模板 6　求参数的值或取值范围

1. 解析：对于 $f'(x)=x^2+ax+b$，由于 x_1 和 x_2 分别为 $f(x)$的极大值点和极小值点，则根据实根分布应有 $\begin{cases}f'(-1)>0,\\ f'(0)<0,\\ f'(1)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1-a+b>0,\\ b<0,\\ 1+a+b>0,\end{cases}$
画出不等式组表示的可行域，如图中阴影部分(不包括边界).



由于 $\frac{a+2b+4}{a+2}=\frac{a+2+2b+2}{a+2}=1+2\times\frac{b+1}{a+2}$，
令 $k=\frac{b+1}{a+2}=\frac{b-(-1)}{a-(-2)}$，根据图可知 $k\in(0,1)$，
则有 $2k\in(0,2)$，故 $\frac{a+2b+4}{a+2}\in(1,3)$，故选 B.
答案：B

2. 解析：由题意知当 $x<1$ 时，$g(x)<0$，故要使对 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)<0$ 或 $g(x)<0$，只需在 $x\geqslant1$ 时，$f(x)<0$ 恒成立即可.

①当 $m=0$ 时，$f(x)<0$ 等价于 $0<0$ 显然不成立，舍去；

②当 $m>0$ 时，$f(x)<0$ 等价于 $(x-2m)(x+m+3)<0$ 得 $-m-3<x<2m$，对 $x\geqslant1$ 不可能恒成立，故舍去；

③当 $m<0$ 时，$f(x)<0$ 等价于 $(x-2m)(x+m+3)>0$，因为 $x\geqslant1$，$-2m>0$，所以 $x-2m>0$，于是不等式转化为 $m>-x-3$，又 $x\geqslant1$ 时，$-x-3\leqslant-4$，所以要使 $m>-x-3$ 在 $x\geqslant1$ 时恒成立，只需 $m>-4$，故 $-4<m<0$. 综上，$-4<m<0$.

答案：$(-4,0)$

3. 解：(1)由 $f'(x)=-x^2+x+2a=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}+2a$，当 $x\in\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$ 时，$f'(x)$ 的最大值为 $f'\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{9}+2a$. 令 $\frac{2}{9}+2a>0$，得 $a>-\frac{1}{9}$. 所以，当 $a>-\frac{1}{9}$ 时，$f(x)$ 在 $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$ 上存在单调递增区间.

(2)令 $f'(x)=0$，

得两根 $x_1=\frac{1-\sqrt{1+8a}}{2}$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1+8a}}{2}$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_1)$，$(x_2,+\infty)$ 上单调递减，在 (x_1,x_2) 上单调递增.

当 $0<a<2$ 时，有 $x_1<1<x_2<4$，所以 $f(x)$ 在 $[1,4]$ 上的最大值为 $f(x_2)$，

又 $f(4)-f(1)=-\frac{27}{2}+6a<0$，即 $f(4)<f(1)$.

所以 $f(x)$ 在 $[1,4]$ 上的最小值为 $f(4)=8a-\frac{40}{3}=-\frac{16}{3}$，得 $a=1$，$x_2=2$，从而 $f(x)$ 在 $[1,4]$ 上的最大值为 $f(2)=\frac{10}{3}$.

4. 解：(1)$f'(x)=\frac{1}{k}(x^2-k^2)e^{\frac{x}{k}}$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\pm k$.

当 $k>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-k)$ 和 $(k,+\infty)$ 上递增，在 $(-k,k)$ 上递减；

当 $k<0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,k)$ 和 $(-k,+\infty)$ 上递减，在 $(k,-k)$ 上递增.

(2)当 $k>0$ 时，$f(k+1)=e^{\frac{k+1}{k}}>\frac{1}{e}$；所以不可能对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 都有 $f(x)\leqslant\frac{1}{e}$；当 $k<0$ 时由(1)知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最大值为 $f(-k)=\frac{4k^2}{e}$，所以对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 都有 $f(x)\leqslant\frac{1}{e}$.

即 $\frac{4k^2}{e}\leqslant\frac{1}{e}$，解得 $-\frac{1}{2}\leqslant k<0$，故对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 都有 $f(x)\leqslant\frac{1}{e}$ 时，k 的取值范围为 $\left[-\frac{1}{2},0\right)$.

5. 解：(1)证明：要证 $x\in[0,1]$ 时，$(1+x)e^{-2x}\geqslant1-x$，只需证明 $(1+x)\cdot e^{-x}\geqslant(1-x)e^x$.

记 $h(x)=(1+x)e^{-x}-(1-x)e^x$，则 $h'(x)=x(e^x-e^{-x})$，当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，因此 $h(x)$ 在 $[0,1]$ 上是增函数，故 $h(x)\geqslant h(0)=0$.

所以 $f(x)\geqslant1-x$，$x\in[0,1]$.

要证 $x\in[0,1]$ 时，$(1+x)e^{-2x}\leqslant\frac{1}{1+x}$，只需证明 $e^x\geqslant x+1$.

记 $K(x)=e^x-x-1$，则 $K'(x)=e^x-1$，当 $x\in(0,1)$ 时，$K'(x)>0$，因此 $K(x)$ 在 $[0,1]$ 上是增函数，故 $K(x)\geqslant K(0)=0$. 所以 $f(x)\leqslant\frac{1}{1+x}$，$x\in[0,1]$.

综上，$1-x\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{1+x}$，$x\in[0,1]$.

(2)$f(x)-g(x)=(1+x)e^{-2x}-\left(ax+\frac{x^3}{2}+1+2x\cos x\right)\geqslant1-x-ax-1-\frac{x^3}{2}-2x\cos x=-x\left(a+1+\frac{x^2}{2}+2\cos x\right)$.

设 $G(x)=\frac{x^2}{2}+2\cos x$，则 $G'(x)=x-2\sin x$.

记 $H(x)=x-2\sin x$，则 $H'(x)=1-2\cos x$，当 $x\in(0,1)$ 时，$H'(x)<0$，于是 $G'(x)$ 在 $[0,1]$ 上是减函数，从而当 $x\in(0,1)$ 时，$G'(x)<G'(0)=0$，

故 $G(x)$ 在 $[0,1]$ 上是减函数.

于是 $G(x)\leqslant G(0)=2$，从而 $a+1+G(x)\leqslant a+3$.

所以，当 $a\leqslant-3$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$ 在 $[0,1]$ 上恒成立.

下面证明，当 $a>-3$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$ 在 $[0,1]$ 上不恒成立.

$f(x)-g(x)\leqslant\frac{1}{1+x}-1-ax-\frac{x^3}{2}-2x\cos x=\frac{-x}{1+x}-ax-\frac{x^3}{2}-2x\cos x=-x\left(\frac{1}{1+x}+a+\frac{x^2}{2}+2\cos x\right)$，

记 $I(x)=\frac{1}{1+x}+a+\frac{x^2}{2}+2\cos x=\frac{1}{1+x}+a+G(x)$，则

$I'(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}+G'(x)$，当 $x\in(0,1)$ 时，$I'(x)<0$.

故 $I(x)$ 在 $[0,1]$ 上是减函数，于是 $I(x)$ 在 $[0,1]$ 上的值域为 $[a+1+2\cos1,a+3]$.

因为当 $a>-3$ 时，$a+3>0$，所以存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $I(x_0)>0$，此时 $f(x_0)<g(x_0)$，即 $f(x)\geqslant g(x)$ 在 $[0,1]$ 上不恒成立.

综上，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-3]$.

模板 7 定积分求值

1. 解析：$\because \int_2^4\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_2^4=\ln4-\ln2=\ln2^2-\ln2=2\ln2-\ln2=\ln2$.

答案：D

2. 解析：$\because(x+\sin x)'=1+\cos x$，$\therefore\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)dx=(x+\sin x)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}-\left[-\frac{\pi}{2}+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\pi+2$.

答案：D

3. 解析：$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1x^2dx+\int_1^2(2-x)dx$

$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+\left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2$

$=\frac{1}{3}+\left(4-2-2+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{6}$.

答案：C

4. 解析：$f(2\ 013)=f(503\times4+1)=f(1)=e+\int_1^2\frac{1}{t}dt=e+\ln t\Big|_1^2=e+\ln2$.

答案：D

5. 解析：$\because f(1)=\lg1=0$，

$\therefore f[f(1)]=f(0)=0+\int_0^a3t^2dt=t^3\Big|_0^a=a^3$，$\therefore a^3=1$，得 $a=1$.

答案：1

6. 解析：$\because\int_{-1}^1f(x)dx=\int_{-1}^1(3x^2+2x+1)dx=(x^3+x^2+x)\Big|_{-1}^1=4$，所以 $2(3a^2+2a+1)=4$，即 $3a^2+2a-1=0$，

$\therefore a=-1$（舍）或 $a=\frac{1}{3}$.

答案：$\frac{1}{3}$

模板 8 求曲边图形的面积

1. 解析：令 $v(t)=7-3t+\frac{25}{1+t}=0$，解得 $t=4$，故继续行驶的距离

$s=\int_0^4\left(7-3t+\frac{25}{1+t}\right)dt=\left[7t-\frac{3}{2}t^2+25\ln(1+t)\right]\Big|_0^4$

$=4+25\ln5$.

答案：C

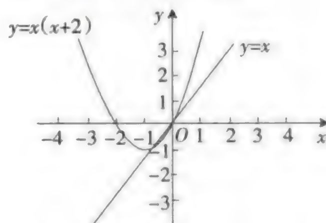
2. 解析：根据定积分的定义，所围成的封闭图形的面积为 $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\cos x dx=\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}=\sin\frac{\pi}{3}-\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$.

答案：D

3. 解析：由 $\begin{cases}y=x^2,\\y=x^3,\end{cases}$ 得交点坐标为 $(0,0)$，$(1,1)$，因此所求图形面积为 $S=\int_0^1(x^2-x^3)dx=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Big|_0^1=\frac{1}{12}$.

答案：A

4. 解析：如图阴影部分即为所求.



求得直线 $y=x$ 与抛物线 $y=x(x+2)$ 的交点为 $(-1,-1)$ 和 $(0,0)$.

$\therefore$ 面积 $S_{阴}=\int_{-1}^0[x-x(x+2)]dx$

$=\left(-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^0=\frac{1}{6}$.

答案：A

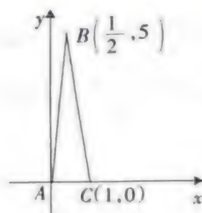
5. 解析：利用定积分的几何意义求解.

$S=\int_0^a\sqrt{x}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a=\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}=a^2$，$\therefore a=\frac{4}{9}$.

答案：$\frac{4}{9}$

6. 解析：先求出 $y=f(x)$，再用定积分求面积.

根据题意画出图象如图所示，则



$y=f(x)=\begin{cases}10x, 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2},\\ -10x+10, \frac{1}{2}<x\leqslant 1.\end{cases}$

$\therefore xf(x)=\begin{cases}10x^2, 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2},\\ -10x^2+10x, \frac{1}{2}<x\leqslant 1,\end{cases}$

$\therefore$ 所求面积为 $S=\int_0^{\frac{1}{2}}10x^2\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1(-10x^2+10x)\mathrm{d}x$

$=\frac{10}{3}x^3\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\left(-\frac{10}{3}x^3+5x^2\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^1$

$=\frac{10}{3}\times\frac{1}{8}+\left(-\frac{10}{3}+5\right)-\left(-\frac{10}{3}\times\frac{1}{8}+5\times\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{4}.$

答案:$\frac{5}{4}$

第二章 推理与证明

模板 1 寻找规律问题

1. 解析:由 $|x|+|y|=1$ 的不同整数解的个数为 4,$|x|+|y|=2$ 的不同整数解的个数为 8,$|x|+|y|=3$ 的不同整数解的个数为 12,归纳推理得 $|x|+|y|=n$ 的不同整数解的个数为 $4n$,故选 B.(本题用列数法也不难找出 $|x|+|y|=20$ 的 80 个不同整数解).

答案:B

2. 解析:$\because 5^5=3\ 125, 5^6=15\ 625, 5^7=78\ 125, 5^8$ 末四位数字为 0625,5^9 末四位数字为 3125,5^{10} 末四位数字为 5625,5^{11} 末四位数字为 8125,5^{12} 末四位数字为 0625,…,由上可得末四位数字周期为 4,呈规律性交替出现,$\therefore 5^{2\,014}=5^{4\times502+6}$ 末四位数字为 5 625.

答案:B

3. 解析:观察规律可知,第 n 个式子为 $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n+1}n^2=(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}$.

答案:$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n+1}n^2=(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}$

4. 解析:$\because 1=1^2, 2+3+4=9=3^2, 3+4+5+6+7=25=5^2$,

$\therefore$ 第 n 个等式为 $n+(n+1)+\cdots+(3n-2)=(2n-1)^2$.

答案:$n+(n+1)+\cdots+(3n-2)=(2n-1)^2$

5. 解析:各式第一项系数依次为 $2,2^3,2^5,2^7,m$,依规律可得 $m=2^9=512$;各式中 $\cos^2\alpha$ 的系数依次为 $2\times1^2,-2\times2^2,2\times3^2,-2\times4^2,p$,由规律推出 $p=2\times5^2=50$;由各式系数和为 1 可推出 $n=-400$,则 $m-n+p=962$.

答案:962

6. 解析:(1)$a_n=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

$b_1=\frac{4\times5}{2}=a_4, b_2=\frac{5\times6}{2}=a_5, b_3=\frac{9\times(2\times5)}{2}=a_9$,

$b_4=\frac{(2\times5)\times11}{2}=a_{10}, b_5=\frac{14\times(3\times5)}{2}=a_{14}$,

$b_6=\frac{(3\times5)\times16}{2}=a_{15}$,……

$b_{2\,012}=\frac{\left(\frac{2\,012}{2}\times5\right)\left(\frac{2\,012}{2}\times5+1\right)}{2}=a_{5\,030}$.

(2)由(1)知

$b_{2k-1}=\frac{\left(\frac{2k-1+1}{2}\times5-1\right)\left(\frac{2k-1+1}{2}\times5\right)}{2}$

$=\frac{5k(5k-1)}{2}$.

答案:(1)5 030 (2)$\frac{5k(5k-1)}{2}$

模板 2 用反证法证明命题

1. 解析:不是正方形的菱形四边相等,故 A 是真命题.若 $z_1=1+\mathrm{i}, z_2=2-\mathrm{i}$,则 $z_1+z_2\in\mathbf{R}$,但 z_1 与 z_2 不是共轭复数,故 B 为假命题. 假设 x,y 都不大于1,即 $x\leqslant1$,且 $y\leqslant1$,则有 $x+y\leqslant2$ 与 $x+y>2$ 矛盾,故 C 是真命题.因为 $\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\cdots+\mathrm{C}_n^n=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$为偶数,故 D 是真命题. 故选 B.

答案:B

2. 解析:由条件知,$\triangle A_1B_1C_1$ 的三个内角的余弦值均大于 0,则$\triangle A_1B_1C_1$ 是锐角三角形,已知$\triangle A_1B_1C_1$ 是锐角三角形,假设$\triangle A_2B_2C_2$ 是锐角三角形.

由$\begin{cases}\sin A_2=\cos A_1=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-A_1\right),\\ \sin B_2=\cos B_1=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-B_1\right),\\ \sin C_2=\cos C_1=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-C_1\right),\end{cases}$

得$\begin{cases}A_2=\dfrac{\pi}{2}-A_1,\\ B_2=\dfrac{\pi}{2}-B_1,\\ C_2=\dfrac{\pi}{2}-C_1.\end{cases}$

那么,$A_2+B_2+C_2=\dfrac{\pi}{2}$,这与三角形内角和为180°相矛盾.

所以假设不成立,又显然$\triangle A_2B_2C_2$不是直角三角形. 所以$\triangle A_2B_2C_2$是钝角三角形.

答案:D

3. 解:(1)由$\dfrac{3(1+a_{n+1})}{1-a_n}=\dfrac{2(1+a_n)}{1-a_{n+1}}$整理可得,$1-a_{n+1}^2=\dfrac{2}{3}(1-a_n^2)$.令$c_n=1-a_n^2$,则$c_{n+1}=\dfrac{2}{3}c_n$.

又$c_1=1-a_1^2=\dfrac{3}{4}$,则数列$\{c_n\}$是首项为$\dfrac{3}{4}$,公比为$\dfrac{2}{3}$的等比数列,

即$c_n=\dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$,故$1-a_n^2=\dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$.

即$a_n^2=1-\dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$. 又$a_1=\dfrac{1}{2}>0$,$a_na_{n+1}<0$,

故$a_n=(-1)^{n-1}\sqrt{1-\dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}}$.

$\therefore b_n=a_{n+1}^2-a_n^2$

$=\left[1-\dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n}\right]-\left[1-\dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\right]$

$=\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$.

(2)证明:假设数列$\{b_n\}$中存在三项$b_r,b_s,b_t(r<s<t)$按某种顺序构成等差数列.

由于数列$\{b_n\}$是首项为$\dfrac{1}{4}$,公比为$\dfrac{2}{3}$的等比数列,所以$b_r>b_s>b_t$,则只可能有$2b_s=b_r+b_t$成立.

$\therefore 2\times\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{s-1}=\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{r-1}+\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{t-1}$,

两边同乘以$3^{t-1}2^{1-r}$,化简得$2\cdot2^{s-r}3^{t-s}=3^{t-r}+2^{t-r}$.

由于$r<s<t$,所以上式左边为偶数,右边为奇数,故上式不可能成立,导致矛盾.

故数列$\{b_n\}$中任意三项不可能成等差数列.

模板3 用数学归纳法证明命题

1. 解:(1)当$n=1$时,$a_1=S_1=2-a_1$,$\therefore a_1=1$.

当$n=2$时,$a_1+a_2=S_2=2\times2-a_2$,$\therefore a_2=\dfrac{3}{2}$.

当$n=3$时,$a_1+a_2+a_3=S_3=2\times3-a_3$,$\therefore a_3=\dfrac{7}{4}$.

当$n=4$时,$a_1+a_2+a_3+a_4=S_4=2\times4-a_4$,$\therefore a_4=\dfrac{15}{8}$.

由此猜想$a_n=\dfrac{2^n-1}{2^{n-1}}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)证明:①当$n=1$时,左边$=a_1=1$,右边$=\dfrac{2^1-1}{2^0}=1$,左边=右边,猜想正确.

②假设$n=k(k\in\mathbf{N}^*)$时,猜想正确,即$a_k=\dfrac{2^k-1}{2^{k-1}}$.

当$n=k+1$时,

$a_{k+1}=S_{k+1}-S_k=2(k+1)-a_{k+1}-2k+a_k=2+a_k-a_{k+1}$,

$\therefore 2a_{k+1}=2+a_k$,$\therefore a_{k+1}=\dfrac{2+a_k}{2}=\dfrac{2+\dfrac{2^k-1}{2^{k-1}}}{2}=\dfrac{2^{k+1}-1}{2^k}$,

这表明$n=k+1$时,猜想正确.

由①②知猜想$a_n=\dfrac{2^n-1}{2^{n-1}}(n\in\mathbf{N}^*)$成立.

2. 证明:(1)设三边长分别为a,b,c,$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

$\because a,b,c$是有理数,$b^2+c^2-a^2$是有理数,分母$2bc$为正有理数,

$\therefore \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$必为有理数,$\therefore\cos A$是有理数.

(2)①当$n=1$时,显然$\cos A$是有理数;

当$n=2$时,$\because\cos2A=2\cos^2A-1$,$\cos A$是有理数,

$\therefore\cos2A$也是有理数;

②假设当$n=k(k\geqslant2)$时,结论成立,即$\cos kA$,$\cos[(k-1)A]$均是有理数.

当$n=k+1$时,

$\cos[(k+1)A]=\cos kA\cos A-\sin kA\sin A$

$=\cos kA\cos A-\dfrac{1}{2}[\cos(kA-A)-\cos(kA+A)]$

$=\cos kA\cos A-\dfrac{1}{2}\cos[(k-1)A]+\dfrac{1}{2}\cos[(k+1)A]$,

$\therefore\cos[(k+1)A]=2\cos kA\cos A-\cos[(k-1)A]$.

$\because\cos A,\cos kA,\cos[(k-1)A]$均是有理数，

$\therefore 2\cos kA\cos A-\cos[(k-1)A]$是有理数，

$\therefore\cos[(k+1)A]$是有理数.

即当$n=k+1$时，结论成立.

综上所述，对于任意正整数n，$\cos nA$是有理数.

3. 解：(1)$f'(x)=r-rx^{r-1}=r(1-x^{r-1})$，

令$f'(x)=0$，解得$x=1$.

当$0<x<1$时，$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$(0,1)$内是减函数；当$x>1$时，$f'(x)>0$，所以$f(x)$在$(1,+\infty)$内是增函数.

故函数$f(x)$在$x=1$处取得最小值$f(1)=0$.

(2)由(1)知，当$x\in(0,+\infty)$时，有$f(x)\geqslant f(1)=0$，即$x^r\leqslant rx+(1-r)$.①

若a_1,a_2中有一个为0，则$a_1^{b_1}a_2^{b_2}\leqslant a_1b_1+a_2b_2$成立.

若a_1,a_2均不为0，由$b_1+b_2=1$，可得$b_2=1-b_1$，于是在①中令$x=\frac{a_1}{a_2}$，$r=b_1$，可得$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{b_1}\leqslant b_1\cdot\frac{a_1}{a_2}+(1-b_1)$，即$a_1^{b_1}a_2^{1-b_1}\leqslant a_1b_1+a_2(1-b_1)$，亦即$a_1^{b_1}a_2^{b_2}\leqslant a_1b_1+a_2b_2$.

综上，对$a_1\geqslant 0,a_2\geqslant 0$，$b_1,b_2$为正有理数，且$b_1+b_2=1$，总有$a_1^{b_1}a_2^{b_2}\leqslant a_1b_1+a_2b_2$.②

(3)(2)中命题的推广形式为：

设$a_1,a_2,\cdots,a_n$为非负实数，$b_1,b_2,\cdots,b_n$为正有理数.

若$b_1+b_2+\cdots+b_n=1$，则$a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_n^{b_n}\leqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$.③

用数学归纳法证明如下：

a. 当$n=1$时，$b_1=1$，有$a_1\leqslant a_1$，③成立.

b. 假设当$n=k$时，③成立，即若$a_1,a_2,\cdots,a_k$为非负实数，$b_1,b_2,\cdots,b_k$为正有理数，且$b_1+b_2+\cdots+b_k=1$，则$a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_k^{b_k}\leqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k$.

当$n=k+1$时，已知$a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{k+1}$为非负实数，$b_1,b_2,\cdots,b_k,b_{k+1}$为正有理数，且$b_1+b_2+\cdots+b_k+b_{k+1}=1$，此时$0<b_{k+1}<1$，即$1-b_{k+1}>0$，于是

$a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_k^{b_k}a_{k+1}^{b_{k+1}}=(a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_k^{b_k})a_{k+1}^{b_{k+1}}$

$=\left(a_1^{\frac{b_1}{1-b_{k+1}}}a_2^{\frac{b_2}{1-b_{k+1}}}\cdots a_k^{\frac{b_k}{1-b_{k+1}}}\right)^{1-b_{k+1}}a_{k+1}^{b_{k+1}}$.

因为$\frac{b_1}{1-b_{k+1}}+\frac{b_2}{1-b_{k+1}}+\cdots+\frac{b_k}{1-b_{k+1}}=1$，由归纳假设可得$a_1^{\frac{b_1}{1-b_{k+1}}}a_2^{\frac{b_2}{1-b_{k+1}}}\cdots a_k^{\frac{b_k}{1-b_{k+1}}}\leqslant$

$a_1\cdot\frac{b_1}{1-b_{k+1}}+a_2\cdot\frac{b_2}{1-b_{k+1}}+\cdots+a_k\cdot\frac{b_k}{1-b_{k+1}}$

$=\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k}{1-b_{k+1}}$，

从而$a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_k^{b_k}a_{k+1}^{b_{k+1}}\leqslant\left(\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k}{1-b_{k+1}}\right)^{1-b_{k+1}}a_{k+1}^{b_{k+1}}$.

又$(1-b_{k+1})+b_{k+1}=1$，由②得

$\left(\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k}{1-b_{k+1}}\right)^{1-b_{k+1}}a_{k+1}^{b_{k+1}}$

$\leqslant\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k}{1-b_{k+1}}\cdot(1-b_{k+1})+a_{k+1}b_{k+1}$

$=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k+a_{k+1}b_{k+1}$，

从而$a_1^{b_1}a_2^{b_2}\cdots a_k^{b_k}a_{k+1}^{b_{k+1}}\leqslant a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_kb_k+a_{k+1}b_{k+1}$.

故当$n=k+1$时，③成立.

由a，b可知，对一切正整数n，所推广的命题成立.

说明：(3)中如果推广形式中指出③式对$n\geqslant 2$成立，则后续证明中不需讨论$n=1$的情况.

4. 解：(1)证明：先证充分性，若$c<0$，由于$x_{n+1}=-x_n^2+x_n+c\leqslant x_n+c<x_n$，故$\{x_n\}$是递减数列；

再证必要性，若$\{x_n\}$是递减数列，则由$x_2<x_1$可得$c<0$.

(2)(ⅰ)假设$\{x_n\}$是递增数列.

由$x_1=0$，得$x_2=c$，$x_3=-c^2+2c$. 由$x_1<x_2<x_3$，得$0<c<1$.

由$x_n<x_{n+1}=-x_n^2+x_n+c$知，对任意$n\geqslant 1$都有$x_n<\sqrt{c}$，①

注意到$\sqrt{c}-x_{n+1}=x_n^2-x_n-c+\sqrt{c}=(1-\sqrt{c}-x_n)\cdot(\sqrt{c}-x_n)$，②

由①式和②式可得$1-\sqrt{c}-x_n>0$，$x_n<1-\sqrt{c}$，

由②式和$x_n\geqslant 0$还可得，对任意$n\geqslant 1$都有

$\sqrt{c}-x_{n+1}\leqslant(1-\sqrt{c})(\sqrt{c}-x_n)$.③

反复运用③式，得

$\sqrt{c}-x_n\leqslant(1-\sqrt{c})^{n-1}(\sqrt{c}-x_1)<(1-\sqrt{c})^{n-1}$.

将$x_n<1-\sqrt{c}$和$\sqrt{c}-x_n<(1-\sqrt{c})^{n-1}$两式相加，知$2\sqrt{c}-1<(1-\sqrt{c})^{n-1}$对任意$n\geqslant 1$成立.

根据指数函数$y=(1-\sqrt{c})^x$的性质，得$2\sqrt{c}-1\leqslant 0$，$c\leqslant\frac{1}{4}$，故$0<c\leqslant\frac{1}{4}$.

(ⅱ)若$0<c\leqslant\frac{1}{4}$，要证数列$\{x_n\}$为递增数列，即$x_{n+1}-x_n=-x_n^2+c>0$.

即证 $x_n<\sqrt{c}$ 对任意 $n\geq1$ 成立.

下面用数学归纳法证明 $0<c\leq\frac{1}{4}$ 时,$x_n<\sqrt{c}$ 对任意 $n\geq1$ 成立.

当 $n=1$ 时,$x_1=0<c\leq\frac{1}{2}$,结论成立.

假设当 $n=k(k\in\mathbf{N}^*)$ 时结论成立,即 $x_k<\sqrt{c}$.

因为函数 $f(x)=-x^2+x+c$ 在区间 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$ 内单调递增,所以 $x_{k+1}=f(x_k)<f(\sqrt{c})=\sqrt{c}$,也就是说当 $n=k+1$ 时,结论仍成立.

故 $x_n<\sqrt{c}$ 对任意 $n\geq1$ 成立.

因此,$x_{n+1}=x_n-x_n^2+c>x_n$,即 $\{x_n\}$ 是递增数列.

由(ⅰ)(ⅱ)知,使得数列 $\{x_n\}$ 单调递增的 c 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{4}\right]$.

第三章 数系的扩充与复数的引入

模板 1 复数式的化简

1. 解析:$(2+i)(3+i)=6+5i+i^2=5+5i$,故选 C.

答案:C

2. 解析:$\frac{5-6i}{i}=\frac{(5-6i)\cdot i}{i\cdot i}=\frac{5i+6}{-1}=-6-5i$,故选 D.

答案:D

3. 解析:$\frac{2-i}{2+i}=\frac{(2-i)\cdot(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{4-4i+i^2}{5}=\frac{3-4i}{5}=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$,故选 A.

答案:A

4. 解析:$\frac{7-i}{3+i}=\frac{(7-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{20-10i}{10}=2-i$.

答案:B

5. 解析:$\frac{(1-i)^2}{2i}=\frac{1-2i+i^2}{2i}=\frac{-2i}{2i}=-1$.

答案:B

6. 解析:$(3+i)(1-2i)=3-6i+i-2i^2=5-5i$.

答案:5-5i

7. 解析:$\frac{3-i}{1+i}=\frac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{2-4i}{2}=1-2i$.

答案:1-2i

模板 2 求未知数的值

1. 解析:$\because1+\sqrt{2}i$ 是关于 x 的实系数方程 $x^2+bx+c=0$ 的一个根,$\therefore(1+\sqrt{2}i)^2+b(1+\sqrt{2}i)+c=0$,

整理得 $(b+c-1)+(2\sqrt{2}+\sqrt{2}b)i=0$,

则 $\begin{cases}2\sqrt{2}+\sqrt{2}b=0,\\b+c-1=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}b=-2,\\c=3,\end{cases}$ 故选 B.

答案:B

2. 解析:$(a+i)i=-1+ai=b+i$,故应有 $a=1,b=-1$.

答案:D

3. 解析:$\because\frac{a+2i}{i}=b+i$,$\therefore a+2i=bi-1$.

$\therefore a=-1,b=2$. $\therefore a+b=1$.

答案:B

4. 解析:复数 $a-\frac{10}{3-i}=a-\frac{10(3+i)}{10}=(a-3)-i$ 为纯虚数,$\therefore a-3=0$,$\therefore a=3$. 故选 D.

答案:D

5. 解析:化 $\frac{11-7i}{1-2i}$ 为标准形式,利用复数相等,求出 a,b.

$\because\frac{11-7i}{1-2i}=\frac{(11-7i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{1}{5}(25+15i)=5+3i$,

$\therefore a=5,b=3$.$\therefore a+b=5+3=8$.

答案:8

6. 解析:$\frac{3+bi}{1-i}=\frac{(3+bi)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{3+3i+bi-b}{2}=a+bi$,

$\therefore\begin{cases}\frac{3-b}{2}=a,\\\frac{3+b}{2}=b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0,\\b=3.\end{cases}$ $\therefore a+b=3$.

答案:3

7. 解:由题意得 $\begin{cases}a^2-3a+2=0,\\a-1\neq0.\end{cases}$ 解得 $a=2$.

模板 3 确定复数所在象限问题

1. 解析:$(2-i)^2=4-4i+i^2=3-4i$,对应的点为 $(3,-4)$,位于第四象限,故选 D.

答案:D

2. 解析:复数 $z=-1-2i$ 在复平面内对应的点为 $(-1,-2)$,位于第三象限.故选 C.

答案:C

3. 解析:由条件知:$z=1-2i$,其在复平面内对应的点为 $(1,-2)$,在第四象限,选 D.

答案:D

4. 解析：$z=\frac{2i}{1+i}=1+i,\bar{z}=1-i$，对应点为$(1,-1)$，在第四象限.

答案：D

5. 解析：$z=\frac{2-i}{2+i}=\frac{(2-i)^2}{(2+i)(2-i)}=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$，它在复平面内对应的点$\left(\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$在第四象限，故选 D.

答案：D

6. 解析：$\because z=\frac{i}{1+i}=\frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$，

$\therefore$ 复数 z 在复平面上对应的点位于第一象限.

答案：A

模板 4 复数的模的求法

1. 解析：由已知得 $x+yi=\frac{3+4i}{i}=4-3i$，$|x+yi|=|4-3i|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$，故选 D.

答案：D

2. 解析：$\left|\frac{a+i}{i}\right|=|1-ai|=\sqrt{a^2+1}=2$，$\therefore a=\pm\sqrt{3}$.

又 a 是正实数，$\therefore a=\sqrt{3}$.

答案：B

3. 解析：$|z|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

答案：$\sqrt{5}$

4. 解析：$z=4+i^2-4i=3-4i$. $|z|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

答案：5

5. 解析：$\because z=(3+i)^2=8+6i$，$\therefore |z|=\sqrt{8^2+6^2}=10$.

答案：10

6. 解析：$\because z=\frac{5i}{1+2i}=\frac{5i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{10+5i}{5}=2+i$，

$|z|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

答案：$\sqrt{5}$

模板 5 求解未知复数

1. 解析：由题意得 $z=\frac{5}{2-i}+3=\frac{5(2+i)}{(2-i)(2+i)}+3=5+i$，

$\therefore \bar{z}=5-i$，故选 D.

答案：D

2. 解析：$|4+3i|=\sqrt{4^2+3^2}=5$，$\therefore z=\frac{5}{3-4i}=\frac{5(3+4i)}{25}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$，虚部为$\frac{4}{5}$，故选 D.

答案：D

3. 解析：$z=\frac{1-i}{i}=\frac{(1-i)\cdot i}{i\cdot i}=-1-i$.

答案：A

4. 解析：因为 $z-i=\frac{5}{2-i}=\frac{5(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{5(2+i)}{5}=2+i$，

所以 $z=2+i+i=2+2i$.

答案：D

5. 解析：$z=\frac{2}{1+i}=\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i$.

答案：B

6. 解析：$z=\frac{-3+2i}{i}-1=3i+2-1=1+3i$.

所以 z 的实部是 1.

答案：1

选修 2-3

第一章 计数原理

模板 1 计数原理的应用

1. 解析：利用计数原理结合分类讨论思想求解.

当 $a=1$ 时，若 $c=0$，则 b^2 有 4,9 两个取值，共 2 条抛物线；

若 $c\neq0$，则 c 有 4 种取值，b^2 有两种，共有 $2\times4=8$(条)抛物线；

当 $a=2$ 时，若 $c=0$，b^2 取 1,4,9 三种取值，共有 3 条抛物线；

若 $c\neq0$，c 取 1 时，b^2 有 2 个取值，共有 2 条抛物线，

c 取-2 时，b^2 有 2 个取值，共有 2 条抛物线，

c 取 3 时，b^2 有 3 个取值，共有 3 条抛物线，

c 取-3 时，b^2 有 3 个取值，共有 3 条抛物线.

$\therefore$ 共有 $3+2+2+3+3=13$(条)抛物线.

同理，$a=-2,-3,3$ 时，共有抛物线 $3\times13=39$(条).

由分类加法计数原理知，共有抛物线 $39+13+8+2=62$(条).

答案：B

2. 解析：6 名同学中的每一名同学都可以从 5 个课外知识讲座中任选一个，由分步乘法计数原理可知，不同的选法种数是 5^6.

答案：A

3. 解析:先涂 A,D,E 三个点,共有 $4\times3\times2=24$ 种涂法,然后再按 B,C,F 的顺序涂色,分为两类:一类是 B 与 E 或 D 同色(B 与 D 同色时按 B,F,C 的顺序考虑),共有 $2\times(2\times1+1\times2)=8$ 种涂法;另一类是 B 与 E,D 不同色,共有 $1\times(1\times1+1\times2)=3$ 种涂法. 所以涂色方法共有 $24\times(8+3)=264$ 种.
答案:B
4. 解析:可从反面考虑,卡号后四位数不带"4"和"7"的共有 $8\times8\times8\times8=4\ 096$ 个,所以符合题意的共有 $10\ 000-4\ 096=5\ 904$ 个.
答案:C
5. 解析:用数字 2,3 可以组成 $2^4=16$ 个四位数. 其中,只由数字 2 构成的四位数有 1 个,只由数字 3 构成的四位数有 1 个,故数字 2,3 至少都出现一次的四位数共有 $16-1-1=14$ 个.
答案:14
6. 解:(1)分为三类:从国画中选,有 5 种不同的选法;从油画中选,有 2 种不同的选法;从水彩画中选,有 7 种不同的选法.根据分类加法计数原理共有 $5+2+7=14$ 种不同的选法.
(2)分为三步:国画、油画、水彩画各有 5 种、2 种、7 种不同的选法,根据分步乘法计数原理,共有 $5\times2\times7=70$ 种不同的选法.
(3)分为三类:第一类是一幅国画,一幅油画.由分步乘法计数原理知,有 $5\times2=10$ 种不同的选法.
第二类是一幅国画、一幅水彩画,有 $5\times7=35$ 种不同的选法.
第三类是一幅油画,一幅水彩画,有 $2\times7=14$ 种不同的选法.
所以有 $10+35+14=59$ 种不同的选法.

模板 2 求特定条件下方法种数

1. 解析:利用分类加法计数原理和组合的概念求解. 分两类:第一类,含有 1 张红色卡片,共有不同的取法 $C_4^1C_{12}^2=264$(种);第二类,不含有红色卡片,共有不同的取法 $C_{12}^3-3C_4^3=220-12=208$(种). 由分类加法计数原理知不同的取法有 $264+208=472$(种).
答案:C
2. 解析:可分两种互斥情况:A 类选 1 门,B 类选 2 门或 A 类选 2 门,B 类选 1 门,共有 $C_3^1C_4^2+C_3^2C_4^1=18+12=30$(种)选法.
答案:A
3. 解析:分两种情况:①选 2 本画册,2 本集邮册送给 4 位朋友,有 $C_4^2=6$ 种方法;②选 1 本画册,3 本集邮册送给 4 位朋友,有$C_4^1=4$ 种方法,所以不同的赠送方法共有 $6+4=10$(种),故选 B.
答案:B
4. 解析:对此问题可分类:男 2 女 1 和男 1 女 2,故总共有 $C_5^2C_4^1+C_5^1C_4^2=70$(种).
答案:A
5. 解析:因为每个乡镇至少一名,所以有一个乡镇有 2 名的情况,假设 A 乡镇有 2 名学生,则共有 $C_4^2A_2^2=12$(种)情况.
所以不同的分配方案有 $3\times12=36$(种)情况.
答案:36
6. 解析:先从 7 人中选 6 人参加公益活动有 C_7^6 种选法,再从 6 人中选 3 人在周六参加有 C_6^3种选法,剩余 3 人在周日参加,因此有 $C_7^6C_6^3=140$(种)不同安排方案.
答案:140

模板 3 特殊元素(位置)问题

1. 解析:方法一:(特殊元素优先安排法)因为甲不在第一个也不在最后一个演讲,所以先安排甲,甲可在第 2,3,4,5 共 4 个次序进行演讲,则不同的演讲次序有 4 种;
然后安排其余 5 位选手的演讲次序,将这几位选手进行全排列即可,则不同的演讲次序有 $A_5^5=120$(种).
根据分步乘法计数原理,则不同的演讲次序共有 $4\times A_5^5=480$(种).
方法二:(排除法)6 位选手不同的演讲次序共有 $A_6^6=720$(种).
甲在第一个演讲时,其余五人不同的演讲次序有 $A_5^5=120$(种);
甲在最后一个演讲时,其余五人不同的演讲次序有 $A_5^5=120$(种).
所以甲不在第一个也不在最后一个演讲的演讲次序共有 $720-120-120=480$(种).
答案:C

2. 解析：因为丙没有入选相当于从 9 人中选 3 人，共有选法 $C_9^3=84$ 种，甲、乙都没人选相当于从 7 人中选 3 人，共有选法 $C_7^3=35$ 种.所以满足条件的选法种数是 $84-35=49$.

答案：C

3. 解析：根据题意，由排列可得，从 6 名志愿者中选出 4 人分别从事四项不同工作，有 $A_6^4=360$ 种不同的情况，其中包含甲从事翻译工作，有 $A_5^3=60$ 种，乙从事翻译工作，有 $A_5^3=60$ 种，若其中甲、乙两名志愿者都不能从事翻译工作，则选派方案共有 $360-60-60=240$ 种.

答案：B

4. 解析：直接法：选出的 3 名志愿者中含有 1 名女生 2 名男生或 2 名女生 1 名男生，故共有 $C_2^1C_6^2+C_2^2C_6^1=2\times15+6=36$ 种选法；

间接法：从 8 名学生中选出 3 名，减去全部是男生的情况，故共有 $C_8^3-C_6^3=56-20=36$ 种选法.

答案：A

5. 解析：这里 A,B,C 三门课程"至多选一门"，即 A,B,C 三门课程都不选，或 A,B,C 这三门课程恰好选一门.

分两类完成：第 1 类，A,B,C 三门课程都不选，有 C_6^4 种不同选修方案.

第 2 类，A,B,C 三门课程恰好选修一门，有 $C_3^1\cdot C_6^3$ 种不同选修方案.

故共有 $C_6^4+C_3^1\cdot C_6^3=75$ 种不同的选修方案.

答案：75

模板 4　相邻问题

1. 解析：不考虑丙、丁的情况共有 $A_2^2A_6^6=1\ 440$(种)排法. 在甲、乙相邻的条件下，丙排 10 月 1 日有 $A_2^2A_5^5=240$(种)排法，同理，丁排 10 月 7 日也有 240 种排法. 丙排 10 月 1 日，丁排 10 月 7 日，有 $A_2^2A_4^4=48$(种)排法，则满足条件的排法有 $A_2^2A_6^6-2A_2^2A_5^5+A_2^2A_4^4=1\ 008$(种).

答案：C

2. 解析：两名老人相邻用捆绑法排有 A_2^2 种，又不能排在两端，所以只能排在中间四个位置为 A_4^1 种方法. 其余 5 人排在余下的 5 个位置方法数为 A_5^5，故不同排法有：$A_2^2A_4^1A_5^5=960$(种).

答案：B

3. 解析：由题意知程序 A 只能出现在第一步或最后一步，∴ 从第一个位置和最后一个位置中选一个位置把 A 排列，有 $A_2^1=2$ 种结果.∵ 程序 B 和 C 在实施时必须相邻，∴ 把 B 和 C 看作一个元素，同除 A 外的 3 个元素排列，注意 B 和 C 之间还有一个排列，共有 $A_4^4A_2^2=48$ 种结果. 根据分步计数原理知共有 $2\times48=96$ 种结果，故选 C.

答案：C

4. 解析：爸爸排法为 A_2^2 种，两个小孩排在一起故看成一体有 A_2^2 种排法.妈妈和孩子共有 A_3^3 种排法，∴ 排法种数共有 $A_2^2A_2^2A_3^3=24$ 种.故选 C.

答案：C

5. 解析：若甲和乙都去，则选派方案有 $C_6^2=15$ 种；若甲和乙都不去，则选派方案有 $C_6^4=15$ 种，故共有 30 种方案.

答案：30

模板 5　不相邻问题

1. 解析："亮灯""灭灯"元素之间互异，可视为互异的元素，不考虑顺序，属于组合问题.

"灭灯"不相邻，应采取"插空法".

分两步完成：

第一步，安排 9 盏亮灯，因为亮灯相同，只是位置不同，共有 C_9^9 种；

第二步，将 3 盏熄灭的灯插到 8 个空里，有 C_8^3 种；根据分步乘法计数原理，共有 $C_9^9\cdot C_8^3=C_8^3$ 种熄灯方法. 故选 A.

答案：A

2. 解析：$A_4^4A_5^3=1\ 440$ 种.

答案：1 440

3. 解析：甲、乙排在一起，用捆绑法，丙、丁不排在一起，用插空法，不同的排法共有 $2A_2^2\cdot A_3^2=24$ 种.

答案：24

4. 解析：先将 3，5 排列，有 A_2^2 种排法；再将 4，6 插空排列，有$2A_2^2$ 种排法；最后将 1，2 插入3，4，5，6 形成的空中，有 C_5^1 种排法.由分步乘法计数原理知，共有 $A_2^2\cdot2A_2^2\cdot C_5^1=40$ 种.

答案：40

模板 6　分组问题

1. 解析：将 8 名售票员平均分为 4 组，分配到四辆公共汽车上，共有 $C_8^2C_6^2C_4^2$ 种，再分配司机有 A_4^4 种，

故选 C.

答案:C

2. 解析:先把 6 个毕业生平均分成 3 组,有$\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}$种方法,故 6 个毕业生平均分到 3 所学校,共有$\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}\cdot A_3^3=90$ 种分派方法.

答案:90

3. 解析:将 6 名教师分组,分三步完成:

第 1 步,在 6 名教师中任取 1 名作为一组,有C_6^1种取法;

第 2 步,在余下的 5 名教师中任取 2 名作为一组,有 C_5^2 种取法;

第 3 步,余下的 3 名教师作为一组,有C_3^3 种取法.

根据分步乘法计数原理,共有$C_6^1C_5^2C_3^3=60$ 种取法.

再将这 3 组教师分配到 3 所中学,有$A_3^3=6$ 种分法,故共有 60×6=360 种不同的分法.

答案:360

4. 解:(1)无序不均匀分组问题.先选 1 本有 C_6^1 种选法,再从余下的 5 本中选 2 本有 C_5^2 种选法,最后余下 3 本全选有C_3^3 种选法. 故共有 $C_6^1C_5^2C_3^3=60$(种).

(2)有序不均匀分组问题.由于甲、乙、丙是不同的三人,在第(1)问基础上,还应考虑再分配,共有 $C_6^1C_5^2C_3^3A_3^3=360$(种).

(3)无序均匀分组问题.先分三步,则应是$C_6^2C_4^2C_2^2$种方法,但是这里出现了重复.不妨记 6 本书为 A、B、C、D、E、F,若第一步取了 AB,第二步取了 CD,第三步取了 EF,记该种分法为(AB,CD,EF),则$C_6^2C_4^2C_2^2$ 种分法中还有(AB,EF,CD),(CD,AB,EF),(CD,EF,AB),(EF,CD,AB),(EF,AB,CD),共A_3^3 种情况,而这 A_3^3 种情况仅是 AB,CD,EF 的顺序不同,因此只能作为一种分法,故分配方式有$\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}=15$(种).

(4)有序均匀分组问题.在第(3)问基础上再分配给 3 个人,共有分配方式$\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}\cdot A_3^3=C_6^2C_4^2C_2^2=90$(种).

(5)无序部分均匀分组问题.共有$\frac{C_6^4C_2^1C_1^1}{A_2^2}=15$(种).

(6)有序部分均匀分组问题.在第(5)问基础上再分配给个 3 人,共有分配方式$\frac{C_6^4C_2^1C_1^1}{A_2^2}\cdot A_3^3=90$(种).

(7)直接分配问题.甲选 1 本有 C_6^1 种方法,乙从余下 5 本中选 1 本有 C_5^1 种方法,余下 4 本留给丙有 C_4^4 种方法.共有 $C_6^1C_5^1C_4^4=30$(种).

模板 7 求二项展开式中的特定项系数

1. 解析:$(1+2x)^5$ 的第 $k+1$ 项为 $T_{k+1}=C_5^k(2x)^k=2^kC_5^kx^k$,令 $k=2$,得 x^2 的系数为 $2^2\cdot C_5^2=40$.

答案:B

2. 解析:该二项展开式的通项为 $T_{k+1}=C_6^k\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{6-k}\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^k=(-1)^kC_6^k\cdot\frac{1}{2^{6-2k}}\cdot x^{3-k}$.令 $3-k=2$,得 $k=1$.

$\therefore T_2=-6\times\frac{1}{2^4}x^2=-\frac{3}{8}x^2$,故选 C.

答案:C

3. 解析:二项展开式的通项 $T_{k+1}=C_5^kx^{5-k}y^k$,令 $k=3$,则 $T_4=C_5^3x^2y^3=10x^2y^3$,故应填 10.

答案:10

4. 解析: 利用二项展开式的通项公式求解. 设第 $k+1$ 项为含 x^3 的项,则 $T_{k+1}=C_6^kx^{2(6-k)}x^{-k}=C_6^kx^{12-3k}$,令 $12-3k=3$,得 $k=3$,$\therefore x^3$ 的系数为 $C_6^3=20$.

答案:20

5. 解析:二项展开式的通项为 $T_{k+1}=C_{18}^kx^{18-k}\left(-\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^k=(-1)^k\left(\frac{1}{3}\right)^kC_{18}^kx^{18-\frac{3k}{2}}$.令 $18-\frac{3k}{2}=15$,解得 $k=2$.

$\therefore$ 含 x^{15} 的项的系数为$(-1)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2C_{18}^2=17$.

答案:17

6. 解析:$x\left(x-\frac{2}{x}\right)^7$ 的展开式的通项是 $T_{k+1}=xC_7^kx^{7-k}\cdot\left(-\frac{2}{x}\right)^k=C_7^k(-2)^kx^{8-2k}$. 令 $8-2k=4$,得 $k=2$,故 x^4 的系数是 $C_7^2\cdot4=84$.

答案:84

模板 8 求二项展开式中的常数项

1. 解析:$x>0$ 时,$f(x)=-\sqrt{x}<0$,故 $f[f(x)]=\left(-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$,其展开式的通项公式为 $T_{k+1}=$

$C_6^k\cdot(-\sqrt{x})^{6-k}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k=(-1)^{6-k}\cdot C_6^k\cdot(\sqrt{x})^{6-2k}$,
由 $6-2k=0$ 得 $k=3$,故常数项为 $(-1)^3\cdot C_6^3=-20$.
答案:A

2. 解析:二项式 $\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^5$ 的展开式的通项为:$T_{k+1}=C_5^k\left(\frac{1}{x^2}\right)^{5-k}\cdot(-1)^k=C_5^k\cdot x^{2k-10}\cdot(-1)^k$. 当 $2k-10=-2$,即 $k=4$ 时,有 $x^2\cdot C_5^4x^{-2}\cdot(-1)^4=C_5^4\times(-1)^4=5$;
当 $2k-10=0$,即 $k=5$ 时,有 $2\cdot C_5^5x^0\cdot(-1)^5=-2$.
$\therefore$ 展开式中的常数项为 $5-2=3$,故选 D.
答案:D

3. 解析:设展开式的常数项是第 $k+1$ 项,则 $T_{k+1}=C_6^k\cdot(4^x)^{6-k}\cdot(-2^{-x})^k=C_6^k\cdot(-1)^k\cdot2^{12x-3kx}$,$\therefore 12x-3kx=0$ 恒成立.$\therefore k=4$,$\therefore T_5=C_6^4\cdot(-1)^4=15$. $\therefore$ 选 C.
答案:C

4. 解析: 通项 $T_{k+1}=C_6^k\cdot x^{6-k}\cdot(-1)^k\cdot\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^k=(-1)^k\cdot C_6^k\cdot x^{6-\frac{3k}{2}}$,令 $6-\frac{3}{2}k=0$,得 $k=4$,所以常数项为 $(-1)^4\cdot C_6^4=15$.
答案:15

5. 解析:$\left(x-\frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式的通项公式为 $T_{k+1}=(-2)^k\cdot C_6^kx^{6-2k}$,令 $6-2k=0$,得 $k=3$.
$\therefore$ 常数项 $T_4=(-2)^3C_6^3=-160$.
答案:-160

6. 解析:$(1+x+x^2)\left(x-\frac{1}{x}\right)^6=(1+x+x^2)\left[C_6^0x^6\left(-\frac{1}{x}\right)^0+C_6^1x^5\left(-\frac{1}{x}\right)^1+C_6^2x^4\left(-\frac{1}{x}\right)^2+C_6^3x^3\left(-\frac{1}{x}\right)^3+C_6^4x^2\left(-\frac{1}{x}\right)^4+C_6^5x\left(-\frac{1}{x}\right)^5+C_6^6x^0\left(-\frac{1}{x}\right)^6\right]$
$=(1+x+x^2)\left(x^6-6x^4+15x^2-20+\frac{15}{x^2}-\frac{6}{x^4}+\frac{1}{x^6}\right)$,
所以常数项为 $1\times(-20)+x^2\cdot\frac{15}{x^2}=-5$.
答案:-5

模板 9　求二项式中参数的值

1. 解析:由二项式定理得 $(1+x)^5$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_5^k\cdot x^k$, 所以当 $k=2$ 时,$(1+ax)\cdot(1+x)^5$ 的展开式中 x^2 的系数为 C_5^2,当 $k=1$ 时,x^2 的系数为 $C_5^1\cdot a$,所以 $C_5^2+C_5^1\cdot a=5$,$a=-1$,故选 D.
答案:D

2. 解析:$(1+3x)^n$ 的展开式中含 x^5 的项为 $C_n^5(3x)^5=C_n^53^5x^5$,展开式中含 x^6 的项为 $C_n^63^6x^6$,由两项的系数相等得 $C_n^5\cdot3^5=C_n^6\cdot3^6$,解得 $n=7$.
答案:B

3. $\because(1+\sqrt{3})^4=1+4\sqrt{3}+18+12\sqrt{3}+9=28+16\sqrt{3}=a+b\sqrt{3}$,又 a,b 为有理数,
$\therefore\begin{cases}a=28,\\b=16.\end{cases}\therefore a+b=28+16=44.$
答案:D

4. 解析:$T_{3+1}=C_4^3a^1x^3=4ax^3$,$\therefore 4a=8$,$\therefore a=2$.
答案:2

5. 解析: 二项式 $\left(x-\frac{\sqrt{a}}{x^2}\right)^6$ 展开式的通项公式是 $T_{k+1}=C_6^kx^{6-k}\cdot(-\sqrt{a})^kx^{-2k}=C_6^kx^{6-3k}(-\sqrt{a})^k$,
当 $k=2$ 时,T_{k+1} 为常数项,即常数项是 $C_6^2a=60$,
解得 $a=4$.
答案:4

6. 解析:$T_{k+1}=C_9^kx^{9-k}x^{-k}\ (-a)^k=(-a)^kC_9^kx^{9-2k}$. 令 $9-2k=3$,得 $k=3$. $\therefore x^3$ 的系数为 $-a^3C_9^3=-84$,$\therefore a^3=1$,$\therefore a=1$.
答案:1

第二章　随机变量及其分布

模板 1　求离散型随机变量的分布列

1. 解析:根据离散型随机变量分布列的特征求解. 对于表 A,由于 $0.6+0.3=0.9<1$,故不能成为随机变量 ξ 的分布列;仿上可知,对于表 C,有 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}<1$;对于表 D,知 $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{1}{3}\left[1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]=1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}<1$,故表 C、D 均不能成为随机变量 ξ 的分布列;对于表 B,由于 $0.902\ 5+0.095+0.002\ 5=1$,故表 B 可以成为随机变量 ξ 的分布列,故选 B.
答案:B

2. 解:因为同时取出 3 只球,而 ξ 表示取出球最小

的号码,所以 ξ 的取值只能是 1,2,3.

当 $\xi=1$ 时,其他两球可在剩余的 4 只球中任意选取. 因此其概率为 $\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{3}{5}$;当 $\xi=2$ 时,其他两球的编号在 3,4,5 中选取,因此其概率为 $\frac{C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$;当 $\xi=3$ 时,只可能为 3,4,5 这一种情况,概率为 $\frac{1}{10}$,所以随机变量 ξ 的分布列为

ξ	1	2	3
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

3. 解:(1)X 的分布列如下表:

X	0	1
P	$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{7}$

(2)X 的分布列如下表:

X	0	1
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$

4. 解:从 100 件产品中随机抽取 20 件,抽得次品件数 ξ 是一个离散型随机变量,其次品件数可能是 0,1,2,3,4,5 件.

依题意,随机变量 $P(X=k)=\frac{C_5^k\cdot C_{95}^{20-k}}{C_{100}^{20}}(k=0,1,2,3,4,5)$. $\therefore P(X=0)=\frac{C_5^0\cdot C_{95}^{20}}{C_{100}^{20}}$,$P(X=1)=\frac{C_5^1\cdot C_{95}^{19}}{C_{100}^{20}}$,

$\therefore P(X=2)=\frac{C_5^2\cdot C_{95}^{18}}{C_{100}^{20}}$,$P(X=3)=\frac{C_5^3\cdot C_{95}^{17}}{C_{100}^{20}}$,

$\therefore P(X=4)=\frac{C_5^4\cdot C_{95}^{16}}{C_{100}^{20}}$,$P(X=5)=\frac{C_5^5\cdot C_{95}^{15}}{C_{100}^{20}}$.

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{C_5^0\cdot C_{95}^{20}}{C_{100}^{20}}$	$\frac{C_5^1\cdot C_{95}^{19}}{C_{100}^{20}}$	$\frac{C_5^2\cdot C_{95}^{18}}{C_{100}^{20}}$
X	3	4	5
P	$\frac{C_5^3\cdot C_{95}^{17}}{C_{100}^{20}}$	$\frac{C_5^4\cdot C_{95}^{16}}{C_{100}^{20}}$	$\frac{C_5^5\cdot C_{95}^{15}}{C_{100}^{20}}$

模板 2 利用条件概率公式求概率

1. 解:记事件 C 表示第 1 人是 A 型血,事件 D 表示第2人是O型血,则$P(C)=\frac{4}{18}$,$P(D|C)=\frac{8}{17}$,

$\therefore P(CD)=P(C)P(D|C)=\frac{4}{18}\times\frac{8}{17}=\frac{16}{153}$.

2. 解:设事件 A 表示"选到第一组学生",事件 B 表示"选到共青团员".

(1)由题意,$P(A)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4}$.

(2)因为 $P(B)=\frac{15}{40}=\frac{3}{8}$,$P(AB)=\frac{4}{40}=\frac{1}{10}$.

所以 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{4}{15}$.

3. 解:设 A="甲地为雨天",B="乙地为雨天",则根据题意有 $P(A)=0.20$,$P(B)=0.18$,$P(AB)=0.12$.

(1)乙地为雨天时甲地也为雨天的概率是

$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.12}{0.18}=\frac{2}{3}$.

(2)甲地为雨天时乙地也为雨天的概率是

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.12}{0.20}=\frac{3}{5}$.

4. 解:(1)记事件 A 表示向上的点数之和为 6,事件 B 表示有一个点数为 2,易知 $n(A)=5$,$n(AB)=2$,故 $P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{2}{5}$.

(2)记事件 D 表示向上的点数不同,事件 C 表示有一个点数为 5,则 $n(D)=30$,$n(CD)=10$,故 $P(C|D)=\frac{n(CD)}{n(D)}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$.

模板 3 求相互独立事件的概率

1. 解析:甲队若要获得冠军,有两种情况,可以直接胜一局,获得冠军,概率为 $\frac{1}{2}$,也可以乙队先胜一局,甲队再胜一局,概率为 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,故甲队获得冠军的概率为 $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$.

答案:D

2. 解:(1)分别记甲、乙在三小时以上且不超过四小时还车为事件 A,B,则 $P(A)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,$P(B)=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$. 故甲、乙在三小时以上且不超过四小时还车的概率分别为 $\frac{1}{4}$,$\frac{1}{4}$.

(2)记两人所付的租车费用之和小于 6 元为事件 C,则 $P(C)=\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)+$

$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$. 故两人所付的租车费用之和小于 6 元的概率是$\frac{3}{4}$.

3. 解：设 A_k,B_k 分别表示甲、乙在 k 次投篮投中，则 $P(A_k)=\frac{1}{3}$，$P(B_k)=\frac{1}{2}(k=1,2,3)$.

(1)记“乙获胜”为事件 C，由互斥事件有一个发生的概率与相互独立事件同时发生的概率计算公式知

$P(C)=P(\bar{A}_1B_1)+P(\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2B_2)+P(\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2\bar{B}_2\bar{A}_3B_3)$
$=P(\bar{A}_1)P(B_1)+P(\bar{A}_1)P(\bar{B}_1)P(\bar{A}_2)P(B_2)+P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{B}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{B}_2)P(\bar{A}_3)P(B_3)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{13}{27}$.

(2)记“投篮结束时乙只投了 2 个球”为事件 D，则由互斥事件有一个发生的概率与相互独立事件同时发生的概率计算公式知

$P(D)=P(\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2B_2)+P(\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{A}_2\bar{B}_2A_3)$
$=P(\bar{A}_1)P(\bar{B}_1)P(\bar{A}_2)P(B_2)+P(\bar{A}_1)P(\bar{B}_1)P(\bar{A}_2)\cdot P(\bar{B}_2)P(A_3)$
$=\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$.

4. 解：记 A_i 表示事件：第 1 次和第 2 次这两次发球，甲共得 i 分，$i=0,1,2$；

B_i 表示事件：第 3 次和第 4 次这两次发球，甲共得 i 分，$i=0,1,2$；

A 表示事件：第 3 次发球，甲得 1 分；

B 表示事件：开始第 4 次发球时，甲、乙的比分为 1:2；

C 表示事件：开始第 5 次发球时，甲得分领先.

(1)$B=A_0A+A_1\bar{A}$.

$P(A)=0.4$，$P(A_0)=0.4^2=0.16$，$P(A_1)=2\times0.6\times0.4=0.48$.

$P(B)=P(A_0A+A_1\bar{A})=P(A_0A)+P(A_1\bar{A})=P(A_0)P(A)+P(A_1)P(\bar{A})=0.16\times0.4+0.48\times(1-0.4)=0.352$.

(2)$P(B_0)=0.6^2=0.36$，$P(B_1)=2\times0.4\times0.6=0.48$，$P(B_2)=0.4^2=0.16$，$P(A_2)=0.6^2=0.36$.

$C=A_1B_2+A_2B_1+A_2B_2$.

$P(C)=P(A_1B_2+A_2B_1+A_2B_2)$
$=P(A_1B_2)+P(A_2B_1)+P(A_2B_2)$
$=P(A_1)P(B_2)+P(A_2)P(B_1)+P(A_2)P(B_2)$
$=0.48\times0.16+0.36\times0.48+0.36\times0.16=0.307\ 2$.

模板 4　二项分布的概率问题

1. 解：(1)设“至少有一个系统不发生故障”为事件 C，那么 $1-P(\bar{C})=1-\frac{1}{10}\cdot p=\frac{49}{50}$. 解得 $p=\frac{1}{5}$.

(2)设“系统 A 在 3 次相互独立的检测中不发生故障的次数大于发生故障的次数”为事件 D，那么 $P(D)=C_3^2\frac{1}{10}\cdot\left(1-\frac{1}{10}\right)^2+C_3^3\left(1-\frac{1}{10}\right)^3=\frac{972}{1\ 000}=\frac{243}{250}$.

2. 解：(1)由题设知，X 的可能取值为 10，5，2，-3，且 $P(X=10)=0.8\times0.9=0.72$，$P(X=5)=0.2\times0.9=0.18$，$P(X=2)=0.8\times0.1=0.08$，$P(X=-3)=0.2\times0.1=0.02$.

由此得 X 的分布列为：

X	-3	2	5	10
P	0.02	0.08	0.18	0.72

(2)设生产的 4 件甲产品中一等品有 n 件，则二等品有 $4-n$ 件.

由题设知 $4n-(4-n)\geqslant10$，解得 $n\geqslant\frac{14}{5}$，

又 $n\in\mathbf{N}$，且 $n\leqslant4$，得 $n=3$，或 $n=4$.

所以 $P=C_4^3\times0.8^3\times0.2+C_4^4\times0.8^4=0.819\ 2$.

故所求概率为 0.819 2.

3. 解：记 A 表示事件：该地的 1 位车主购买甲种保险；

B 表示事件：该地的 1 位车主购买乙种保险但不购买甲种保险；

C 表示事件：该地的 1 位车主至少购买甲、乙两种保险中的一种；

D 表示事件：该地的 1 位车主甲、乙两种保险都不购买；

E 表示事件：该地的 3 位车主中恰有 1 位车主甲、乙两种保险都不购买.

(1)$P(A)=0.5$，$P(B)=0.3$，$C=A+B$，

$P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)=0.8$.

(2)$D=\bar{C}$，$P(D)=1-P(C)=1-0.8=0.2$，

$P(E)=C_3^1\times0.2\times0.8^2=0.384$.

4. 解：(1)设 X 为射手在 5 次射击中击中目标的次

数，则 $X\sim B\left(5,\dfrac{2}{3}\right)$. 在 5 次射击中，恰有 2 次击中目标的概率 $P(X=2)=C_5^2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{40}{243}$.

(2)设“第 i 次射击击中目标”为事件 $A_i(i=1,2,3,4,5)$.“射手在 5 次射击中，有 3 次连续击中目标，另外 2 次未击中目标”为事件 A，则

$P(A)$

$=P(A_1A_2A_3\overline{A}_4\overline{A}_5)+P(\overline{A}_1A_2A_3A_4\overline{A}_5)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4A_5)$

$=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3\times\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{81}$.

(3)由题意可知，ξ 的所有可能取值为 0,1,2,3,6.

$P(\xi=0)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$；

$P(\xi=1)=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$

$=\dfrac{2}{3}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}$；

$P(\xi=2)=P(A_1\overline{A}_2A_3)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{27}$；

$P(\xi=3)=P(A_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)$

$=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{8}{27}$；

$P(\xi=6)=P(A_1A_2A_3)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$.

所以 ξ 的分布列是

ξ	0	1	2	3	6
P	$\dfrac{1}{27}$	$\dfrac{2}{9}$	$\dfrac{4}{27}$	$\dfrac{8}{27}$	$\dfrac{8}{27}$

模板 5 求随机事件的概率

1. 解析：甲、乙两人任选 4 个景点共有方法 $A_6^4A_6^4$ 种，而最后一小时他们在同一个景点的情况有 $C_6^1A_5^3A_5^3$ 种，所求概率为 $P=\dfrac{C_6^1A_5^3A_5^3}{A_6^4A_6^4}=\dfrac{1}{6}$，故选 D.

答案：D

2. 解析：由题意知本题属超几何分布.

概率为 $P=\dfrac{C_{27}^1C_3^1+C_3^2}{C_{30}^2}=\dfrac{28}{145}$.

答案：$\dfrac{28}{145}$

3. 解：(1)设“在 1 次游戏中摸出 i 个白球”为事件 $A_i(i=0,1,2,3)$，则 $P(A_3)=\dfrac{C_3^2}{C_5^2}\cdot\dfrac{C_2^1}{C_3^2}=\dfrac{1}{5}$.

(2)设“在 1 次游戏中获奖”为事件 B，则 $B=A_2\cup A_3$，又 $P(A_2)=\dfrac{C_3^2}{C_5^2}\cdot\dfrac{C_2^2}{C_3^2}+\dfrac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}\cdot\dfrac{C_2^1}{C_3^2}=\dfrac{1}{2}$，且 A_2,A_3 互斥，所以 $P(B)=P(A_2)+P(A_3)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{7}{10}$.

4. 解：(1)由分层抽样的定义可知乙厂生产的产品数量为 $\dfrac{98\times5}{14}=35$(件).

(2)由题中表格提供的数据可知，乙厂抽取的 5 件产品中有 2 件优等品，分别是 2 号和 5 号，样品中优等品的频率为 $\dfrac{2}{5}$，由(1)知乙厂共有产品 35 件，所以估计乙厂优等品的数量为 $35\times\dfrac{2}{5}=14$(件).

(3)5 件抽测品中有 2 件优等品，则 ξ 的可能取值为 0,1,2.

$P(\xi=0)=\dfrac{C_3^2}{C_5^2}=\dfrac{3}{10}$，$P(\xi=1)=\dfrac{C_3^1\cdot C_2^1}{C_5^2}=\dfrac{3}{5}$，$P(\xi=2)=\dfrac{C_2^2}{C_5^2}=\dfrac{1}{10}$.

ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{1}{10}$

模板 6 求离散型随机变量的均值或方差

1. 解：(1)设 A 表示事件“观众甲选中 3 号歌手”，B 表示事件“观众乙选中 3 号歌手”，

则 $P(A)=\dfrac{C_2^1}{C_3^2}=\dfrac{2}{3}$，$P(B)=\dfrac{C_4^2}{C_5^3}=\dfrac{3}{5}$.

$\because$ 事件 A 与 B 相互独立，$\therefore$ 观众甲选中 3 号歌手且观众乙未选中 3 号歌手的概率为

$P(A\overline{B})=P(A)\cdot P(\overline{B})=P(A)\cdot[1-P(B)]$

$=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{15}$. $\left(\text{或 } P(A\overline{B})=\dfrac{C_2^1\cdot C_4^3}{C_3^2\cdot C_5^3}=\dfrac{4}{15}\right)$

(2)设 C 表示事件“观众丙选中 3 号歌手”，

则 $P(C)=\dfrac{C_4^2}{C_5^3}=\dfrac{3}{5}$，$\because X$ 可能的取值为 0,1,2,3，且取这些值的概率分别为

$P(X=0)=P(\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C})=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{75}$，

$P(X=1)=P(A\overline{B}\ \overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\ \overline{B}C)$

$=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{4}{15}$，

$P(X=2)=P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)$

$=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{11}{25}$,

$P(X=3)=P(ABC)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$,

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{75}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{11}{25}$	$\frac{6}{25}$

$\therefore$ X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{4}{75}+1\times\frac{4}{15}+2\times\frac{11}{25}+3\times\frac{6}{25}=\frac{28}{15}$.

2. 解:(1)设事件 A="张同学所取的 3 道题至少有 1 道乙类题",

则有$\overline{A}$="张同学所取的 3 道题都是甲类题".

因为 $P(\overline{A})=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$,所以 $P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{5}{6}$.

(2)X 所有的可能取值为 0,1,2,3.

$P(X=0)=\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{125}$;

$P(X=1)=C_2^1\left(\frac{3}{5}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^1\cdot\frac{1}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot\frac{4}{5}=\frac{28}{125}$;

$P(X=2)=\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{5}+C_2^1\left(\frac{3}{5}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^1\cdot\frac{4}{5}=\frac{57}{125}$;

$P(X=3)=\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{4}{5}=\frac{36}{125}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{125}$	$\frac{28}{125}$	$\frac{57}{125}$	$\frac{36}{125}$

所以 $E(X)=0\times\frac{4}{125}+1\times\frac{28}{125}+2\times\frac{57}{125}+3\times\frac{36}{125}=2$.

3. 解:(1)记"甲队以 3:0 胜利"为事件 A_1,"甲队以 3:1 胜利"为事件 A_2,"甲队以 3:2 胜利"为事件 A_3,由题意,各局比赛结果相互独立,

故 $P(A_1)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$,

$P(A_2)=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$,

$P(A_3)=C_4^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{4}{27}$.

所以,甲队以 3:0 胜利、以 3:1 胜利的概率都为 $\frac{8}{27}$,以 3:2 胜利的概率为 $\frac{4}{27}$.

(2)设"乙队以 3:2 胜利"为事件 A_4,

由题意,各局比赛结果相互独立,所以

$P(A_4)=C_4^2\left(1-\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{27}$.

由题意,随机变量 X 的所有可能的取值为 0,1,2,3.

根据事件的互斥性得

$P(X=0)=P(A_1+A_2)=P(A_1)P(A_2)=\frac{16}{27}$.

又 $P(X=1)=P(A_3)=\frac{4}{27}$,$P(X=2)=P(A_4)=\frac{4}{27}$,

$P(X=3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)=\frac{3}{27}$,

故 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{16}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{3}{27}$

所以 $E(X)=0\times\frac{16}{27}+1\times\frac{4}{27}+2\times\frac{4}{27}+3\times\frac{3}{27}=\frac{7}{9}$.

4. 解:(1)当日需求量 $n\geqslant16$ 时,利润 $y=80$.

当日需求量 $n<16$ 时,利润 $y=10n-80$.

所以 y 关于 n 的函数解析式为 $y=\begin{cases}10n-80,n<16,\\80,n\geqslant16\end{cases}$ $(n\in\mathbf{N})$.

(2)①X 可能的取值为 60,70,80,并且 $P(X=60)=0.1$,$P(X=70)=0.2$,$P(X=80)=0.7$.

X 的分布列为

X	60	70	80
P	0.1	0.2	0.7

X 的数学期望为 $E(X)=60\times0.1+70\times0.2+80\times0.7=76$.

X 的方差为 $D(X)=(60-76)^2\times0.1+(70-76)^2\times0.2+(80-76)^2\times0.7=44$.

②答案一:花店一天应购进 16 枝玫瑰花.理由如下:

若花店一天购进 17 枝玫瑰花,Y 表示当天的利润(单位:元),那么 Y 的分布列为

Y	55	65	75	85
P	0.1	0.2	0.16	0.54

Y 的数学期望为 $E(Y)=55\times0.1+65\times0.2+75\times0.16+85\times0.54=76.4$.

Y 的方差为 $D(Y)=(55-76.4)^2\times0.1+(65-76.4)^2\times0.2+(75-76.4)^2\times0.16+(85-76.4)^2\times0.54=112.04$.

由以上的计算结果可以看出，$D(X)<D(Y)$，即购进 16 枝玫瑰花时利润波动相对较小. 另外，虽然 $E(X)<E(Y)$，但两者相差不大.故花店一天应购进 16 枝玫瑰花.

答案二：花店一天应购进 17 枝玫瑰花.理由如下：若花店一天购进 17 枝玫瑰花，Y 表示当天的利润(单位：元)，那么 Y 的分布列为

X	55	65	75	85
P	0.1	0.2	0.16	0.54

Y 的数学期望为 $E(Y)=55\times0.1+65\times0.2+75\times0.16+85\times0.54=76.4$.

由以上的计算结果可以看出，$E(X)<E(Y)$，即购进 17 枝玫瑰花时的平均利润大于购进 16 枝时的平均利润.故花店一天应购进 17 枝玫瑰花.

模板 7　求正态分布下的概率

1. 解析：设 $\eta=\frac{\xi-\mu}{\sigma}$，$\eta$ 服从标准正态分布.

$\therefore P(|\xi-\mu|<\sigma)=P(-1<\eta<1)=\Phi(1)-\Phi(-1)$.

答案：B

2. 解析：$\because \xi\sim N(2,9)$，$\therefore P(\xi>c+1)=P(\xi<3-c)$.

又 $P(\xi>c+1)=P(\xi<c-1)$，$\therefore 3-c=c-1$，$\therefore c=2$.

答案：B

3. 解析：由于随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其概率密度函数关于 $X=\mu$ 对称，故 $P(X\leqslant\mu)=\frac{1}{2}$.

答案：$\frac{1}{2}$

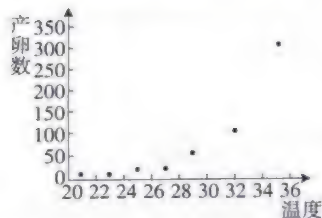
4. 解析：由题意知，正态分布 $N(131,9)$ 中 $\mu=131$，$\sigma^2=9$，$\sigma=3$，所以 $\mu-3\sigma=122$，$\mu+3\sigma=140$. 设考生的数学成绩为 X，$P(122<X\leqslant140)=P(\mu-3\sigma<X\leqslant\mu+3\sigma)=0.997\ 4$，所以 $P(X>140)=\frac{1}{2}(1-0.997\ 4)=0.001\ 3$. 即成绩在 140 分以上的考生所占的百分比为 0.13%.

答案：0.13%

第三章　统计案例

模板 1　求非线性回归方程

1. 解：根据收集的数据作散点图如图所示.



在散点图中，样本点并没有分布在某个带状区域内，因此两个变量不呈线性相关关系，所以不能直接利用线性回归方程来建立两个变量之间的关系，根据已有的函数知识，可以发现样本分布在某一条指数函数曲线 $y=c_1e^{c_2x}$ 的周围，其中 c_1 和 c_2 是待定参数.

故应选择的回归方程模型为 $\hat{y}=c_1e^{c_2x}$.

2. 解：画出散点图如图 1 所示.

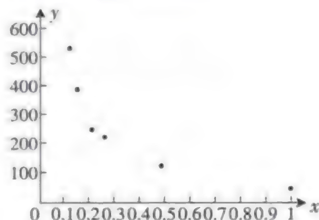


图 1

观察可知 y 与 x 是近似反比例函数，设 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$. 令 $t=\frac{1}{x}$，则 $y=kt$，可得 $y=kt$ 的数据如下表

t	10	8	5	4	2	1
y	533	378	262	235	134	51

画出散点图如图 2 所示.

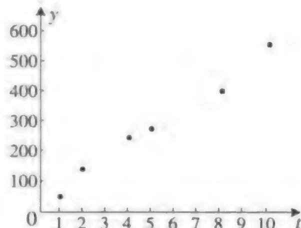


图 2

因此可用线性回归模型进行拟合，易得 $\hat{y}=58.8t-28.5$.所以 y 与 x 的回归方程为 $\hat{y}=\frac{58.8}{x}-28.5$.

模板 2　独立性检验

1. 解析：因为 $K^2=7.8\geqslant6.635$，$1-0.010=0.99$，即有

99%以上的把握认为“爱好该项运动与性别有关”,所以选 C.

答案:C

2. 解析:$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$=\frac{50\times(20\times15-5\times10)^2}{25\times25\times30\times20}\approx8.333>7.879$,

所以在犯错误的概率不超过 0.005 的前提下认为喜爱打篮球与性别有关.

答案:0.5%

3. 解:(1)调查的 500 位老年人中有 70 位需要志愿者提供帮助,因此该地区老年人中,需要帮助的老年人的比例的估计值为$\frac{70}{500}=14\%$.

(2)$K^2=\frac{500\times(40\times270-30\times160)^2}{200\times300\times70\times430}\approx9.967$.

由于 9.967>6.635,所以有 99%的把握认为该地区的老年人是否需要帮助与性别有关.

(3)由(2)的结论知,该地区老年人是否需要帮助与性别有关,并且从样本数据能看出该地区男性老年人与女性老年人中需要帮助的比例有明显差异,因此在调查时,先确定该地区老年人男、女的比例,再把老年人分成男、女两层并采用分层抽样方法比采用简单随机抽样方法更好.

思想方法篇

模板 1 转化与化归思想

1. 解析:存在正数 x,使 $2^x(x-a)<1$ 成立,等价于存在正数 x,使 $a>x-\frac{1}{2^x}$ 成立. 因为函数 $f(x)=x-\frac{1}{2^x}$ 在$(0,+\infty)$上单调递增,所以 $f(x)>f(0)=-1$,即函数 $f(x)=x-\frac{1}{2^x}$ 的值域为$(-1,+\infty)$,所以 a 的取值范围是$(-1,+\infty)$.

答案:D

2. 解析:函数 $f(x)=e^x-1$ 为增函数,其值域为$(-1,+\infty)$,故 $f(a)>-1$.若有 $f(a)=g(b)$,则需满足 $g(b)=-b^2+4b-3>-1$,化简整理得 $b^2-4b+2<0$,解得 $2-\sqrt{2}<b<2+\sqrt{2}$.

答案:B

3. 解析:要使所有同学的路程总和最小,则应使放树苗的树坑两边的树坑尽量保持一样多. 由于共有 20 个树坑,所以树应放在第 10 或第 11 个树坑旁.

答案:D

4. 解:(1)$f'(x)=3x^2-9x+6=3(x-1)(x-2)$,因为 $x\in(-\infty,+\infty)$,$f'(x)\geqslant m$,即 $3x^2-9x+(6-m)\geqslant0$ 恒成立,所以 $\Delta=81-12(6-m)\leqslant0$,解得 $m\leqslant-\frac{3}{4}$,所以 m 的最大值为$-\frac{3}{4}$.

(2)因为当 $x<1$ 时,$f'(x)>0$;当 $1<x<2$ 时,$f'(x)<0$;当 $x>2$ 时,$f'(x)>0$.

所以当 $x=1$ 时,$f(x)$取极大值 $f(1)=\frac{5}{2}-a$;

当 $x=2$ 时,$f(x)$取极小值 $f(2)=2-a$,

故当 $f(2)>0$ 或 $f(1)<0$ 时,$f(x)=0$ 仅有一个实数根.

解得 $a<2$ 或 $a>\frac{5}{2}$.

模板 2 分类讨论思想

1. 解析:先排三名男生可分两种情况:①当甲在中间时,满足条件的排列共有 $A_2^2A_3^3A_4^2=144$(种).

②当甲在三名男生排列的两边时,满足条件的排列共有 $2\times A_2^2A_2^1A_3^2A_3^1=144$(种).

综上可知,共有 144+144=288(种)情况.

答案:B

2. 解析:当 $x>0$ 时,$\frac{1}{x}<5\Leftrightarrow x>\frac{1}{5}$;当 $x<0$ 时,$\frac{1}{x}<5\Leftrightarrow x<0$. 故原不等式的解集是$\{x|x<0$ 或 $x>\frac{1}{5}\}$.

答案:$\{x|x<0$ 或 $x>\frac{1}{5}\}$

3. 解:(1)令 $g(x)=2x^2-3(1+a)x+6a$,

其对称轴方程为 $x=\frac{3}{4}(1+a)$,

$\Delta=9(1+a)^2-48a=9a^2-30a+9=3(3a-1)(a-3)$.

①当 $0<a\leqslant\frac{1}{3}$ 时,$\Delta\geqslant0$,$x=\frac{3}{4}(1+a)>0$,$g(0)=6a>0$,方程 $g(x)=0$ 的两个根分别为 $0<x_1=\frac{3a+3-\sqrt{9a^2-30a+9}}{4}<x_2=\frac{3a+3+\sqrt{9a^2-30a+9}}{4}$,

$\therefore D=A\cap B=\left(0,\frac{3a+3-\sqrt{9a^2-30a+9}}{4}\right)\cup\left(\frac{3a+3+\sqrt{9a^2-30a+9}}{4},+\infty\right)$;

②当$\frac{1}{3}<a<1$时，$\Delta<0$，则$g(x)>0$恒成立，所以$D=A\cap B=(0,+\infty)$. 综上所述，当$0<a\leqslant\frac{1}{3}$时，

$D=\left(0,\frac{3a+3-\sqrt{9a^2-30a+9}}{4}\right)\cup$

$\left(\frac{3a+3+\sqrt{9a^2-30a+9}}{4},+\infty\right)$；

当$\frac{1}{3}<a<1$时，$D=(0,+\infty)$.

(2)$f'(x)=6x^2-6(1+a)x+6a=6(x-a)(x-1)$，

令$f'(x)=0$，得$x=a$或$x=1$.

①当$0<a\leqslant\frac{1}{3}$时，由(1)知$D=(0,x_1)\cup(x_2,+\infty)$.

因为$g(a)=2a^2-3(1+a)a+6a=a(3-a)>0$，$g(1)=2-3(1+a)+6a=3a-1\leqslant0$，所以$0<a<x_1<1\leqslant x_2$，

所以$f'(x)$，$f(x)$随x的变化情况如下表：

x	$(0,a)$	a	(a,x_1)	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	↗

所以$f(x)$的极大值点为$x=a$，没有极小值点.

②当$\frac{1}{3}<a<1$时，由(1)知$D=(0,+\infty)$，

所以$f'(x)$，$f(x)$随x的变化情况如下表：

x	$(0,a)$	a	$(a,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

所以$f(x)$的极大值点为$x=a$，极小值点为$x=1$.

综上所述，当$0<a\leqslant\frac{1}{3}$时，$f(x)$有一个极大值点$x=a$，没有极小值点；当$\frac{1}{3}<a<1$时，$f(x)$有一个极大值点$x=a$，一个极小值点$x=1$.

4. 解：函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=1-\frac{a}{x}$.

(1)当$a=2$时，$f(x)=x-2\ln x$，$f'(x)=1-\frac{2}{x}(x>0)$，

所以$f(1)=1$，$f'(1)=-1$，所以$y=f(x)$在点$A(1,f(1))$处的切线方程为$y-1=-(x-1)$，即$x+y-2=0$.

(2)由$f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}(x>0)$可知：

①当$a\leqslant0$时，$f'(x)>0$，函数$f(x)$是在$(0,+\infty)$上的增函数，函数$f(x)$无极值.

②当$a>0$时，由$f'(x)=0$，解得$x=a$. 当$x\in(0,a)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(a,+\infty)$时，$f'(x)>0$. 所以$f(x)$在$x=a$处取得极小值，且极小值为$f(a)=a-a\ln a$，无极大值.

综上，当$a\leqslant0$时，函数$f(x)$无极值；

当$a>0$时，$f(x)$在$x=a$处取得极小值$a-a\ln a$，无极大值.

模板3　数形结合思想

1. 解析：利用函数的单调性及数形结合思想求解.

$\because f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$，

由$f'(x)<0$，得$1<x<3$，由$f'(x)>0$，得$x<1$或$x>3$，

$\therefore f(x)$在区间$(-\infty,1)$，$(3,+\infty)$上是增函数，

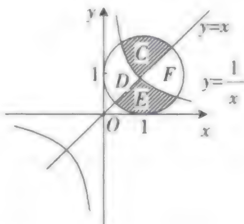
又$a<b<c$，$f(a)=f(b)=f(c)=0$，

由草图可知$\therefore y_{极大值}=f(1)=4-abc>0$，$y_{极小值}=f(3)=-abc<0$，$\therefore 0<abc<4$. $\therefore f(0)=-abc<0$，$\therefore f(0)f(1)<0$，$f(0)f(3)>0$，$\therefore$正确的结论是序号②③.

答案：C

2. 解析：借助图形，数形结合求解.

由题意知$A\cap B$所表示的平面图形为图中阴影部分，曲线$y=\frac{1}{x}$与直线$y=x$将圆$(x-1)^2+(y-1)^2=1$分成C,D,E,F四部分. $\because$圆$(x-1)^2+(y-1)^2=1$与$y=\frac{1}{x}$的图象都关于直线$y=x$对称，从而$S_C=S_F$，$S_D=S_E$，而$S_C+S_D+S_E+S_F=\pi$，$\therefore S_{阴影}=S_C+S_E=\frac{\pi}{2}$.



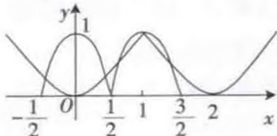
答案：D

3. 解析：根据函数$y=f(x)$的特点确定其性质，然后根据定义域分别作出图象求解.

根据题意，函数$y=f(x)$是周期为2的偶函数且$0\leqslant x\leqslant1$时，$f(x)=x^3$，则当$-1\leqslant x\leqslant0$时，$f(x)=-x^3$，且$g(x)=|x\cos(\pi x)|$，所以当$x=0$时，$f(x)=$

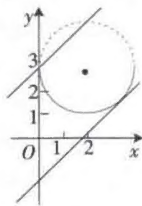
$g(x)$. 当 $x\neq0$ 时，若 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$，令 $x^3=x\cos(\pi x)$，即 $x^2=|\cos(\pi x)|$.

同理可以得到在区间 $\left[-\frac{1}{2},0\right)$，$\left(\frac{1}{2},1\right]$，$\left(1,\frac{3}{2}\right]$ 上的关系式都是上式. 在同一个坐标系中作出所得关系式等号两边函数的图象，如图所示，有 5 个根. 所以总共有 6 个.



答案：B

4. 解析：由 $y=3-\sqrt{4x-x^2}$ 得 $(x-2)^2+(y-3)^2=4(1\leqslant y\leqslant3)$.



$\therefore$ 曲线 $y=3-\sqrt{4x-x^2}$ 是半圆，如图中实线所示.

当直线 $y=x+b$ 与圆相切时，$\frac{|2-3+b|}{\sqrt{2}}=2$. $\therefore b=1\pm2\sqrt{2}$.

结合图形可知 b 的取值范围是 $[1-2\sqrt{2},3]$.

答案：D

5. 解析：直线与圆的位置关系如图所示，

设 $P(x,y)$，则 $\angle APO=30°$，且 $OA=1$.

在直角三角形 APO 中，

$OA=1$，$\angle APO=30°$，则 $OP=2$，即 $x^2+y^2=4$. 又 $x+y-2\sqrt{2}=0$，联立解得 $x=y=\sqrt{2}$，即 $P(\sqrt{2},\sqrt{2})$.

答案：$(\sqrt{2},\sqrt{2})$

模板 4　函数与方程思想

1. 解析：$f(g(x))=(3^x-2)^2-4(3^x-2)+3$
$=(3^x)^2-8\cdot3^x+15=(3^x-3)(3^x-5)$.

由 $f(g(x))>0$ 得 $(3^x-3)(3^x-5)>0$，所以 $3^x>5$ 或 $3^x<3$，所以 $x>\log_3 5$ 或 $x<1$，所以 $M=\{x|x>\log_3 5$ 或 $x<1\}$.

由 $g(x)<2$ 得 $3^x-2<2$，即 $3^x<4$，解得 $x<\log_3 4$，

所以 $N=\{x|x<\log_3 4\}$. 所以 $M\cap N=\{x|x>\log_3 5$ 或 $x<1\}\cap\{x|x<\log_3 4\}=\{x|x<1\}$.

答案：D

2. 解析：不妨设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线为 $y=\frac{b}{a}x$，由方程组 $\begin{cases}y=\frac{b}{a}x,\\ y=x^2+1\end{cases}$ 消去 y，得 $x^2-\frac{b}{a}x+1=0$ 有唯一解，所以 $\Delta=\left(\frac{b}{a}\right)^2-4=0$，所以 $\frac{b}{a}=2$，$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{5}$，故选D.

答案：D

3. 解：(1)由 $y=f(x)$ 过 $(0,0)$ 点，得 $b=-1$.

由 $y=f(x)$ 在 $(0,0)$ 点的切线斜率为 $\frac{3}{2}$，且 $y'|_{x=0}=\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+a\right)\Big|_{x=0}=\frac{3}{2}+a$，解得 $a=0$.

(2)证明：由基本不等式，当 $x>0$ 时，$2\sqrt{(x+1)\cdot1}<x+1+1=x+2$，故 $\sqrt{x+1}<\frac{x}{2}+1$. 记 $h(x)=f(x)-\frac{9x}{x+6}$，则 $h'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{54}{(x+6)^2}$

$=\frac{2+\sqrt{x+1}}{2(x+1)}-\frac{54}{(x+6)^2}<\frac{x+6}{4(x+1)}-\frac{54}{(x+6)^2}$

$=\frac{(x+6)^3-216(x+1)}{4(x+1)(x+6)^2}$.

令 $g(x)=(x+6)^3-216(x+1)$，

则当 $0<x<2$ 时，$g'(x)=3(x+6)^2-216<0$.

因此 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 内是递减函数，又由 $g(0)=0$，得 $g(x)<0$，所以 $h'(x)<0$. 因此 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 内是递减函数，又 $h(0)=0$，得 $h(x)<0$.

于是当 $0<x<2$ 时，$f(x)<\frac{9x}{x+6}$.

绿卡图书读者反馈表

您购买的这本书是“绿卡图书”:《高中数学万能解题模板》

读者档案

* 姓名________ 购书时间________ QQ 号码________

* 学校名称________ 班级________

* 联系电话________ 邮编________

数学老师及联系方式________ 数学教材版本________

图书调查

您是怎样获得本书的?

☐ 自己在书店购买 ☐ 网上订购 ☐ 他人赠送 ☐ 老师或同学团购 ☐ 其他

您认为本书的优点是________

您认为本书的不足是________

您对本书的建议________

您在使用过程中发现的错误(可附页)________

您用过的同类辅导书中,比较好的是________

推荐理由________

联系方式

地址:山东省淄博市张店区共青团西路 86 号(市老干部活动中心院内西楼)绿卡凯尔读者服务部

邮编:255045

E-mail:passcareduzhe@126.com

联系电话:0533-2300280

绿卡高中数学
QQ 在线交流:
1430879296

请将本反馈表寄至以上地址,也可以登录 www.passcare.net 下载电子版反馈表,填写后发至 passcareduzhe@126.com。

责任编辑：张　宇　颜李朝
丛书策划：绿卡凯尔



每天用得到，天天都可学！

● 模板覆盖全面

本书涵盖高中阶段考试所需的万能解题模板，结合典型例题，提供了全面的解题策略，让学生轻松应对考试，以不变应万变。

● 考频标注，重点突出

精心研究最近5年183套数学高考真题，标注每个模板的考查频率，帮你解读高考考什么，怎么考。

● 必修+选修

以最新考试大纲和课程标准为依据，包含各版本新课标教材规定的全部必修和选修内容。



用手机二维码识别软件拍照，下载“高中数学常用公式定律”，更多学习资料请访问绿卡教育网。

绿卡教育网	www.passcare.net
绿卡天猫旗舰店	passts.tmall.com
读者服务热线	0533-2300280




ISBN 978-7-5648-1614-8
01>
9 787564 816148

定价：42.80元